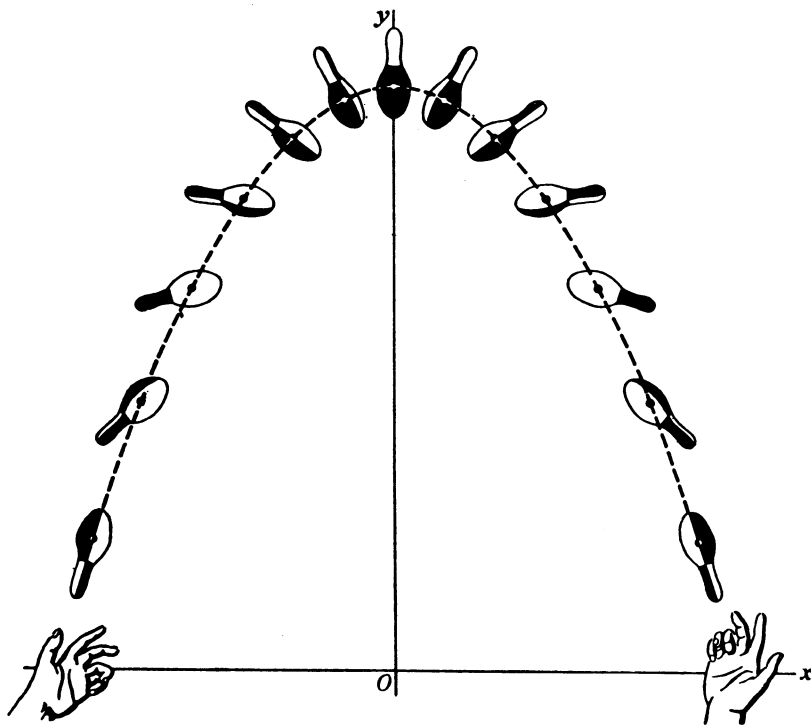


9. Zasada zachowania pędu

9-1. Środek masy

Dotychczas przedmioty traktowaliśmy jako punkty materialne, tzn. cząstki bezwymiarowe, obdarzone masą. W ruchu postępowym każdy punkt ciała doznaje tych samych przemieszczeń w miarę upływu czasu, tak więc ruch jednego punktu odzwierciedla ruch całego ciała. Nawet wówczas, gdy ciało wiruje lub drga, istnieje w tym ciele punkt, zwany *środkiem masy*, który porusza się w taki sam sposób, w jaki poruszałby się pojedynczy punkt materialny poddany tym samym siłom zewnętrznym. Rysunek 9-1 przedstawia prosty



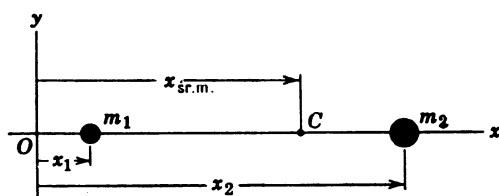
Rys. 9-1. Maczuga gimnastyczna została rzucona przez jedną osobę do drugiej. Maczuga wykonuje skomplikowane ruchy obrotowe, ale mimo to można znaleźć na jej osi taki punkt, zwany *środkiem masy*, który porusza się po paraboli

paraboliczny ruch środka masy maczugi indiańskiej rzuconej przez jedną osobę do drugiej, żaden inny punkt maczugi nie porusza się w taki prosty sposób. Zauważmy, że gdyby maczuga poruszała się czystym ruchem postępowym (zob. rys. 3-1), wtedy *każdy* jej punkt doznawałby takich samych przemieszczeń, jak środek masy na rys. 9-1. Z tej przyczyny ruch środka masy ciała zwany jest ruchem postępowym tego ciała.

Jeżeli układ, którym się zajmujemy, nie jest ciałem sztywnym, to daje się w nim wyznaczyć środek masy, którego ruch również może być opisany w stosunkowo prosty sposób. Jest to możliwe nawet wtedy, gdy cząstki, z których zbudowany jest układ, mogą podczas jego ruchu zmieniać swoje wzajemne położenie w stosunkowo skomplikowany sposób. W tym paragrafie zdefiniujemy środek masy i pokażemy, jak się oblicza jego położenie, w następnym — omówimy te właściwości, które czynią środek masy przydatnym w opisie ruchu przedmiotów rozciągliwych i układów punktów materialnych.

