

7. Praca i energia

7-1. Wstęp

Podstawowym zagadnieniem dynamiki punktu materialnego jest określenie ruchu punktu, jeżeli znana jest siła działająca na ten punkt. Mówiąc o „ruchu” punktu materialnego mamy na myśli zmiany położenia tego punktu w czasie. Jeżeli ruch jest jednowymiarowy, zagadnienie sprowadza się do znalezienia zależności x od czasu, czyli funkcji $x(t)$. W poprzednich dwóch rozdziałach rozwiązywaliśmy to zagadnienie dla specjalnego przypadku stałej siły. Metoda, jaką tam stosowaliśmy, jest następująca. Korzystając z odpowiednich praw rządzących oddziaływaniami znajdujemy wypadkową siłę F działającą na punkt materialny. Następnie podstawiamy siłę F oraz masę m punktu do równania wyrażającego drugą zasadę dynamiki Newtona i znajdujemy przyspieszenie a punktu, czyli

$$a = \frac{F}{m}.$$

Jeśli siła F i masa m są stałe, przyspieszenie a również musi być stałe. Przyjmijmy, że oś x ma kierunek zgodny z kierunkiem tego stałego przyspieszenia. Wówczas możemy znaleźć prędkość punktu materialnego na podstawie równania (3-12):

$$v = v_0 + at,$$

a jego położenie na podstawie równania (3-15) (w którym $x_0 = 0$):

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2;$$

zwracamy uwagę, że dla wygody i uproszczenia opuściliśmy w tych równaniach indeks x . Ostatecznie równanie daje nam właśnie to, co na ogół chcemy znać, mianowicie położenie punktu w funkcji czasu, $x(t)$.

Zagadnienie jednakże staje się bardziej złożone, jeśli siła działająca na punkt materialny *nie jest stała*. W tym przypadku przyspieszenie punktu znajdujemy, podobnie jak poprzednio, również z drugiej zasady Newtona. Ale w celu znalezienia prędkości i położenia punktu nie możemy teraz korzystać ze wzorów wyprowadzonych dla przypadku stałego przyspieszenia, ponieważ to przyspieszenie nie jest obecnie stałe. Aby rozwiązać takie zagadnienie będziemy się posługiwać matematyczną operacją całkowania, którą omówimy w tym rozdziale.

Ograniczmy naszą uwagę do sił, które zależą jedynie od położenia punktu materialnego względem otoczenia. Tego typu siły są siłami najczęściej spotykanymi w fizyce. Przykładami tych sił są siły grawitacyjne działające między dwoma ciałami, takimi jak Słońce i Ziemia lub Ziemia i Księżyc, oraz siła wywierana przez rozciągniętą sprężynę na ciało, do którego jest ona przyczepiona. Postępowanie pozwalające określić ruch punktu materialnego poddanego działaniu takich sił prowadzi nas do pojęcia pracy i energii kinetycznej oraz do sformułowania twierdzenia o pracy i energii, głównego twierdzenia tego rozdziału. W rozdziale 8 omówimy szerzej pojęcie energii oraz zasadę zachowania energii, zasadę, która odegrała ogromną rolę w rozwoju fizyki.

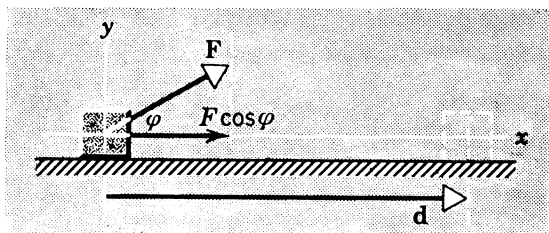
7-2. Praca wykonana przez siłę stałą

Rozważmy punkt materialny poddany działaniu pewnej siły. W najprostszym przypadku siła F jest stała, a punkt porusza się po linii prostej w kierunku działania tej siły. W takim przypadku *pracę wykonaną przez tę siłę przy przemieszczaniu punktu materialnego* definiujemy jako iloczyn siły F i drogi d przebytej przez punkt w czasie ruchu. Możemy to zapisać jako

$$W = Fd.$$

Stała siła działająca na punkt materialny nie musi mieć jednakże kierunku zgodnego z kierunkiem ruchu tego punktu. Wobec tego, ogólniej, definiujemy *pracę wykonaną przez określoną siłę przy przemieszczeniu określonego punktu materialnego*, jako iloczyn składowej tej siły w kierunku ruchu punktu przez drogę d , jaką przebędzie ten punkt. Na rysunku 7-1 pokazano stałą siłę F tworzącą kąt φ z osią x i działającą na punkt materialny, którego przemieszczenie wzdłuż osi x wynosi d . Jeśli W przedstawia pracę wykonaną przez siłę F w czasie tego przemieszczenia, to zgodnie z naszą definicją,

$$W = (F \cos \varphi) d. \quad (7-1)$$

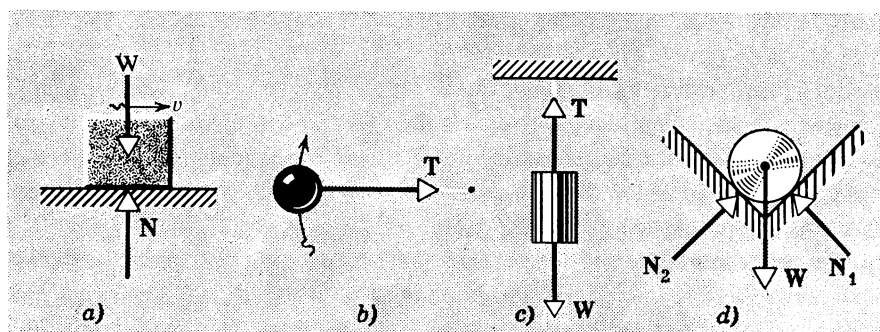


Rys. 7-1. Siła F powoduje przemieszczenie klocka na odległość d . Składowa siły F wykonująca pracę ma wartość $F \cos \varphi$. Wykonana praca jest równa $F d \cos \varphi (= \mathbf{F} \cdot \mathbf{d})$

Oczywiście na punkt materialny poruszający się w opisany sposób muszą działać jeszcze inne siły (na przykład jego ciężar oraz siła tarcia wywierana przez płaszczyznę). Punkt materialny, na który działa tylko jedna siła, może przemieszczać się w kierunku innym niż kierunek działania tej siły. Przykładem tego jest ruch ciała rzuconego ukośnie względem Ziemi. Natomiast punkt taki może poruszać się po linii prostej tylko wówczas, gdy kierunek tej linii pokrywa się z kierunkiem działania siły. *Równanie (7-1) określa jedynie pracę wykonaną przy przemieszczaniu punktu materialnego przez jedną szczególną siłę F . Pracę wykonaną przy przemieszczaniu tego punktu przez inne siły należy obliczać oddzielnie.*

Całkowita praca wykonana przy przemieszczaniu punktu materialnego jest sumą prac wykonanych przez poszczególne siły.

Jeśli φ jest równe zero, praca wykonana przez siłę F wynosi po prostu Fd , co zgadza się z naszym poprzednim równaniem. Wobec tego, jeżeli pozioma siła przesuwaa ciało w kierunku poziomym lub siła pionowa wznosi to ciało pionowo, praca wykonana przez te siły jest iloczynem wartości bezwzględnej siły i przebytej drogi x . Gdy φ wynosi 90° siła nie ma składowej w kierunku ruchu. Siła taka nie wykonuje więc pracy przy przemieszczaniu ciała. Na przykład pionowa siła utrzymująca ciało w ustalonej odległości od powierzchni Ziemi nie wykonuje pracy nawet wówczas, gdy ciało to porusza się poziomo względem tej powierzchni. Podobnie, siła dośrodkowa działająca na poruszające się ciało nie wykonuje pracy przy przemieszczaniu tego ciała, ponieważ kierunek tej siły i kierunek ruchu ciała są zawsze prostopadłe względem siebie. Oczywiście siła nie wykonuje pracy, gdy przemieszczenie ciała jest równe zero, ponieważ wówczas ciało się nie porusza. Na rysunku 7-2 przedstawiliśmy powszechnie znane przykłady, w których siła przyłożona do ciała nie wykonuje pracy nad tym ciałem.



Rys. 7-2. Siły przyłożone do ciała nie zawsze wykonują pracę. (a) Kłoczek porusza się w prawo ze stałą prędkością v po gładkiej powierzchni. Ani ciężar klocka W , ani siła N nacisku powierzchni nie wykonuje pracy. (b) Kulka porusza się po okręgu pod działaniem siły dośrodkowej T . Siła ta nadaje kulce przyspieszenie dośrodkowe a , ale nie wykonuje ona żadnej pracy. W obu przypadkach (a) i (b) rozważane siły (W, N i T) mają kierunek prostopadły do przemieszczenia, wobec czego $W = F \cdot d = Fd \cos \varphi = Fd \cos 90^\circ = 0$. (c) Walec wisi na sznurku. Ani naprężenie sznurka T , ani ciężar walca W nie wykonują pracy. (d) Walec spoczywa w wyłobieniu; żadna z sił działających na walec ani W , ani N_1 ani N_2 nie wykonuje pracy. W obu przypadkach (c) i (d) praca wykonana przez rozważane siły jest równa zero, ponieważ przemieszczenie jest równe zero

Zauważmy, że równanie (7-1) można zapisać w postaci $(F \cos \varphi)d$ lub $F(d \cos \varphi)$. Oznacza to, że pracę można obliczać dwoma sposobami: albo mnożąc wartość bezwzględną przemieszczenia przez składową siły w kierunku tego przemieszczenia, albo mnożąc wartość bezwzględną siły przez składową przemieszczenia w kierunku tej siły. Oba te sposoby dają zawsze taki sam wynik.

Praca jest *skalarem*, mimo że obie wielkości wchodzące do jej definicji, siła i przemieszczenie, są wektorami. W paragrafie 2-4 zdefiniowaliśmy *iloczyn skalarny* dwóch wektorów jako wielkość skalarną, którą otrzymujemy mnożąc wartość bezwzględną jednego wektora przez składową drugiego wektora wzdłuż kierunku pierwszego. Obiecywaliśmy tam, że wkrótce przedstawimy wielkości fizyczne zachowujące się jak iloczyny skalarne. Praca

określona równaniem (7-1) jest właśnie taką wielkością. Posługując się terminologią algebry wektorów równanie to możemy zapisać w postaci:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}, \quad (7-2)$$

gdzie kropka oznacza iloczyn skalarny. Równanie (7-2) dla $\mathbf{F}$ i $\mathbf{d}$ odpowiada równaniu (2-11) dla $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Praca może być dodatnia lub ujemna. Jeżeli przemieszczenie punktu materialnego, na który działa siła, ma składową skierowaną przeciwnie do kierunku tej siły, praca wykonana przez tę siłę jest ujemna. Kąt między wektorami siły i przemieszczenia jest wówczas kątem rozwartym. Na przykład, jeśli ktoś kładzie jakiś przedmiot na podłogę, skierowana do góry siła jego ręki chroniącej ten przedmiot od upadku jest ujemna. W tym przypadku $\varphi = 180^\circ$, ponieważ $\mathbf{F}$ jest skierowane do góry, a $\mathbf{d}$ — w dół.

Okazuje się, że praca zdefiniowana tak, jak podaje równanie (7-2), jest pojęciem bardzo użytecznym w fizyce. Wprowadzona przez nas definicja pojęcia *pracy* nie pokrywa się ze znaczeniem, jakie nadajemy temu słowu w życiu codziennym. To może wprowadzić pewne zamieszanie. Osoba trzymająca nieruchomo w powietrzu ciężki przedmiot może powiedzieć, że wykonuje ciężką pracę. I rzeczywiście w sensie fizjologicznym praca jej jest ciężka, ale w sensie fizycznym nie wykonuje ona żadnej pracy, ponieważ przyłożona siła nie powoduje przemieszczenia przedmiotu. W fizyce będziemy używać słowa *praca* wyłącznie w sensie, jaki nadaje temu słowu równanie (7-2). Słowa zapożyczone z języka codziennego i używane do określania bardzo konkretnych pojęć spotykamy w wielu dziedzinach nauki. Na przykład znaczenie słów *zasada* i *komórka* w chemii i biologii jest zupełnie inne niż w mowie potocznej.

Jednostką pracy jest praca wykonana przez jednostkową siłę przy przemieszczeniu ciała na jednostkową odległość w kierunku działania tej siły. W układzie SI jednostką pracy jest $1 \text{ N} \cdot \text{m}$. Jednostka ta nazywana jest *dżulem* [J]. W układzie CGS jednostką pracy jest $1 \text{ dyna} \cdot \text{cm}$. Jednostka ta jest nazywana *ergiem*. Korzystając z zależności między 1 N i 1 dyn oraz 1 m i 1 cm znajdujemy, że $1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergów}$.

Przykład 1. Kłosek o masie 10 kg należy przesunąć z podstawy na szczyt równi pochyłej mającej długość 5 m i wysokość 3 m . Jaką pracę musi wykonać równoległa do równi siła pchająca kłosek ze stałą prędkością, jeżeli założymy, że nie ma tarcia i że przyspieszenie ziemskie w tym miejscu ma wartość $g = 9,80 \text{ m/s}^2$.

Sytuacja przedstawiona jest na rys. 7-3a. Siły działające na kłosek pokazane są na rys. 7-3b. Najpierw musimy znaleźć P , wartość bezwzględną siły pchającej kłosek wzdłuż równi. Ponieważ ruch odbywa się bez przyspieszenia, wypadkowa siła równoległa do równi musi być równa zeru. Stąd

$$P - mg \sin \theta = 0,$$

czyli

$$P = mg \sin \theta = 10,0 \text{ kg} \cdot 9,80 \text{ m/s}^2 \cdot 3/5 = 58,8 \text{ N}.$$

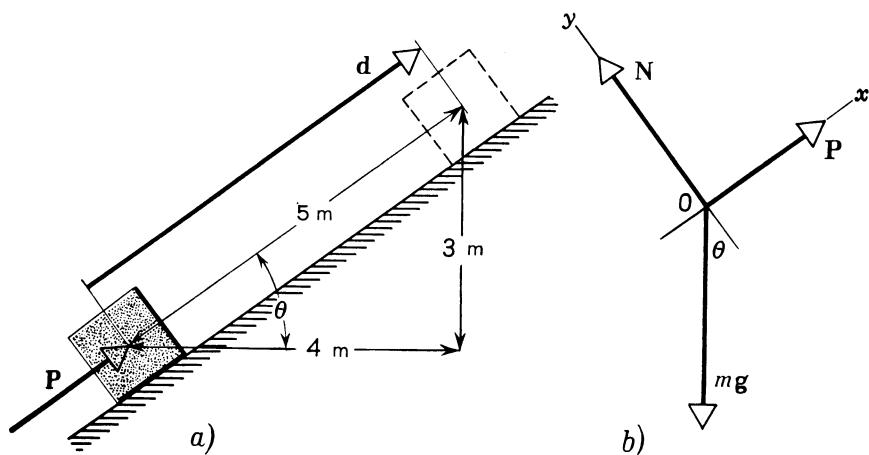
Wobec tego, na podstawie równania (7-1), w którym $\varphi = 0^\circ$, praca wykonana przez siłę $\mathbf{P}$ wynosi

$$W = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d} = P d \cos 0 = P d = 58,8 \text{ N} \cdot 5,00 \text{ m} = 294 \text{ J}.$$

Gdyby kłosek trzeba było podnieść do góry bez użycia równi, wykonana praca byłaby wówczas równa iloczynowi pionowej siły mg przez pionową odległość, czyli wynosiłaby

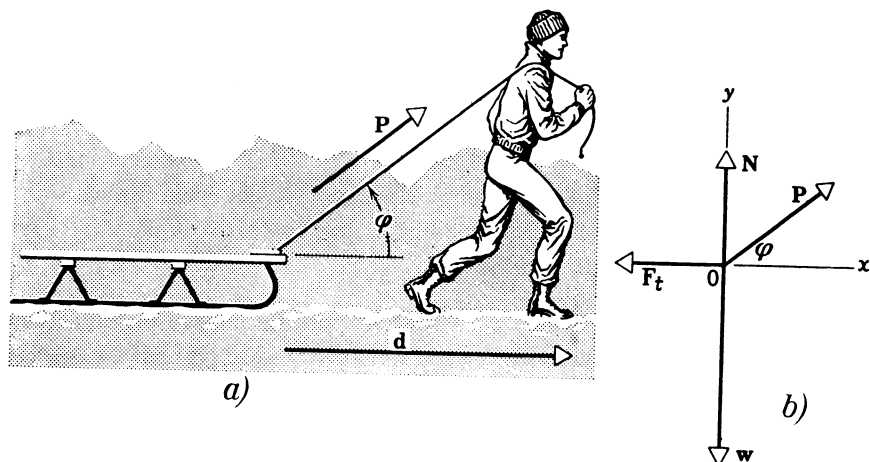
$$98,0 \text{ N} \cdot 3,00 \text{ m} = 294 \text{ J},$$

a więc tyle samo co poprzednio. Jedyną różnicą jest to, że korzystając z równi możemy przyłożyć do podnoszonego klocka mniejszą siłę ($P = 58,8 \text{ N}$) niż przy podnoszeniu bez równi ($mg = 98,0 \text{ N}$); z drugiej strony kłosek pchany po równi ma do przebycia większą drogę ($5,00 \text{ m}$) niż kłosek podnoszony bezpośrednio ($3,00 \text{ m}$).



Rys. 7-3. Przykład 1. (a) Siła P przemieszcza klocek na odległość d , w górę równi pochyłej nachylonej pod kątem θ do poziomu. (b) Siły działające na klocek

Przykład 2. Chłopiec ciągnie sanki o masie 5 kg, ze stałą prędkością, po poziomej powierzchni, na drodze 9 m. Jaką pracę wykona on przy ciągnięciu, jeśli współczynnik tarcia kinetycznego wynosi 0,20, a sznurek tworzy kąt 45° z poziomem?



Rys. 7-4. Przykład 2. (a) Chłopiec przesuwa sanki na odległość d , ciągnąc za sznurek siłą P tworzącą kąt φ z poziomem. (b) Siły działające na sanki

Sytuacja przedstawiona jest na rys. 7-4a, a siły działające na sanki — na rys. 7-4b. P jest siłą, jaką chłopiec ciągnie sanki, w — ciężarem sanek, F_t — siłą tarcia, a N siłą normalną, z jaką powierzchnia działa na sanki. Praca, jaką wykona chłopiec ciągnąc sanki jest równa

$$W = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d} = P d \cos \varphi.$$

Aby obliczyć jej wartość, musimy najpierw znaleźć wartość P , która nie była podana w zadaniu. Przy szukanu P skorzystamy z wykresu sił.