Rozważmy najpierw prosty przypadek układu złożonego z dwóch punktów materialnych o masach m_1 i m_2 , znajdujących się w punktach x_1 i x_2 względem początku O pewnego układu odniesienia. Definiujemy pewien punkt C , środek masy tego układu, podając odległość $x_{\text{śr.m.}}$ od punktu O :

$$x_{\text{śr.m.}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (9-1)$$



Rys. 9-2. Środek masy dwóch mas m_1 i m_2 leży na prostej łączącej m_1 i m_2 w punkcie C , w odległości $x_{\text{śr.m.}}$ od początku układu

Punkt ten (rys. 9-2) ma tę właściwość, że iloczyn całkowitej masy układu $M (= m_1 + m_2)$ przez odległość tego punktu od początku układu odniesienia równy jest sumie iloczynów masy każdego punktu materialnego przez jego odległość od punktu O , czyli

$$(m_1 + m_2) x_{\text{śr.m.}} = M x_{\text{śr.m.}} = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

W równaniu (9-1) $x_{\text{śr.m.}}$ możemy traktować jako *średnią ważoną* x_1 i x_2 .

Pewna analogia może nam pomóc zrozumieć to nowe pojęcie. Przypuśćmy np., że mamy dwie skrzynki gwoździ. W pierwszej jest n_1 gwoździ o długości l_1 , a w drugiej jest n_2 gwoździ o długości l_2 . Chcemy znać średnią długość tych gwoździ. Gdy $n_1 = n_2$, wtedy średnia długość wynosi po prostu $\frac{1}{2}(l_1 + l_2)$. Gdy $n_1 \neq n_2$, musimy uwzględnić fakt, że gwoździe jednej długości są liczniej reprezentowane niż drugiej. Uwzględniamy to przy pomocy czynnika „wagowego” dla każdej długości. Dla długości l_1 czynnikiem tym jest $n_1/(n_1 + n_2)$, a dla długości l_2 wynosi on $n_2/(n_1 + n_2)$, czyli jest to ułamek całkowitej liczby gwoździ w każdej skrzynce. Zatem średnia ważona długości wynosi:

$$\bar{l} = \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} \right) l_1 + \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right) l_2$$

albo

$$\bar{l} = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2}{n_1 + n_2}.$$

Położenie środka masy zdefiniowane równaniem (9-1) jest zatem średnim ważonym przemieszczeniem, przy czym czynnik „wagowy” dla każdego punktu materialnego jest częścią całkowitej masy, odpowiadającą danemu punktowi materialnemu.

Jeżeli mamy n punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$ leżących na linii prostej to — z definicji — położenie środka masy układu tych punktów materialnych względem pewnego odniesienia wynosi:

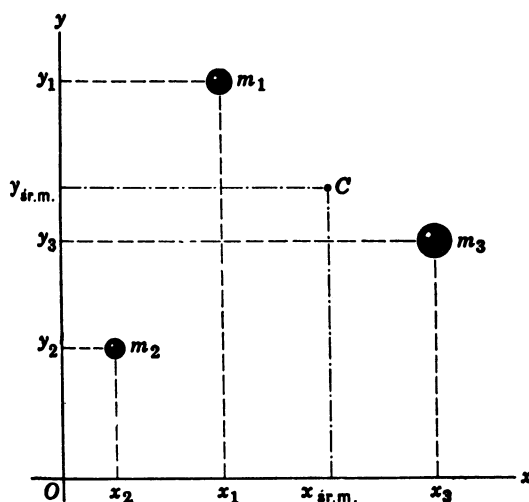
$$x_{\text{śr.m.}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad (9-2)$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n$ są odległościami punktów materialnych od punktu odniesienia, względem którego jest obliczone $x_{\text{śr.m.}}$. Symbol $\sum$ oznacza operację sumowania i w tym przypadku obejmuje wszystkie n punktów. Suma

$$\sum m_i = M$$

jest całkowitą masą układu. Równanie (9-2) możemy napisać jeszcze raz w postaci:

$$M x_{\text{śr.m.}} = \sum m_i x_i. \quad (9-2a)$$



Rys. 9-3. Środek masy trzech punktów materialnych o masach m_1, m_2 i m_3 leży w punkcie C o współrzędnych $x_{\text{śr.m.}}, y_{\text{śr.m.}}$ na płaszczyźnie trójkąta wyznaczonego przez te punkty materialne

Przypuśćmy teraz, że mamy trzy punkty materialne *nie leżące na jednej prostej*. Będą one leżały na pewnej płaszczyźnie, jak na rys. 9-3. Środek masy C jest zdefiniowany i umiejscowiony przez współrzędne $x_{\text{śr.m.}}$ i $y_{\text{śr.m.}}$, gdzie

$$x_{\text{śr.m.}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (9-3)$$

$$y_{\text{śr.m.}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$

x_1, y_1 — współrzędne punktu o masie m_1 ; x_2, y_2 — punktu o masie m_2 ; x_3, y_3 — punktu o masie m_3 . Współrzędne środka masy $x_{\text{śr.m.}}$ i $y_{\text{śr.m.}}$ są mierzone względem pewnego dowolnego punktu odniesienia.

Dla dużej liczby punktów materialnych, leżących na płaszczyźnie, środek masy ma współrzędne $x_{\text{śr.m.}}, y_{\text{śr.m.}}$, zdefiniowane następująco:

$$x_{\text{śr.m.}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i; \quad y_{\text{śr.m.}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i, \quad (9-4)$$

gdzie $M (= \sum m_i)$ jest całkowitą masą układu.

Dla dużej liczby punktów materialnych leżących niekoniecznie na płaszczyźnie, lecz *rozrzuconych w przestrzeni*, środek masy wyznaczają trzy współrzędne $x_{\text{śr.m.}}, y_{\text{śr.m.}}, z_{\text{śr.m.}}$, gdzie

$$x_{\text{śr.m.}} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i; \quad y_{\text{śr.m.}} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i; \quad z_{\text{śr.m.}} = \frac{1}{M} \sum m_i z_i. \quad (9-5a)$$

W zapisie wektorowym każdy punkt materialny układu może być opisany przy pomocy wektora położenia $\mathbf{r}_i$ w określonym układzie odniesienia, a środek masy może być umiejscowiony przy pomocy wektora położenia $\mathbf{r}_{\text{śr.m.}}$. Wektory te są związane z x_i, y_i, z_i oraz z $x_{\text{śr.m.}}, y_{\text{śr.m.}}, z_{\text{śr.m.}}$ (równanie 9-5a) przy pomocy następujących zależności:

$$\mathbf{r}_i = i x_i + j y_i + k z_i$$

oraz

$$\mathbf{r}_{\text{śr.m.}} = i x_{\text{śr.m.}} + j y_{\text{śr.m.}} + k z_{\text{śr.m.}}$$

A zatem trzy równania skalarne [równanie (9-5a)] mogą być zastąpione jednym równaniem wektorowym:

$$\mathbf{r}_{\text{śr.m.}} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r}_i, \quad (9-5b)$$

w którym występuje sumowanie wektorowe. Przez podstawienie wyrażeń na $\mathbf{r}_i$ oraz $\mathbf{r}_{\text{śr.m.}}$ do równania (9-5b) można sprawdzić, że równanie (9-5b) jest prawdziwe. Zwracamy uwagę na zwięźłość wyrażenia, na którą pozwala zastosowanie wektorów. Z równania (9-5b) wynika, że jeżeli początek układu odniesienia znajduje się w środku masy (co oznacza, że $\mathbf{r}_{\text{śr.m.}} = 0$), to $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$.

Równania (9-5) są najbardziej ogólnym wyrażeniem dla układu punktów materialnych. Równania od (9-1) do (9-4) są szczególnymi przypadkami. Położenie środka masy jest niezależne od przyjętego układu współrzędnych (zob. zadanie 1). *Środek masy układu punktów materialnych zależy tylko od mas tych punktów i od ich wzajemnego rozmieszczenia.*

Ciało sztywne, takie jak pręt metrowy, możemy sobie wyobrazić jako układ ściśle upakowanych cząstek. A więc ono również ma jakiś środek masy. Ponieważ liczba cząstek (np. atomów) w ciele jest wielka, a ich wzajemne odległości małe, możemy uważać, że substancja jest w nim rozłożona w sposób ciągły. Aby otrzymać wyrażenie na środek masy dla takiego ciała, zaczniemy je dzielić na n małych elementów o masach Δm_i , umiejscowionych w punktach x_i, y_i, z_i . W przybliżeniu, współrzędne środka masy wyrażają się następująco:

$$x_{\text{śr.m.}} = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}, \quad y_{\text{śr.m.}} = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i}, \quad z_{\text{śr.m.}} = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}.$$

Powiększamy liczbę elementów n do nieskończoności. Im mniejsza będzie masa elementów, a liczba ich większa, tym położenie tych elementów x_i, y_i, z_i będzie dokładniej określone.