Ponieważ sanki poruszają się bez przyspieszenia, z drugiej zasady dynamiki otrzymujemy

$$P \cos \varphi - F_t = 0$$

oraz

$$P \sin \varphi + N - w = 0.$$

Wiemy również, że między F_t i N istnieje zależność

$$F_t = \mu_k N.$$

Te trzy równania zawierają trzy nieznanne wielkości: P , F_t i N . Aby znaleźć P , eliminujemy z nich F_t i N , a otrzymane równanie rozwiązujemy względem P . Czytelnik powinien sprawdzić, że

$$P = \mu_k w / (\cos \varphi + \mu_k \sin \varphi).$$

Dla $\mu = 0,20$, $w = 5 \text{ kH}$ i $\varphi = 45^\circ$ otrzymujemy

$$P = 0,20 \cdot 5 \text{ kH} / (0,707 + 0,141) = 1,2 \text{ kG}.$$

Wobec tego dla $d = 9 \text{ m}$ praca wykonana przez chłopca przy ciągnięciu sanek wynosi

$$W = P d \cos \varphi = 1,2 \text{ kG} \cdot 9 \text{ m} \cdot 0,707 = 7,65 \text{ kGm} = 0,78 \text{ J}.$$

Pionowa składowa siły P nie wykonuje żadnej pracy. Zauważmy jednak, że redukuje ona prostopadłą do sanek siłę nacisku ($N = w - P \sin \varphi$) i dzięki temu zmniejsza wartość bezwzględnej siły tarcia ($F_t = \mu_k N$).

Czy gdyby chłopiec ciągnął sznurek poziomo, a nie pod kątem 45° do poziomu, praca wykonana przez niego byłaby większa, mniejsza czy taka sama, jak w omówionym przypadku?

7-3. Praca wykonana przez siłę zmienną.

Przypadek jednowymiarowy

Rozważmy teraz pracę wykonaną przez siłę, która nie jest stała. Zajmiemy się najpierw siłą, która zmienia się tylko co do wartości bezwzględnej. Przyjmijmy, że siła ta jest funkcją położenia, $F(x)$, i że kierunek jej jest zgodny z kierunkiem osi x . Jaką pracę wykona ta siła przy przesuwaniu tego ciała od położenia x_1 do położenia x_2 ?

Na rysunku 7-5 zrobiliśmy wykres funkcji $F(x)$. Podzielmy całkowite przemieszczenie ciała na dużą liczbę jednakowych przedziałów Δx (rys. 7-5a). Rozważmy małe przemieszczenie Δx od x_1 do $x_1 + \Delta x$. Podczas tego przemieszczenia siła F ma prawie stałą wartość i praca ΔW , jaką ona wykonuje, jest w przybliżeniu równa

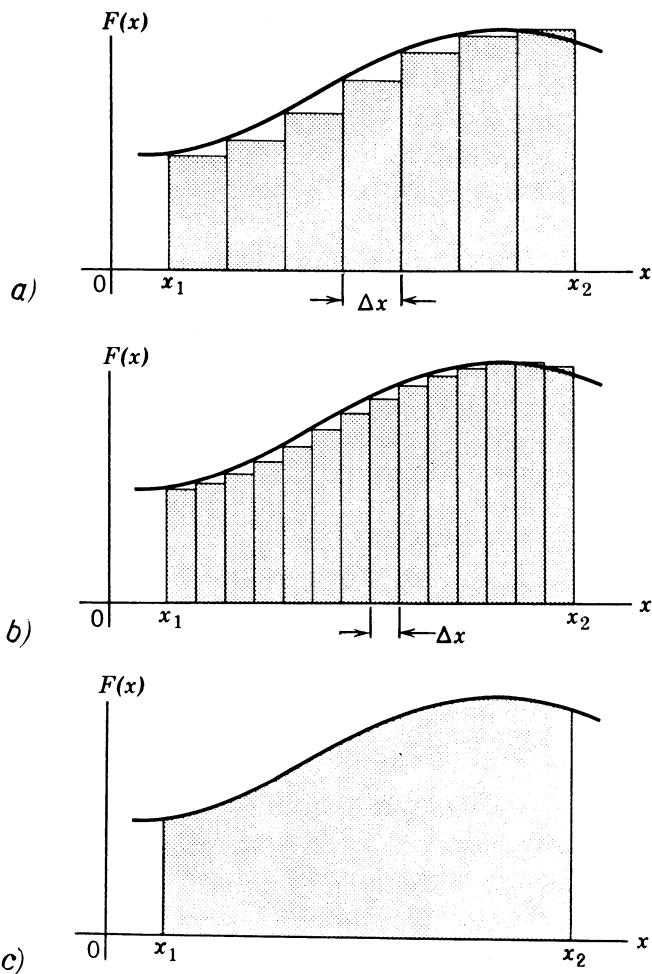
$$\Delta W = F \Delta x, \quad (7-3)$$

gdzie F jest wartością siły w punkcie x_1 . Podobnie podczas małego przemieszczenia ciała od $x_1 + \Delta x$ do $x_1 + 2\Delta x$ siła F ma prawie stałą wartość i praca wykonana przez nią wynosi w przybliżeniu $\Delta W = F \Delta x$, gdzie F jest wartością siły w punkcie $x_1 + \Delta x$. Całkowita praca wykonana przez siłę F przy przemieszczaniu ciała od położenia x_1 do położenia x_2 , W_{12} , jest równa, w przybliżeniu, sumie dużej liczby wyrazów analogicznych do wyrazu danego równaniem (7-3), przy czym wartość F w każdym wyrazie jest inna. Stąd

$$W_{12} = \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x, \quad (7-4)$$

gdzie grecka litera sigma ($\sum$) oznacza, że należy wykonać sumowanie po wszystkich przedziałach zawartych między x_1 i x_2 .

Aby otrzymać lepsze przybliżenie, możemy podzielić całkowite przemieszczenie od x_1 do x_2 na większą liczbę jednakowych przedziałów Δx (rys. 7-5b); x będzie wówczas mniejsze i wartość F na początku każdego przedziału będzie bliższa prawdziwej wartości siły wewnątrz przedziału. Jest rzeczą jasną, że zmniejszając coraz bardziej Δx , tzn. zwiększając liczbę przedziałów, możemy otrzymywać coraz to lepsze przybliżenia. Gdy Δx dąży do



Rys. 7-5. Obliczenie całki $\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$ polega na znalezieniu powierzchni zawartej pod krzywą $F(x)$ w granicach między x_1 i x_2 . Można to zrobić, w przybliżeniu, w sposób pokazany na górnym rysunku (a), mianowicie dzieląc rozważaną powierzchnię na paski o szerokości Δx każdy. Suma powierzchni powstałych prostokątów daje przybliżoną wartość szukanej powierzchni. Na rysunku środkowym (b) paski są węższe, powstałe prostokąty mniejsze i suma ich powierzchni mniej różni się od prawdziwej wartości szukanej powierzchni. Na rysunku dolnym (c) szerokość pasków jest nieskończenie mała. Wielkość brakujących kawałków powierzchni na szczycie każdego paska dąży do zera, gdy dx dąży do zera, dzięki czemu otrzymujemy dokładną wartość szukanej powierzchni

zera, a liczba przedziałów do nieskończoności, możemy otrzymać dokładną wartość pracy wykonanej przez siłę F . Praca ta jest równa

$$W_{12} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x. \quad (7-5)$$

Zależność

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx,$$

jak wiadomo z analizy matematycznej, jest *definicją całki funkcji F w przedziale od x_1 do x_2* . Liczbowo wielkość ta jest dokładnie równa polu powierzchni zawartej między krzywą przedstawiającą wartość siły i osią x , w przedziale między x_1 i x_2 (rys. 7-5c). Całkę można więc interpretować graficznie jako pole pewnej powierzchni. Symbol $\int$ jest zniekształconą literą S (*suma*) i oznacza proces całkowania. Całkowitzą pracę wykonaną przez siłę F podczas przemieszczania ciała z położenia x_1 do położenia x_2 można zapisać w postaci

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx. \quad (7-6)$$

Jako przykład rozważmy sprężynę przyczepioną do ściany. Przyjmijmy, że pozioma oś sprężyny pokrywa się z osią x , a początek układu, $x = 0$, umieścimy na końcu nie rozciągniętej sprężyny. Jako dodatni kierunek osi x przyjmijmy kierunek od ściany na zewnątrz. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że sprężyna jest rozciągana tak wolno, aby w każdej chwili można było uważać, że praktycznie znajduje się ona w stanie równowagi ($a = 0$).

Jeżeli rozciągniemy sprężynę tak, że jej koniec znajduje się w punkcie x , sprężyna będzie wywierała na rozciągające ją ciało siłę wynoszącą, z dobrym przybliżeniem,

$$F = -kx, \quad (7-7)$$

gdzie k jest pewną stałą nazywaną *współczynnikiem sprężystości (stałą sprężystości)* sprężyny. Równanie (7-7) jest *prawem określającym oddziaływanie* między sprężyną i punktem materialnym. Kierunek tej siły jest zawsze przeciwny niż kierunek przemieszczenia końca sprężyny z jego położenia równowagi. Gdy sprężyna jest rozciągnięta, $x > 0$ i F jest ujemne; gdy sprężyna jest ściśnięta, $x < 0$ i F jest dodatnie. Siła wywierana przez sprężynę jest *siłą przywracającą równowagę*, ponieważ jest ona zawsze skierowana w stronę początkowego położenia. Rzeczywiste sprężyny podlegają prawu wyrażonemu równaniem (7-7) (nazywanemu *prawem Hooke'a*), pod warunkiem, że nie rozciągamy ich poza pewne określone granice. Wielkość k jest wartością siły przypadającą na jednostkę wydłużenia. Bardzo sztywne sprężyny mają więc dużą wartość k .

Aby rozciągnąć sprężynę, musimy przyłożyć do niej siłę F' równą co do wartości, lecz przeciwnie skierowaną do siły F . Przyłożona siła* wynosi więc $F' = kx$ i praca wykonana przez tę siłę podczas rozciągania sprężyny i przemieszczania jej końca z położenia x_1 do położenia x_2 jest równa**

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (kx) dx = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2.$$

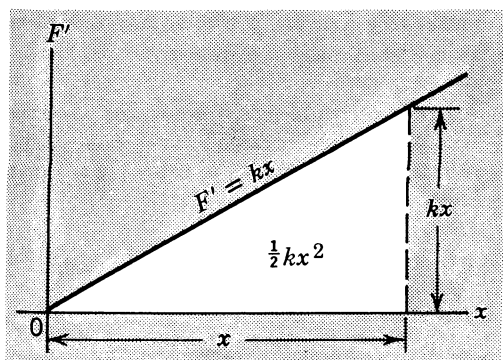
* Gdyby wartość przyłożonej siły była różna od kx , na sprężynę działałaby wypadkowa, nie zrównoważona siła i sprężyna poruszałaby się z przyspieszeniem. Aby obliczyć wykonaną pracę, musielibyśmy wówczas określić wartość przyłożonej siły w każdym punkcie pomiędzy x_1 i x_2 . Niezależnie od tego, jakie byłyby te wartości, przy założeniu, że prędkość sprężyny na początku i na końcu przedziału $[x_1, x_2]$ jest taka sama, otrzymalibyśmy dla tego przedziału zawsze tę samą pracę. Najłatwiej można jednak obliczyć pracę zakładając, że przyłożona siła wynosi $F' = kx$, tzn. że ruch odbywa się bez przyspieszenia. W tym celu właśnie, na początku naszych rozważań założyliśmy, że sprężyna porusza się bez przyspieszenia.

** Czytelnik, który dopiero zapoznał się z rachunkiem całkowym, powinien przestudiować listę całek w dodatku I.

Przyjmując, że $x_1 = 0$, a $x_2 = x$, otrzymujemy

$$W = \int_0^x (kx) dx = \frac{1}{2} kx^2. \quad (7-8)$$

Jest to praca wykonana przy przemieszczaniu końca sprężyny od położenia, w którym sprężyna była nie rozciągnięta, do położenia, w którym wydłużenie jej wynosi x . Zauważmy, że praca wykonana przy ściskaniu sprężyny o wielkość x jest taka sama, jak przy wydłużaniu jej o tę wielkość, ponieważ w równaniu (7-8) przemieszczenie x występuje w kwadracie; przy każdym znaku x otrzymujemy dodatnią wartość pracy W .



Rys. 7-6. Siła, jaką należy przyłożyć podczas rozciągania sprężyny, wynosi $F' = kx$. Powierzchnia zawarta pod krzywą przedstawiającą tę siłę jest równa pracy wykonanej przy rozciąganiu sprężyny o długość x . Wielkość tej powierzchni można znaleźć za pomocą całkowania albo za pomocą wzoru na powierzchnię trójkąta

Całkę możemy również obliczyć znajdując pole powierzchni między krzywą przedstawiającą zależność siły od x i osią x , w przedziale od $x = 0$ do $x = x$. Powierzchnią tą na rys. 7-6 jest biały trójkąt o podstawie x i wysokości xk . Pole tej powierzchni wynosi

$$\frac{1}{2}(x)(kx) = \frac{1}{2} kx^2,$$

co zgadza się z równaniem (7-8).

7-4. Praca wykonana przez siłę zmienną.

Przypadek dwuwymiarowy

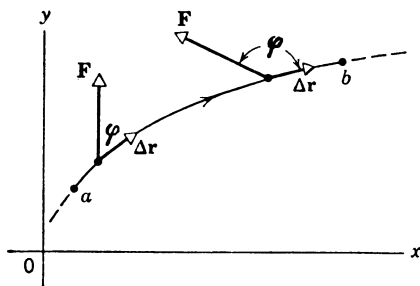
Siła F działająca na punkt materialny może zmieniać zarówno swoją wartość, jak i kierunek; punkt może więc poruszać się po torze krzywoliniowym. Aby obliczyć pracę wykonaną w tym ogólnym przypadku, dzielimy tor punktu na dużą liczbę małych przemieszczeń Δr mających kierunki zgodne z kierunkiem ruchu punktu. Na rysunku 7-7 pokazano dwa takie, dowolnie wybrane przemieszczenia, dla pewnego ruchu; pokazano tam również wartość siły F i kąt φ zawarty między kierunkiem siły F i kierunkiem przemieszczenia Δr w obu położeniach. Pracę wykonaną przy przemieszczaniu punktu materialnego o Δr znajdujemy z zależności

$$dW = F \cdot \Delta r = F \cos \varphi \Delta r. \quad (7-9)$$

Pracę wykonaną przez zmienną siłę F przy przemieszczaniu punktu materialnego, powiedzmy, z położenia a do położenia b (na rys. 7-7) obliczamy, w przybliżeniu, dodając (sumując) elementarne prace wykonane na poszczególnych odcinkach liniowych, na jakie możemy podzielić dany odcinek krzywej. Zmniejszając coraz bardziej długości liniowych odcinków Δr możemy je w końcu zastąpić różniczkami dr , a sumę prac wykonanych na tych odcinkach zastąpić całką, podobnie jak w równaniu (7-6). Szukana praca będzie wówczas dana zależnością

$$W_{ab} = \int_a^b F \cdot dr = \int_a^b F \cos \varphi dr. \quad (7-10a)$$

Wartość tej całki będziemy mogli obliczyć dopiero wówczas, gdy określimy, w jaki sposób zmienia się F i φ w równaniu (7-10a), od punktu do punktu, na wybranym odcinku toru; obie te wielkości są funkcjami współrzędnych punktu materialnego, x i y (rys. 7-7).



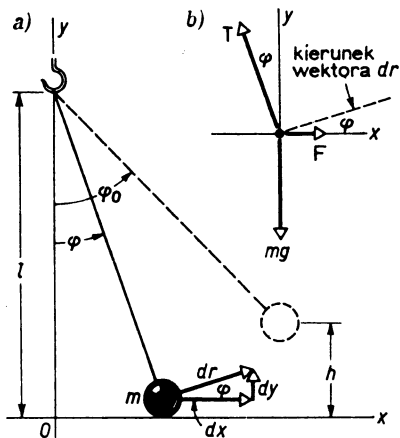
Rys. 7-7. Zmiana siły F i kąta φ wzdłuż toru. Gdy Δr dąży do zera, możemy go zastąpić różniczką dr ; wektor dr ma zawsze kierunek prędkości poruszającego się ciała (ponieważ $v = dr/dt$), a więc styczny w każdym punkcie do toru

Przedstawiając F i dr za pomocą ich składowych możemy otrzymać inne, równoważne równaniu (7-10a), wyrażenie na W_{ab} . Mianowicie $F = iF_x + jF_y$, a $dr = i dx + j dy$, wobec czego $F \cdot dr = F_x dx + F_y dy$. Przy ostatnich obliczeniach skorzystaliśmy z faktu (patrz zadanie 22, rozdział 2), że $i \cdot i = j \cdot j = 1$ oraz $i \cdot j = j \cdot i = 0$. Podstawiając otrzymany wynik do równania (7-10a) otrzymujemy

$$W_{ab} = \int_a^b (F_x dx + F_y dy). \quad (7-10b)$$

Całki występujące w równaniach (7-10a) i (7-10b) nazywamy *całkami krzywoliniowymi*.

Przykład 3. Jako przykład, w którym mamy do czynienia z siłą zmienną, rozważmy punkt materialny o masie m zawieszony na nieważkiej nici o długości l . Jest to tzw. wahadło proste albo matematyczne. Przemieścimy ten punkt po drodze kołowej o promieniu l od położenia, w którym kąt $\varphi = 0$, do położenia $\varphi = \varphi_0$, przykładając do niego pewną, stałe *poziomą*, siłę. Możemy na przykład ciągnąć poziomo za sznurek przyczepiony do tego punktu materialnego. W kierunku pionowym punkt ten przemieści się wówczas na odległość h . Na rysunku 7-8a przedstawiono omówioną sytuację, a na rysunku 7-8b pokazano siły działające na punkt materialny, w pewnym dowolnie wybranym położeniu φ . Siłami tymi są: przyłożona siła F , naprężenie linki T oraz ciężar punktu materialnego mg .



Rys. 7-8. (a) Wahadło matematyczne. Punktowa masa m wisi na lince o długości l . Maksymalne wychylenie masy jest równe φ_0 . (b) Siły działające na masę m poddane działaniu poziomej siły F

Podobnie jak poprzednio (i z tych samych powodów) zakładamy, że nie ma przyspieszenia, co oznacza w praktyce, że ruch musi odbywać się bardzo wolno. Siła F jest zawsze pozioma, ale kierunek przemieszczenia dr jest styczny do łuku okręgu w każdym punkcie i zależy od wartości kąta φ . Siła F musi zmieniać swoją wartość w taki sposób, aby mogła ona równoważyć poziomą składową naprężenia linki. Zauważmy, że w rozważanym przypadku kąt pomiędzy F i dr jest równy kątowemu przemieszczeniu punktu φ .

Praca wykonana przez siłę $\mathbf{F}$ przy przemieszczeniu masy m z położenia $\varphi = 0$ do położenia $\varphi = \varphi_0$ wynosi

$$W = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0} F \cos \varphi dr \quad (7-10a)$$

lub

$$W = \int_{x=0, y=0}^{x=(l-h)\operatorname{tg}\varphi_0, y=h} (F_x dx + F_y dy). \quad (7-10b)$$

Obliczamy całkę występującą w równaniu (7-10b).