Ciało o budowie ciągłej zostaje w ten sposób rozłożone na nieskończenie wielką liczbę nieskończenie małych elementów. Teraz współrzędne środka masy mogą być określone w sposób dokładny:

$$\begin{aligned}x_{\text{śr.m.}} &= \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm, \\y_{\text{śr.m.}} &= \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm, \\z_{\text{śr.m.}} &= \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm.\end{aligned}\quad (9-6a)$$

W tych wyrażeniach dm jest różniczkowym elementem masy w punkcie x, y, z , natomiast $\int dm$ równa się M , gdzie M jest całkowitą masą ciała. Dla ciała o budowie ciągłej stosujemy równanie (9-6a) (całkowanie), a nie równanie (9-5a) (sumowanie).

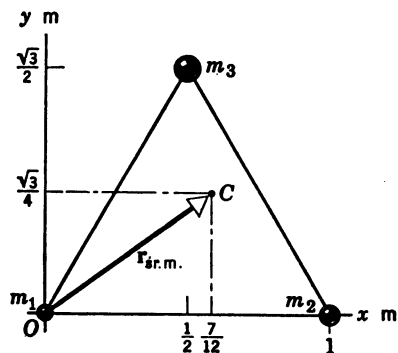
Wyrażenie wektorowe, równoważne trzem równaniom skalarnym (równanie (9-6a)) ma postać:

$$\mathbf{r}_{\text{śr.m.}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm. \quad (9-6b)$$

Tak samo, jak poprzednio, sumowanie [równanie (9-5b)] zostało zastąpione całkowaniem. Widzimy znowu, że jeżeli początek układu odniesienia znajduje się w środku masy (tzn., gdy $\mathbf{r}_{\text{śr.m.}} = 0$), wtedy dla rozpatrywanego ciała $\int \mathbf{r} dm = 0$. Ta całka i odpowiadająca jej suma $\sum m_i \mathbf{r}_i$ z równania (9-5b) jest zwana *pierwszym momentem masy układu*.

Często mamy do czynienia z jednorodnymi układami o elementach symetrii, takich jak: środek, oś albo płaszczyzna. Wówczas środek masy będzie leżał na jednym z elementów symetrii. Na przykład środek masy jednorodnej kuli (która ma środek symetrii) będzie się znajdował w środku tej kuli, środek masy stożka (który ma oś symetrii) będzie leżał na osi tego stożka itd. Że tak jest istotnie, łatwo zrozumieć, ponieważ ze względu na symetrię pierwszy moment masy ($\int \mathbf{r} dm$) jest równy zeru w środku kuli, w jakimś punkcie na osi stożka itd. Z równania (9-6b) wynika, że dla takich punktów $\mathbf{r}_{\text{śr.m.}} = 0$, co oznacza, że środek masy jest umiejscowiony w tych punktach.

Przykład 1. Znaleźć środek masy układu trzech cząstek o masach $m_1 = 1,0$ kg, $m_2 = 2,0$ kg i $m_3 = 3,0$ kg, umieszczonych w rogach równobocznego trójkąta o boku 1,0 m.



Rys. 9-4. Przykład 1. Wyznaczanie środka masy C dla trzech mas znajdujących się w wierzchołkach trójkąta równobocznego

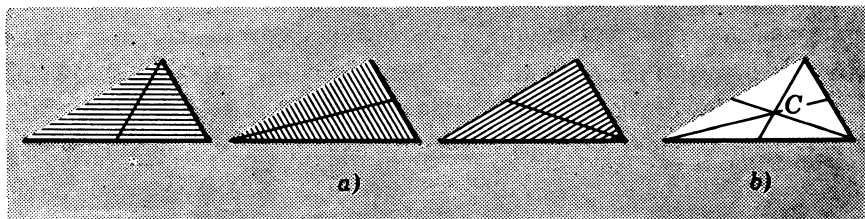
Wybieramy oś x wzdłuż jednego z boków trójkąta, tak jak pokazano na rys. 9-4. Zatem

$$x_{\text{śr. m.}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{1,0 \text{ kg} \cdot 0 + 2,0 \text{ kg} \cdot 1,0 \text{ m} + 3,0 \text{ kg} \cdot \frac{1}{2} \text{ m}}{(1,0 + 2,0 + 3,0) \text{ kg}} = \frac{7}{12} \text{ m},$$

$$y_{\text{śr. m.}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{1,0 \text{ kg} \cdot 0 + 2,0 \text{ kg} \cdot 0 + 3,0 \text{ kg} (\sqrt{3}/2) \text{ m}}{(1,0 + 2,0 + 3,0) \text{ kg}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}.$$

Położenie środka masy C zaznaczono na rysunku. Dlaczego nie jest nim geometryczny środek trójkąta?