Zauważmy, że na podstawie pierwszej zasady Newtona (rys. 7-8b)

$$F_x = T \sin \varphi \quad \text{ i } \quad mg = T \cos \varphi.$$

Eliminując z tych dwóch równań T otrzymujemy

$$F_x = mg \operatorname{tg} \varphi.$$

Z rysunku 7-8b również wynika, że $F_y = 0$. Podstawiając otrzymane wartości na F_x i F_y do równania (7-10b) mamy

$$W = \int_{x=0, y=0}^{x=(l-h)\operatorname{tg}\varphi_0, y=h} mg \operatorname{tg} \varphi dx.$$

Następnie, z rysunku (7-8a) wynika, że

$$\operatorname{tg} \varphi = dy/dx, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg} \varphi dx = dy.$$

Korzystając z ostatniej zależności oraz z tego, że całka zależy wyłącznie od y , wykonujemy całkowanie otrzymując ostatecznie

$$W = \int_{y=0}^{y=h} mg dy = mg \int_0^h dy = mgh.$$

Czytelnik powinien teraz spróbować obliczyć pracę wykonaną przy przemieszczaniu punktu materialnego wzdłuż łuku, ze stałą prędkością, pod działaniem siły mającej w każdym punkcie kierunek styczny do łuku. W tym przypadku wygodniej będzie posłużyć się równaniem (7-10a), korzystając z faktu, że siła jest zawsze styczna do łuku i przyjmując $dr = l d\varphi$. Otrzymany wynik powinien być taki sam jak poprzednio, $W = mgh$. Zauważmy, że oba te rezultaty są równe pracy, jaką należy wykonać przy podnoszeniu masy m pionowo na wysokość h .

Jaką pracę wykona przy przemieszczaniu punktu materialnego naprężenie linki T ?

7-5. Energia kinetyczna i twierdzenie o pracy i energii

W dotychczasowych przykładach na obliczanie pracy mieliśmy do czynienia z przedmiotami poruszającymi się *bez przyspieszenia*. W takich przypadkach *wypadkowa siła* działająca na przedmiot jest *równa zero*. Teraz przyjmijmy, że *wypadkowa siła* działająca na przedmiot jest *różna od zera*, a więc przedmiot porusza się z *przyspieszeniem*. Jest to przypadek równoważny pod każdym względem przypadkowi, gdy na przedmiot działa pojedyncza, nie zrównoważona siła.

Najprostszy jest przypadek, gdy *wypadkowa siła $\mathbf{F}$ jest stała*. Taka siła działając na punkt materialny o masie m nadaje temu punktowi stałe przyspieszenie $\mathbf{a}$. Załóżmy, że kierunek osi x pokrywa się ze wspólnym kierunkiem siły $\mathbf{F}$ i przyspieszenia $\mathbf{a}$. Jaką pracę wykonuje ta siła przy przemieszczaniu punktu materialnego na odległość x ? Dla (stałego) przyspieszenia mamy zależności

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

oraz

$$x = \frac{v+v_0}{2} t,$$

Są to, odpowiednio, równania (3-12) i (3-14), w których, dla wygody, opuściliśmy indeks x , a w ostatnim równaniu przyjęliśmy $x_0 = 0$. v_0 jest tutaj prędkością punktu materialnego w chwili $t = 0$, a v jego prędkością w chwili t . Wykonana praca jest więc równa

$$W = Fx = max = m \left(\frac{v-v_0}{t} \right) \left(\frac{v+v_0}{2} \right) t = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (7-11)$$

Półowę iloczynu masy ciała przez kwadrat jego prędkości nazywamy energią kinetyczną tego ciała. Jeżeli energię kinetyczną oznaczymy symbolem K , wówczas

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (7-12)$$

Równanie (7-11) możemy teraz sformułować słownie w następujący sposób: *Praca wykonana przez wypadkową siłę F działającą na punkt materialny jest równa zmianie energii kinetycznej tego punktu.*

Mimo że twierdzenie to udowodniliśmy jedynie dla siły stałej, jest ono słuszne zawsze, niezależnie od tego, czy wypadkowa siła jest stała, czy zmienna. Przypuśćmy, na przykład, że wypadkowa siła zmienia się co do wartości (ale nie zmienia swego kierunku) i przyjmijmy, że przemieszczenie odbywa się w kierunku tej siły. Załóżmy ponadto, że kierunek ten pokrywa się z kierunkiem osi x . Praca wykonana przez wypadkową siłę przy przemieszczaniu punktu materialnego z położenia x_0 w położenie x wynosi

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0}^x F dx.$$

Ale z drugiej zasady Newtona, $F = ma$, a przyspieszenie a można zapisać w postaci

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = v \frac{dv}{dx}.$$

Stąd

$$W = \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x mv \frac{dv}{dx} dx = \int_{v_0}^v mv dv = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (7.13)$$

Bardziej ogólny jest przypadek, gdy siła zmienia się zarówno co do wartości, jak i co do kierunku, a ruch odbywa się wzdłuż linii krzywej, jak na rys. 7-7. (Patrz zadanie 8.) W tym przypadku jeszcze raz możemy stwierdzić, że praca wykonana przez siłę wypadkową przy przemieszczaniu punktu materialnego jest równa zmianie energii kinetycznej tego punktu.

Praca wykonana przez wypadkową siłę przy przemieszczaniu punktu materialnego jest zawsze równa zmianie energii kinetycznej tego punktu:

$$W (\text{siły wypadkowej}) = K - K_0 = \Delta K. \quad (7.14)$$

Równanie (7-14) znane jest jako *twierdzenie o pracy i energii**.

* W polskiej literaturze fizycznej nazwa ta nie była dotychczas używana. (Przyp. tłum.)

Zauważmy, że jeśli wartość prędkości punktu materialnego jest stała, nie ma żadnej zmiany energii kinetycznej i praca wykonana przez siłę wypadkową jest równa zeru. W ruchu jednostajnym po okręgu na przykład wartość prędkości punktu jest stała i siła dośrodkowa nie wykonuje żadnej pracy przy przemieszczaniu się tego punktu. Siła tworząca kąt prosty z kierunkiem ruchu zmienia jedynie *kierunek* prędkości, a nigdy nie zmienia jej wartości. Jedynie wówczas, gdy siła *wypadkowa* ma różną od zera składową w kierunku ruchu punktu materialnego, zmienia ona wartość prędkości tego punktu, czyli jego energię kinetyczną. Pracę nad punktem materialnym wykonuje jedynie składowa siły mająca kierunek zgodny z kierunkiem ruchu tego punktu. Jest to zgodne z naszą definicją pracy jako iloczynu skalarnego, ponieważ jedynie składowa siły $\mathbf{F}$ w kierunku $d\mathbf{r}$ daje wkład do wyrażenia $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Jeżeli energia kinetyczna punktu materialnego maleje, praca wykonana przez siłę wypadkową przy przemieszczaniu tego punktu jest ujemna. Przemieszczenie i składowa siły wypadkowej w kierunku ruchu są wówczas skierowane przeciwnie. Praca wykonana *przez* siłę wypadkową przy przemieszczaniu punktu materialnego jest równa pracy, jaką wykonuje ten punkt przeciwko tej sile wziętej ze znakiem minus. Jest to konsekwencją trzeciej zasady dynamiki Newtona. Równanie (7-14) można zinterpretować w następujący sposób: kinetyczna energia punktu materialnego *maleje* o wielkość równą dokładnie pracy, jaką *wykonuje* ten punkt. Mówimy, że ciało znajdujące się w ruchu ma pewną zmagazynowaną energię; wykonując pracę ciało to zmniejsza swą prędkość i traci część tej energii. *Energia kinetyczna ciała znajdującego się w ruchu jest więc równa pracy, jaką może wykonać to ciało, zanim się zatrzyma.* Wynik ten jest słuszny niezależnie od tego, czy przyłożone siły są stałe, czy zmienne.

Jednostki energii kinetycznej i pracy są takie same. Energia kinetyczna, podobnie jak praca, jest wielkością skalarną. Energia kinetyczna zespołu punktów materialnych jest po prostu (algebraiczną) sumą energii kinetycznych poszczególnych punktów.

Przykład 4. Neutron, jedna z cząstek tworzących jądro, przebiega między dwoma punktami odległymi od siebie o 6,0 m, w czasie $1,8 \cdot 10^{-4}$ s. Znaleźć jego energię kinetyczną zakładając, że prędkość neutronu jest stała. Masa neutronu wynosi $1,7 \cdot 10^{-27}$ kg.

Prędkość znajdujemy z wzoru

$$v = \frac{d}{t} = \frac{6 \text{ m}}{1,8 \cdot 10^{-4} \text{ s}} = 3,3 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

Energia kinetyczna jest równa

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) (3,3 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2 = 9,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Dla celów fizyki jądrowej dżul [J] jest zbyt dużą jednostką. Jednostką częściej używaną jest *elektronowolt* [eV], równy $1,60 \cdot 10^{-19}$ J. Energia kinetyczna neutronu w naszym przykładzie, wyrażona w elektronowoltach, wynosi

$$K = 9,3 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 5,8 \text{ eV}.$$

Przykład 5. Załóżmy, że dla małych odległości nad powierzchnią Ziemi siła grawitacyjna jest stała. Z wysokości h nad tą powierzchnią upuszczono ciało, w chwili początkowej znajdujące się w spoczynku. Jaka będzie energia kinetyczna tego ciała tuż przed uderzeniem w Ziemię? Przyrost energii kinetycznej ciała równy jest pracy wykonanej przez siłę wypadkową, która w tym wypadku jest siłą grawitacyjną. Siła ta jest stała i skierowana wzdłuż kierunku ruchu, wobec czego wykonana praca wynosi

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = mgh.$$

Prędkość początkowa ciała $v_0 = 0$, a prędkość końcowa wynosi v . Energia kinetyczna nabyta przez ciało jest równa

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - 0.$$

Przyrównując te dwa równoważne sobie wyrazy otrzymujemy

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = mgh.$$

Jest to energia kinetyczna, jaką ma ciało tuż przed uderzeniem w ziemię.

Prędkość tego ciała jest wówczas równa

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Czytelnik powinien pokazać, że przy spadku z wysokości h_1 na wysokość h_2 energia ciała wzrasta od wartości $\frac{1}{2}mv_1^2$, do wartości $\frac{1}{2}mv_2^2$, przy czym

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mg(h_1 - h_2).$$

W powyższym przykładzie mieliśmy do czynienia ze stałą siłą i stałym przyspieszeniem. Możemy tutaj zastosować również metody omówione w poprzednim paragrafie. Czy potrafisz pokazać, w jaki sposób wyniki otrzymane z rozważań energetycznych można wyprowadzić na podstawie zasad dynamiki dla ciał poruszających się ruchem jednostajnie przyspieszonym?

Przykład 6. Kłosek ważący 4 kG ślizga się po gładkim, poziomym stole z prędkością 2 m/s. Napotkawszy na swojej drodze sprężynę kłosek ten ścisną ją i zatrzymuje się. O ile zostanie ściśnięta sprężyna, jeśli jej współczynnik sprężystości wynosi 1,6 kg/m?

Energia kinetyczna klocka jest równa

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{g} \right) v^2.$$

Energia ta jest równa pracy, jaką wykona kłosek, zanim zostanie zatrzymany. Praca wykonana przy ściśnięciu sprężyny o x w stosunku do jej normalnej długości wynosi

$$W = \frac{1}{2}kx^2,$$

wobec czego

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \frac{w}{g} v^2,$$

skąd

$$x = \sqrt{\frac{w}{gk}} \quad v = \sqrt{\frac{8,0}{9,8 \cdot 1,6}} \quad 2,0 \text{ m} = 1,4 \text{ m}.$$

7-6. Znaczenie twierdzenia o pracy i energii

Twierdzenie o pracy i energii nie jest nowym, niezależnym prawem mechaniki klasycznej. Po prostu *zdefiniowaliśmy* pracę i energię kinetyczną oraz *wyprowadziliśmy* zależność między tymi wielkościami korzystając bezpośrednio z drugiej zasady Newtona. Twierdzenie o pracy i energii jest jednak bardzo pożyteczne przy rozwiązywaniu zagadnień, w których łatwo można obliczyć pracę wykonaną przez siłę wypadkową i w których chcemy znaleźć prędkość punktu materialnego w jakimś położeniu. Jeszcze większe znaczenie ma fakt, że twierdzenie to może posłużyć jako punkt wyjścia do bardzo szerokich uogólnień, mających duże znaczenie dla fizyki. Podkreślaliśmy już, że twierdzenie o pracy i energii jest ważne, jeśli W interpretujemy jako pracę wykonaną przez siłę *wypadkową* działającą na punkt materialny. W wielu zagadnieniach jednakże wygodniej jest obliczać prace wykonane przez poszczególne rodzaje sił i nadawać tym pracom specjalne nazwy. Pozwoli to na wprowadzenie pojęć różnych rodzajów energii i sformułowanie zasady zachowania energii, która będzie tematem następnego rozdziału.

7-7. Moc

Rozważmy teraz czas, w jakim wykonywana jest praca. Przy podnoszeniu określonego ciała na określoną wysokość trzeba zawsze wykonać taką samą pracę niezależnie od tego, czy czynność ta trwała jedną sekundę, czy jeden rok. Często jednakże bardziej interesuje nas *szybkość wykonywania pracy* niż całkowita praca wykonana.

Szybkość wykonywania pracy jest to *moc*. Średnia moc dostarczana przez jakieś urządzenie jest równa całkowitej pracy wykonanej przez to urządzenie podzielonej przez całkowity przedział czasu, czyli

$$\bar{P} = W/t.$$

Moc chwilowa dostarczana przez to urządzenie wynosi

$$P = dW/dt. \quad (7-15)$$

Gdy moc jest stała w czasie, wówczas $P = \bar{P}$ i

$$W = Pt.$$

W układzie SI jednostką mocy jest 1 J/s, nazywany *watem* [1 W]. Nazwa tej jednostki pochodzi od nazwiska Jamesa Watta, który zasadniczo udoskonalił maszynę parową jego czasów, co utorowało drogę dzisiejszym, bardziej wydajnym maszynom parowym. Ponieważ jednostka ta jest zbyt mała dla celów praktycznych, wprowadzono również większą jednostkę, nazywaną *koniem mechanicznym* [KM]. Podobną jednostkę, równą mocy, którą jest zdolny wydatkować koń chciał wprowadzić sam Watt. Jeden koń mechaniczny jest równy około 736 W, czyli w przybliżeniu trzy czwarte kilowata [3/4 kW]. Prawdziwy koń nie zdołałby długo wydatkować takiej mocy.

Pracę można także wyrażać w jednostkach $\text{moc} \cdot \text{czas}$. Stąd pochodzi na przykład wyrażenie *kilowatogodzina* [kWh]. Jedna kilowatogodzina jest równa pracy, jaką wykona w ciągu 1 godziny urządzenie o mocy 1 kW.

Przykład 7. Samochód, którego silnik dostarcza moc równą 100 kW, jedzie z prędkością 90 km/h (= 25 m/s). Czemu równa jest siła ciągu silnika?

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}}{t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Siła ciągu $\mathbf{F}$ ma kierunek taki jak kierunek ruchu, czyli prędkość $\mathbf{v}$, wobec tego

$$P = Fv$$

oraz

$$F = \frac{P}{v} = \frac{100 \text{ KM}}{25 \text{ m/s}} \cdot \frac{736 \text{ W}}{1 \text{ KM}} \cdot \frac{1 \text{ N} \cdot \text{m}}{1 \text{ J}} = 2944 \text{ N}.$$

Dlaczego samochód nie jedzie ruchem przyspieszonym?

Pytania

1. Czy istnieją jakieś słowa, które, podobnie jak słowo „praca”, mają inne znaczenie w języku potocznym, a inne w nauce?

2. Przypuśćmy, że na punkt materialny przemieszczający się z jednego miejsca na drugie działają trzy stałe siły. Czy praca, jaką wykonuje wypadkowa tych sił, jest równa sumie prac wykonanych przez każdą siłę z osobna?

3. Równia pochyła (patrz przykład 1) jest to maszyna prosta, pozwalająca wykonać pracę przy użyciu siły mniejszej niż siła, którą trzeba by użyć bez pomocy równi. To samo można powiedzieć o klinie, dźwigni,

śrubie, kole zębatym i krążku. Czy przy pomocy tych maszyn można zmniejszyć ilość pracy, jaką należy wykonać?

4. Podczas zawodów polegających na „przeciąganiu liny” jedna z drużyn jest powoli przeciągana przez drugą. Jaka praca zostaje przy tym wykonana i przez kogo?

5. Czy praca wykonywana przez siły tarcia jest zawsze ujemna? Wyjaśnić to.

6. Człowiek wywiera stałą siłę na nieruchomą ścianę i nie wykonuje mechanicznej pracy. Dlaczego więc jest zmęczony?

7. Człowiek podnosi kulę do gry w kręgle z podłogi i kładzie ją na stole. Na kulę działają dwie siły: jej ciężar $-mg$ i siła, którą działał człowiek $+mg$. Obie te siły równoważą się i wydawałoby się, że nie została wykonana żadna praca. Z drugiej strony wiemy, że człowiek wykonał nad kulą jakąś pracę. Co jest nie w porządku?

8. Sprężynę przecięto na pół. Jaki jest stosunek między stałą k całej sprężyny a stałą k jednej z otrzymanych połówek?

9. Mamy dwie sprężyny identyczne pod każdym względem, z wyjątkiem tego, że jedna z nich jest sztywniejsza od drugiej, tzn. $k_A > k_B$. Sprężyny te zostały rozciągnięte: (a) o tę samą długość i (b) z taką samą siłą. Przy rozciąganiu której z tych sprężyn w każdym z tych przypadków należało wykonać większą pracę?

10. Czy energia kinetyczna uzależniona jest od kierunku ruchu? Czy może być ujemna?

11. Praca wykonana przez siłę wypadkową jest zawsze równa zmianie energii kinetycznej ciała. Czy może się zdarzyć, że praca wykonana przez którąś z sił składowych będzie większa od tej zmiany energii? Jeśli tak, podać jakieś przykłady?

12. Człowiek wyrzuca piłkę pionowo do góry i łapie ją. Co na podstawie twierdzenia o pracy i energii można jakościowo powiedzieć o swobodnym locie w rozpatrywanym przypadku? Odpowiedzieć na pytanie najpierw pomijając opór powietrza, następnie biorąc go pod uwagę.

13. Dwoje dzieci bawi się na platformie pociągu rzucając do siebie piłkę. Czy energia kinetyczna tej piłki zależy od prędkości pociągu? Czy wybór układu odniesienia ma jakiś wpływ na Twoją odpowiedź? Jeśli tak, to czy można uważać, że energia kinetyczna jest wielkością skalarną? (Patrz zad. 21.)

14. Czy praca wykonana nad punktem materialnym przez siłę wypadkową zależy od (inercjalnego) układu odniesienia obserwatora? Czy zmiana energii kinetycznej także jest uzależniona od tego układu odniesienia?

15. Mężczyzna płynący łodzią wiosłową w górę strumienia spoczywa względem brzegu. (a) Czy wykonuje on jakąś pracę? (b) Mężczyzna przestaje wiosłować i pozwala znieść się prądowi w dół strumienia. Czy w tym wypadku jest wykonywana jakakolwiek praca?

16. Czy moc potrzebna do podniesienia pudła na platformę zależy od szybkości podnoszenia?

17. Człowiek przenosi parę książek z jednej półki bibliotecznej na półkę wyższą w czasie t . Czy praca, jaką wykonuje, zależy od (a) masy książek, (b) ciężaru książek, (c) wysokości, na której znajduje się półka wyższa, (d) czasu t i (e) sposobu przenoszenia: prosto w górę lub po pewnej krzywej w górę.

18. Słyszysz się wiele o „kryzysie energetycznym”. Czy nie byłoby lepiej sprecyzowane wyrażenie „kryzys mocy”?

Zadania

Paragraf 7-2

1. Mężczyzna pcha ciało o ciężarze 270 N po poziomej podłodze, siłą skierowaną w dół pod kątem 45° do poziomu, przesuwając go ze stałą prędkością na odległość 9,1 m. Jaką pracę wykonuje on przy tym, jeśli współczynnik tarcia kinetycznego wynosi 0,20?