Przykład 2. Znaleźć środek masy trójkątnej płyty z rys. 9-5. Jeżeli ciało podzielimy na części tak, że środek masy każdej części jest znany, to zwykle środek masy tego ciała może być znaleziony bardzo prosto. Trójkątna płyta może być podzielona na wąskie pasy równoległe do jednego z boków. Środek masy każdego



Rys. 9-5. Przykład 2. Wyznaczanie środka masy C trójkątnej płyty

pasa leży na odcinku, który łączy środek tego boku z przeciwnym wierzchołkiem. Lecz trójkąt możemy podzielić w trójaki sposób, posługując się każdym z trzech boków. A zatem środek masy leży na przecięciu trzech odcinków, które łączą środek każdego z boków z przeciwnym wierzchołkiem. Jest to jedyny punkt wspólny tych trzech odcinków.

9-2. Ruch środka masy

Obecnie możemy przedyskutować znaczenie fizyczne pojęcia środka masy. Rozważmy ruch układu punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$ i o całkowitej masie M . Na razie zakładamy, że substancja ani nie dopływa do układu, ani go nie opuszcza, tak że całkowita masa tego układu pozostaje stała. W paragrafie 9-7 będziemy rozpatrywali układy, których masa M nie jest stała; jako przykład może służyć rakietą, która w wyniku spalania materiału pędowego wydziela gorące gazy, zmniejszając w ten sposób swoją masę.

Na podstawie równania (9-5b) dla wymienionego układu punktów materialnych, mamy

$$M \mathbf{r}_{\text{śr. m.}} = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n,$$

gdzie $\mathbf{r}_{\text{śr. m.}}$ jest wektorem określającym położenie środka masy w określonym układzie odniesienia. Różniczkując to równanie względem czasu, otrzymujemy

$$M \frac{d\mathbf{r}_{\text{śr. m.}}}{dt} = m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots + m_n \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \quad (9-7)$$

lub

$$M \mathbf{v}_{\text{śr. m.}} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \mathbf{v}_n,$$

gdzie $\mathbf{v}_1$ jest prędkością pierwszego punktu itd., a $d\mathbf{r}_{\text{śr. m.}}/dt (= \mathbf{v}_{\text{śr. m.}})$ jest prędkością środka masy.

Różniczkując równanie (9-7) względem czasu, otrzymujemy

$$M \frac{dv_{\text{śr.m.}}}{dt} = m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} + \dots + m_n \frac{dv_n}{dt} = m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n, \quad (9-8)$$

gdzie a_1 jest przyspieszeniem pierwszego punktu itd., a $dv_{\text{śr.m.}}/dt (= a_{\text{śr.m.}})$ jest przyspieszeniem środka masy układu. Według drugiej zasady Newtona siła F_1 działająca na pierwszy punkt, wyraża się wzorem: $F_1 = m_1 a_1$. Podobnie $F_2 = m_2 a_2$ itd. Zatem możemy zapisać równanie (9-8) w następującej postaci:

$$M a_{\text{śr.m.}} = F_1 + F_2 + \dots + F_n, \quad (9-9)$$

a więc *iloczyn całkowitej masy układu punktów materialnych i przyspieszenia jego środka masy równa się sumie wektorowej wszystkich sił działających na układ.*

Wśród tych wszystkich sił będą występować również siły wewnętrzne, działające między punktami materialnymi. Jednakże z trzeciej zasady Newtona wynika, że siły te będą występować parami równymi co do modułu, lecz o przeciwnych znakach i dlatego nie wniosą one nic do sumy sił; można więc siły wewnętrznych nie brać pod uwagę. Suma po prawej stronie równania (9-9) zawiera tylko siły zewnętrzne, działające na wszystkie punkty materialne. Wobec tego możemy napisać równanie (9-9) w prostszej postaci:

$$M a_{\text{śr.m.}} = F_{\text{zew.}} \quad (9-10)$$

Z równania tego wynika, że *środek masy układu punktów porusza się w taki sposób, jakby cała masa układu była skupiona w środku masy i jakby wszystkie siły zewnętrzne nań działały.*

Podkreślamy, że twierdzenie to obowiązuje dla każdego układu punktów materialnych. Układ może być ciałem sztywnym, w którym punkty mają stałe położenia względem siebie. Może być również zbiorem cząstek, w którym występują wszystkie rodzaje ruchu wewnętrznego. Środek masy każdego układu, niezależnie od tego, jaki jest ten układ, oraz niezależnie od ruchu jego poszczególnych części, porusza się zgodnie z równaniem (9-10).

W poprzednich rozdziałach traktowaliśmy ciała jako punkty materialne, teraz możemy je traktować jako układy punktów materialnych. Ruch postępowy ciała, tzn. ruch jego środka masy, możemy otrzymać zakładając, że cała masa tego ciała jest skupiona w środku masy i wszystkie siły zewnętrzne działają na ten punkt*. Ze sposobu tego korzystamy przy wykreślaniu sił działających na ciało i przy rozwiązywaniu zadań.

Oprócz uzasadnienia i dokładnego omówienia poprzednio poruszonych zagadnień pokazaliśmy, w jaki sposób należy opisać ruch postępowy układu punktów materialnych, jak również ruch postępowy ciała, które jednocześnie może się obracać. W tym i w następnym rozdziale zastosujemy wyniki podanych rozważań do ruchu postępowego. W dalszych rozważaniach zobaczymy, jak upraszczają one analizę ruchu obrotowego.

Przykład 3. Rozważmy trzy punkty materialne o różnych masach, na które działają siły, tak jak na rys. 9-6. Znaleźć przyspieszenie środka masy układu.

Przed wszystkim znajdujemy współrzędne środka masy. Z równania (9-3) mamy

$$x_{\text{śr.m.}} = \frac{8,0 \cdot 4 + 4,0 \cdot (-2) + 4,0 \cdot 1}{16} \text{ m} = 1,8 \text{ m},$$

$$y_{\text{śr.m.}} = \frac{8,0 \cdot 1 + 4,0 \cdot 2 + 4,0 \cdot (-3)}{16} \text{ m} = 0,25 \text{ m}.$$

Są to współrzędne punktu C na rys. 9-6.

* Gdy siłą zewnętrzną jest siła ciężkości, wtedy działa ona na *środek ciężkości* ciała. W każdym rozważanym przez nas przypadku środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy, który jest pojęciem bardziej ogólnym. Przypadki, w których te dwa środki nie pokrywają się, omówimy w rozdziale 14.

Aby obliczyć przyspieszenie środka masy, obliczamy najpierw wypadkową siłę zewnętrzną działającą na układ trzech punktów. Składowe tej siły wzdłuż osi x i y wynoszą:

$$F_x = 14 \text{ N} - 6,0 \text{ N} = 8,0 \text{ N},$$

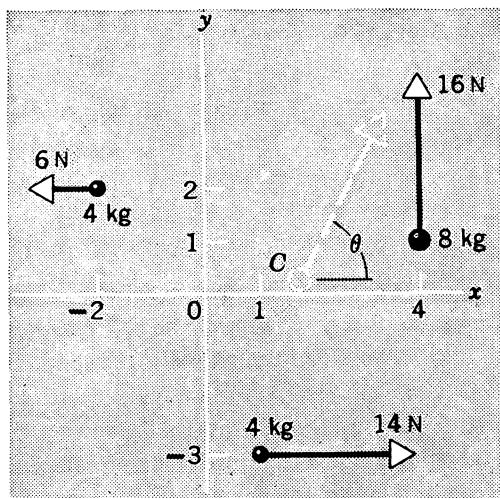
$$F_y = 16 \text{ N}.$$

Stąd siła wypadkowa F równa się:

$$F = \sqrt{8,0^2 + 16^2} = 18 \text{ N}$$

i z osią x tworzy kąt θ , gdzie

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{16 \text{ N}}{8 \text{ N}} = 2,0, \quad \text{a} \quad \theta = 63^\circ.$$



Rys. 9-6. Przykład 3. Wyznaczenie ruchu środka masy trzech punktów materialnych, na które działają trzy różne siły. Wszystkie siły leżą w płaszczyźnie przechodzącej przez te punkty. Odległości na osiach są wyrażone w metrach

Na podstawie równania (9-10) obliczamy wartość liczbową przyspieszenia środka masy:

$$a_{\text{sr. m.}} = \frac{F}{M} = \frac{18 \text{ N}}{16 \text{ kg}} = 1,1 \text{ m/s}^2.$$

Wektor przyspieszenia tworzy kąt 63° z osią x .