Odp.: 610 J.

2. Blok o masie $m = 3,57$ kg został przesunięty ze stałą prędkością po poziomej podłodze, na odległość $d = 4,06$ m, przy pomocy liny wywierającej na ten blok siłę $F = 7,68$ N i tworzącej z poziomem kąt $\theta = 15,0^\circ$. Obliczyć (a) całkowitą pracę wykonaną przy przesuwaniu bloku; (b) pracę wykonaną przez linę; (c) pracę wykonaną przez siłę tarcia; (d) współczynnik tarcia kinetycznego między blokiem i podłogą.

3. Blok lodu ważący 50 kG ześlizguje się po równi pochyłej mającej długość 1,5 m i wysokość 0,9 m. Mężczyzna pcha ten lód siłą równoległą do równi w ten sposób, że prędkość ześlizgiwania się lodu jest stała. Współczynnik tarcia między powierzchnią równi i lodem wynosi 0,10. Znaleźć: (a) Siłę wywieraną przez mężczyznę na blok, (b) pracę wykonaną przez mężczyznę, (c) pracę wykonaną przez siłę grawitacyjną,

(d) pracę wykonaną przez siłę, jaką powierzchnia działa na blok, (e) pracę wykonaną przez siłę wypadkową, przy przemieszczaniu bloku, oraz (f) zmianę energii kinetycznej bloku.

Odp.: (a) 26 kG; (b) $-352,4 \text{ J}$; (c) 406 J; (d) $-54,2 \text{ J}$; (e) zero; (f) zero.

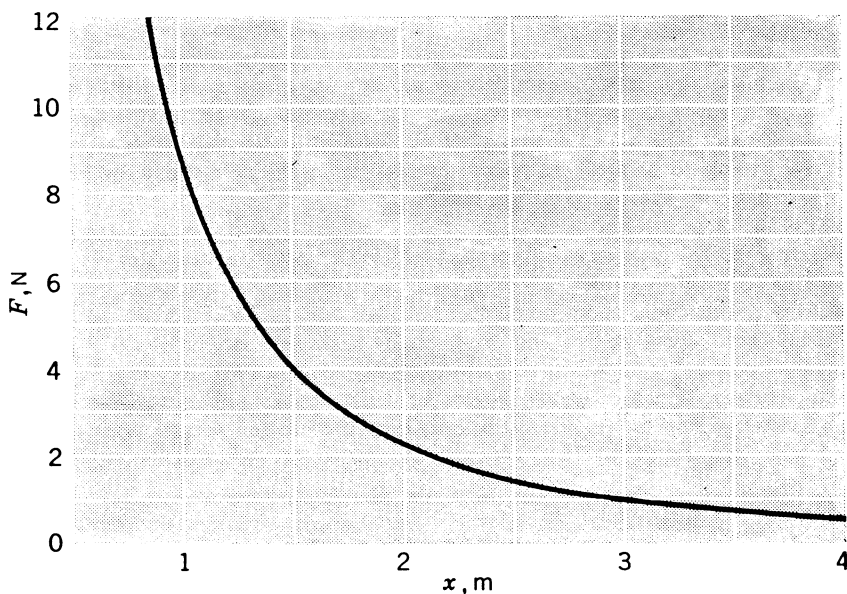
4. Skrzynię o ciężarze 250 kG (2200 N) wiszącą na linie o długości 12 m odchyłono w bok na odległość 1,2 m od pionu. (a) Jaką siłą o kierunku stycznym do łuku należy działać na skrzynię, aby mogła ona pozostać w tej pozycji? (b) Czy podczas podtrzymywania skrzyni jest wykonywana jakaś praca? (c) Czy w czasie odchyłania skrzyni od pionu była wykonywana jakaś praca? Jeśli tak, to jaka? (d) Czy naprężenie liny wykonuje jakąś pracę?

5. Ciało o masie M wiszące na linie spuszczaemy z wysokości d pionowo w dół ze stałym skierowanym do dołu przyspieszeniem, równym $g/4$. Znaleźć pracę wykonaną przez linę.

Odp.: $-3Mgd/4$.

Paragraf 7-3

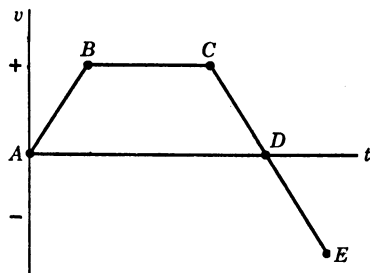
6. (a) Ocenić, jaką pracę wykonuje siła przedstawiona na wykresie (rys. 7-9) przy przemieszczaniu punktu materialnego z położenia $x = 1 \text{ m}$ do położenia $x = 3 \text{ m}$. Postarać się jak najdokładniej ocenić tę pracę i porównać otrzymany wynik z prawdziwą wartością wynoszącą 6 J. (b) Analitycznie, krzywa jest określona wzorem $F = a/x^2$, gdzie $a = 9 \text{ N} \cdot \text{m}^2$. Obliczyć wykonaną pracę przy pomocy całkowania.



Rys. 7-9. Zadanie 6

7. Na ciało poruszające się ruchem prostoliniowym działa pojedyncza siła. Na rysunku 7-10 podany jest wykres prędkości tego ciała w funkcji czasu. Określić, jaki znak (dodatni czy ujemny) ma praca wykonywana przez tę siłę, w każdym z wskazanych przedziałów czasu AB, BC, CD, i DE.

Odp.: AB, BC, CD, DE
+ 0 - +



Rys. 7-10. Zadanie 7

Paragraf 7-4

8. Jeśli siła F zmienia się zarówno co do kierunku, jak i co do wartości, i ruch odbywa się wzdłuż linii krzywej, pracę wykonaną przez tę siłę obliczamy całkując wzdłuż tej krzywej wyrażenie $dW = F \cdot dr$. Zauważmy, że zarówno F , jak i φ , kąt pomiędzy F i dr , mogą zmieniać się od punktu do punktu (patrz rys. 7-7). Wykazać, że dla ruchu dwuwymiarowego i trójwymiarowego

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

gdzie v jest prędkością końcową, a v_0 — początkową.

Paragraf 7-5

9. Z jakiej wysokości musiałby spaść samochód, aby nabyć energię kinetyczną równą energii, jaką ma on jadąc z prędkością 97 km/h?

Odp.: 37 m.

10. Biegający mężczyzna ma energię kinetyczną równą połowie energii kinetycznej chłopca, który ma masę dwa razy mniejszą od niego. Mężczyzna zwiększa swoją prędkość o 1 m/s i wówczas osiąga tę samą energię kinetyczną co chłopiec. Jaka była początkowa prędkość (a) mężczyzny, (b) chłopca?

11. Jeżeli rakieta Saturn V o masie $2,9 \cdot 10^5$ kg (ciężar $mg = 2,9 \cdot 10^5$ kG) ze statkiem kosmicznym Apollo musi osiągnąć II prędkość kosmiczną, 11,2 km/s, w pobliżu powierzchni Ziemi, to ile energii musi zawierać paliwo? Czy układ rzeczywiście potrzebuje tyle energii, czy potrzebuje jej więcej? Dlaczego?

Odp.: $1,8 \cdot 10^{13}$ J.

12. Proton, początkowo spoczywający nabywa wskutek przyspieszenia w cyklotronie prędkość końcową $3,0 \cdot 10^7$ m/s (równą około 1/10 prędkości światła). Jaką pracę, w elektronowoltach wykonują przy tym siły elektryczne działające na ten proton? [$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J].

13. Pocisk o masie 30 g i prędkości początkowej 500 m/s wbija się w drewniany blok na głębokość 12 cm. Jaką średnią siłę wywiera on na ten blok?

Odp.: $3,1 \cdot 10^4$ N.

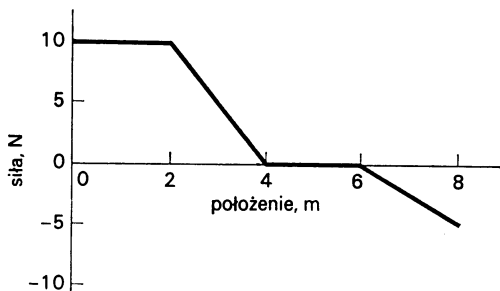
14. W grze w baseball gracz rzuca piłkę ważącą 0,25 kG z prędkością początkową 18 m/s. Inny gracz łapie tę piłkę, na tej samej wysokości, przy czym prędkość jej jest zmniejszona do 12 m/s. Jaką pracę wykona piłka przy pokonywaniu oporu powietrza?

15. Proton (jądro atomu wodoru) jest przyspieszany w akceleratorze liniowym. W każdym stopniu tego akceleratora porusza się on wzdłuż linii prostej z przyspieszeniem $3,6 \cdot 10^{15}$ m/s². Prędkość protonu na początku pierwszego stopnia, mającego długość 3,5 cm, wynosi $2,4 \cdot 10^7$ m/s. Obliczyć: (a) prędkość protonu na końcu tego stopnia i (b) przyrost energii kinetycznej protonu wskutek przyspieszania. Przyjąć, że masa protonu wynosi $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg i wyrazić otrzymaną energię w elektronowoltach eV. [$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J].

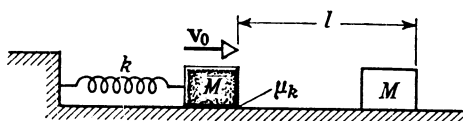
Odp.: (a) $2,9 \cdot 10^7$ m/s, (b) $1,3 \cdot 10^6$ eV.