Mimo że w miarę upływu czasu, trzy punkty będą zmieniały swoje względne położenie, to środek masy będzie się poruszał ze stałym, obliczonym wyżej, przyspieszeniem.

9-3. Pęd punktu materialnego

Pędem punktu materialnego nazywamy wektor $\mathbf{p}$ zdefiniowany jako iloczyn jego masy m oraz prędkości $\mathbf{v}$, czyli

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Pęd jako iloczyn skalara i wektora jest wielkością wektorową. Ponieważ pęd $\mathbf{p}$ określonego punktu materialnego jest proporcjonalny do $\mathbf{v}$, zależy więc od układu odniesienia obserwatora. Układ ten musimy zawsze ustalić.

Newton w swych słynnych *Principiach* wyraził drugą zasadę dynamiki za pomocą pędu (który nazywał „ilością ruchu”). Zgodnie ze współczesną terminologią *druga zasada Newtona* brzmi: *Zmiana pędu ciała w jednostce czasu jest proporcjonalna do wypadkowej*

siły działającej na to ciało i jest skierowana zgodnie z tą siłą. Zapis tej zasady jest następujący:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (9-12)$$

Jeżeli układem jest punkt materialny o masie (stałej) m , to takie sformułowanie drugiej zasady dynamiki jest równoznaczne z zapisem: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, który stosowaliśmy dotychczas. Czyli gdy m jest stałe, wtedy

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

W mechanice klasycznej zależności $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ dla pojedynczych punktów materialnych są całkowicie równoznaczne.

W teorii względności (patrz: uzupełnienie V) dla pojedynczego punktu materialnego druga zasada dynamiki w postaci $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ jest nieprawdziwa. Jednakże ta sama zasada dynamiki Newtona w postaci $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ nadal obowiązuje, jeżeli pęd punktu materialnego zdefiniujemy nie jako $m_0\mathbf{v}$, lecz jako

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (9-13)$$

Z powyższego wzoru wynika nowa definicja masy [por. równanie (9-11) i (9-13)]:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Tak więc pęd możemy nadal określać jako iloczyn: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ [zob. paragraf (8-9)]. W ostatnim równaniu: v — prędkość punktu materialnego, c — prędkość światła, m_0 — masa spoczynkowa punktu (jego masa, gdy $v = 0$). Na podstawie tej definicji możemy oczekiwać, że ze wzrostem prędkości masa punktu materialnego będzie rosnąć. Cząstki elementarne jak: elektrony, protony itd. mogą osiągać olbrzymie prędkości, porównywalne z prędkością światła. Wzrost masy takich układów jest dostatecznie duży, aby go móc zmierzyć, jest to zatem bezpośredni sprawdzian słuszności założenia. Wyniki wszystkich takich doświadczeń wskazują, że wzrost masy rzeczywiście występuje i że jest dokładnie zgodny z powyższym równaniem (por. np. rys. 8-8).

9-4. Pęd układu punktów materialnych

Przypuśćmy, że zamiast z pojedynczym punktem mamy do czynienia z układem n punktów materialnych o masach m_1, m_2 itd. Będziemy zakładali, tak jak w paragrafie 9-2, że substancja ani nie dopływa do układu, ani go nie opuszcza, a zatem masa $M (= \sum m_i)$ tego układu pozostaje stała. Na taki układ punktów materialnych mogą oddziaływać siły zewnętrzne, jak również siły między innymi punktami. Każdy punkt będzie miał pewną prędkość i pewien pęd. Na przykład punkt 1 o masie m_1 i prędkości $\mathbf{v}_1$ będzie miał pęd $\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1$. Układ jako całość będzie miał *całkowity pęd* $\mathbf{P}$ w określonym układzie odniesienia. Pęd $\mathbf{P}$ jest zdefiniowany po prostu jako suma geometryczna pędów poszczególnych punktów materialnych w tym samym układzie odniesienia:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_n\mathbf{v}_n. \quad (9-14)$$