16. Pokazać, na podstawie rozważań energetycznych, przyjmując, że kierowca naciska hamulec, że minimalna odległość, na jakiej może zatrzymać się samochód o masie m , jadący po poziomej drodze z prędkością v wynosi $v^2/2\mu_k g$, gdzie μ_k jest współczynnikiem tarcia kinetycznego między oponami i drogą. (Patrz: przykład 2, rozdział 6 i pytania 3, 4, 5, rozdział 8.)

17. Blok 5 kG przesuwa się w linii prostej po poziomej, idealnie gładkiej powierzchni pod wpływem siły, która zmienia się wraz ze zmianą położenia jak na rys. 7-11. (a) Ile pracy wykonuje siła, gdy blok



Rys. 7-11. Zadanie 17



Rys. 7-12. Zadanie 19

przesuwa się z początku układu do $x = 8$ m? (b) Jeżeli prędkość punktu materialnego przechodzącego przez początek układu wynosi 4 m/s, z jaką prędkością przechodzi on w punkcie $x = 8$ m?

Odp.: (a) 25 J, (b) 5,1 m/s.

18. Z pomocą helikoptera należy podnieść astronautę o wadze 710 N na wysokość 15 m nad powierzchnię oceanu na spuszczonej kabl. Przyspieszenie astronauty wynosi $g/10$ (a) Ile pracy musi wykonać helikopter nad astronautą? (b) Ile pracy wykonuje nad astronautą siła ciężkości? (c) Z jaką prędkością astronauta osiągnął helikopter?

19. Kłosek o masie M , pokazany na rys. 7-12, ma w chwili początkowej prędkość v_0 skierowaną w prawo i zajmuje takie położenie, że sprężyna nie wywiera na niego żadnej siły, tzn. nie jest ani rozciągnięta, ani ściśnięta. Kłosek ten przesuwają się w prawo na odległość l i zatrzymuje się w pozycji przedstawionej na rysunku pustym prostokątem. Współczynnik sprężystości sprężyny wynosi k , a współczynnik tarcia kinetycznego między kłosem i stołem jest równy μ_k . (a) Jaką pracę wykonuje siła tarcia? (b) Jaką pracę wykonuje siła sprężysta? (c) Czy jakieś inne siły działają na kłosek; jeśli tak, to jaką pracę one wykonują? (d) Czemu równa jest całkowita praca wykonana przy przemieszczaniu kłosa? (e) Korzystając z twierdzenia o pracy i energii znaleźć wartość l i wyrazić ją za pomocą M , v_0 , μ_k , g i k .

Odp.: (a) $-\mu_k Mgl$. (b) $-kl^2/2$. (c) Siła ciężkości i parcie stołu skierowane pionowo, siły te nie wykonują pracy. (d) $-(\mu_k Mgl + kl^2/2)$. (e) $(\sqrt{\mu_k^2 M^2 g^2 + v_0^2 k M} - \mu_k M g)/k$.

20. (a) Masa 0,675 kg poruszająca się ze stałą prędkością po poziomym okręgu na gładkim stole jest przywiązana do sznurka przeciągniętego przez otwór wywiercony w stole i znajdujący się w środku tego okręgu. Znaleźć naprężenie sznurka, jeżeli promień okręgu wynosi 0,500 m, a prędkość jest równa 10,0 m/s. (b) Stwierdzono, że jeżeli wciągnie się pod stół dalsze 0,200 m sznurka, zmniejszając w ten sposób promień okręgu do 0,300 m, to naprężenie sznurka wzrośnie 4,63-krotnie. Obliczyć całkowitą pracę wykonaną przez sznurek podczas zmniejszania promienia obracającej się masy.

21. *Praca i energia kinetyczna w poruszających się układach odniesienia.* Rozważmy dwóch obserwatorów, z których jeden znajduje się w układzie odniesienia związanym z ziemią, a drugi w układzie związanym, powiedzmy, z pociągiem poruszającym się z jednostajną prędkością u względem ziemi. Każdy z nich obserwuje w ciągu czasu t ruch punktu materialnego (początkowo spoczywającego względem pociągu), do którego przyłożona jest stała siła nadająca mu przyspieszenie w kierunku ruchu pociągu. (a) Pokazać, że dla każdego z obserwatorów praca wykonana przez tę siłę jest równa przyrostowi energii kinetycznej punktu, ale jej wartość liczbową zmierzona przez jednego obserwatora wynosi $\frac{1}{2}ma^2t^2$, a zmierzona przez drugiego obserwatora $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut$, gdzie a jest wspólnym dla obu obserwatorów przyspieszeniem punktu materialnego, a m masą tego punktu. (b) Wyjaśnić otrzymaną różnicę wartości prac wykonanych przez tę samą siłę, korzystając z faktu, że odległości, na jakich każdy z obserwatorów mierzy pracę wykonaną przez tę siłę w czasie t , są różne. Wyjaśnić otrzymaną różnicę wartości energii kinetycznych zmierzonych przez każdego z obserwatorów, obliczając pracę, jaką musi wykonać punkt materialny w każdym z układów odniesienia, aby mógł się zatrzymać.

Paragraf 7-7

22. Kobieta o wadze 570 N biegnie po schodach do góry, wznosząc się o 4,3 m co 3,5 s. Jaką średnią moc musi zużywać?

23. Co sekundę z progu wodnego o wysokości 100 m spada 1200 m³ wody. Przyjmując, że 3/4 energii kinetycznej uzyskanej przy spadaniu zmienia się w generatorze hydroelektrycznym w energię elektryczną, jaka jest moc tego generatora?

Odp.: $8,8 \cdot 10^5$ kW.

24. Załadowana kabina windy ma masę $3 \cdot 10^3$ kg i jedzie 200 m do góry w czasie 20 s. Jaką przeciętną pracę na jednostkę czasu wykonuje lina unosząca windę do góry?

25. Wóz ciągnięty przez konia siłą 20 kG, skierowaną pod kątem 30° do poziomu, jedzie z prędkością 9 km/h. (a) Jaką pracę wykona koń w ciągu 10 min? (b) Jaka jest moc wywołana przez konia?

Odp.: (a) $2,44 \cdot 10^5$ J; (b) 412,5 W.

26. Jaką mocą pracuje szlifierka, której koło o promieniu 20 cm obraca się z prędkością 2,5 obr/s, jeśli ostrzony przedmiot jest przyciskany do koła siłą równą 20 kG? Współczynnik tarcia między przedmiotem i kołem wynosi 0,32.

27. Rakieta ważąca 50 000 kG osiąga prędkość 6000 km/h w ciągu 1 min po wystrzeleniu. (a) Jaka

jest jej energia kinetyczna na końcu tej pierwszej minuty? (b) Jaka jest średnia moc wywołana w tym okresie? Siły tarcia i siłę grawitacyjną pomijamy.

Odpo.: (a) $7,32 \cdot 10^{10}$ J; (b) 1200 MW.

28. Na ciało o masie 15 kg, w chwili początkowej znajdujące się w spoczynku, działa wypadkowa siła równa 5,0 N. Obliczyć (a) pracę wykonaną przez tę siłę w ciągu pierwszej, drugiej i trzeciej sekundy oraz (b) chwilową moc na końcu trzeciej sekundy.

29. Siła działa na 3 kG punkt materialny w taki sposób, że położenie punktu materialnego jest funkcją czasu daną przez $x = 3t - 4t^2 + t^3$, gdzie x dany jest w metrach, a t w sekundach. (a) Znaleźć pracę, jaką wykonuje siła podczas pierwszych 4 sekund. (b) Z jaką szybkością chwilową siła wykonuje pracę nad punktem materialnym w chwili $t = 1$ s.

Odpo.: (a) 530 J. (b) 12 W.

30. Siła potrzebna do holowania łodzi ze stałą prędkością jest proporcjonalna do tej prędkości. Jaka moc jest potrzebna do holowania łodzi ze stałą prędkością, równą 12 km/h, jeśli przy holowaniu tej łodzi z prędkością 4 km/h potrzebna jest moc równa 10 KM (7360 W).

31. Ciało o masie m , początkowo spoczywające, porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym i nabywa prędkość v_k w ciągu czasu t_k . (a) Pokazać, że wykonana przy tym praca, wyrażona przez v_k i t_k jako funkcja czasu t , dana jest wzorem

$$\frac{1}{2} m \frac{v_k^2}{t_k^2} t^2.$$

(b) Jaka jest chwilowa moc dostarczana do ciała jako funkcja czasu t ? (c) Jaka jest chwilowa moc dostarczana do ciała o masie 1600 kg, po upływie 5 s, jeśli ciało to zwiększa swą prędkość o 90 km/h w ciągu 10 s.

Odpo.: (b) $mv_k^2 t/t_k^2$; (c) 52,5 kW.

32. Samochód ciężarowy może wjeżdżać pod górę, po drodze, której nachylenie wynosi 0,3 m na 15 m, z prędkością 24 km/h. Siła oporu równa jest $1/25$ ciężaru samochodu. Z jaką prędkością będzie zjeżdżał ten samochód z tej samej góry, przy tej samej mocy silnika?

33. Lokomotywa kolejowa o mocy $1,5 \cdot 10^6$ W przyspiesza pociąg z prędkości 10 m/s do 25 m/s w ciągu 6 minut przy użyciu całej swej mocy. (a) Pomijając tarcie, obliczyć masę pociągu. (b) Znaleźć prędkość pociągu jako funkcję czasu w danym przedziale. (c) Znaleźć siłę przyspieszającą pociąg jako funkcję czasu w danym przedziale. (d) Znaleźć odległość jaką przebywa pociąg w tym przedziale czasu.

Odpo.: (a) $2,1 \cdot 10^6$ kg; (b) $\sqrt{100+1,4}$ m/s; (c) $1,5 \cdot 10^6/\sqrt{100+1,47} t$ N; (d) 6,9 km.