Jeżeli porównamy tę zależność z równaniem (9-7), zauważymy natychmiast, że

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{śr. m.}}, \quad (9-15)$$

co stanowi równoważną definicję pędu układu punktów materialnych. Treść równania

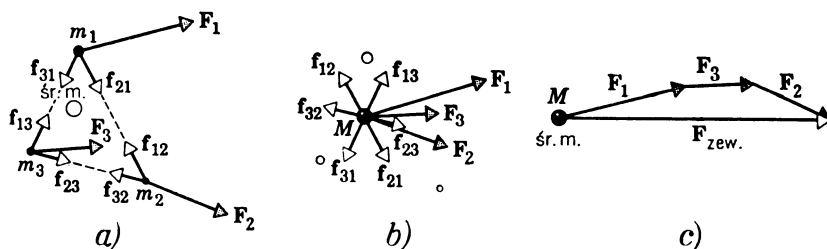
(9-15) można wyrazić następująco: *Całkowity pęd układu punktów materialnych jest równy iloczynowi całkowitej masy układu i prędkości jego środka masy.*

Widzieliśmy [równanie (9-10)], że druga zasada dynamiki Newtona dla układu punktów materialnych może być zapisana następująco:

$$\mathbf{F}_{zew} = M \mathbf{a}_{sr.m.}, \quad (9-10)$$

gdzie $\mathbf{F}_{zew}$ jest sumą geometryczną wszystkich *sił zewnętrznych* działających na ten układ; przypomnijmy sobie, że siły wewnętrzne, działające między punktami, znoszą się parami zgodnie z trzecią zasadą Newtona (zob. rys. 9-7). Jeżeli zróżniczkujemy równanie (9-15) względem czasu, to — zakładając niezmiennosć masy M — otrzymamy:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{sr.m.}}{dt} = M \mathbf{a}_{sr.m.} \quad (9-16)$$



Rys. 9-7. Zależności pomiędzy siłami działającymi na układ trzech punktów materialnych o masach m_1 , m_2 i m_3 . (a) Przedstawione są wszystkie siły działające na jeden punkt oraz położenie środka masy „śr.m.” Na punkt o masie m_1 działają punkty o masach m_2 i m_3 siłami $\mathbf{f}_{21}$ i $\mathbf{f}_{31}$ oraz siła zewnętrzna $\mathbf{F}_1$. Podobne grupy sił działają na punkty o masach m_2 i m_3 . Jednakże — zgodnie z trzecią zasadą Newtona — siły wewnętrzne $\mathbf{f}_{31}$ i $\mathbf{f}_{13}$ muszą być równe i przeciwnie skierowane i muszą leżeć na prostej łączącej środki punktów o masach m_1 i m_3 . Podobnie jest dla pozostałych par sił. (b) Jeżeli interesuje nas tylko ruch układu ako całości, możemy przyjąć, że wszystkie siły działające na układ o masie $M = m_1 + m_2 + m_3$, są przyłożone do środka masy. Pary sił wewnętrznych redukują się nawzajem i pozostają tylko siły zewnętrzne: $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ i $\mathbf{F}_3$. (c) Suma sił zewnętrznych daje siłę wypadkową $\mathbf{F}_{zew}$ działającą na środek masy tego układu

Porównanie zależności (9-10) i (9-16) pozwala nam napisać drugą zasadę Newtona dla układu punktów materialnych w postaci:

$$\mathbf{F}_{zew} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (9-17)$$

Równanie to opisuje układ składający się z wielu punktów materialnych i jest uogólnieniem równania (9-12) dla pojedynczego punktu, przy założeniu, że substancja ani nie dopływa do tego układu, ani go nie opuszcza. W szczególnym przypadku dla pojedynczego punktu, gdy na układ działają tylko siły zewnętrzne, równanie (9-17) redukuje się do równania (9-12).

9-5. Zasada zachowania pędu

Przypuśćmy, że suma sił zewnętrznych działających na układ jest równa zeru. Wtedy na podstawie równania (9-17)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{albo} \quad \mathbf{P} = \text{const.}$$

Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ jest równa zero, to całkowity wektor pędu tego układu pozostaje stały. To proste, lecz całkowicie ogólne, sformułowanie nazywamy *zasadą zachowania pędu*. Zobaczymy, że zasada ta stosuje się do wielu ważnych sytuacji fizycznych. Zasada zachowania pędu jest drugą z podstawowych zasad zachowania, z którymi dotąd się zetknęliśmy; pierwszą była zasada zachowania energii. Później zaznajomimy się z kilkoma innymi zasadami, jak np. z zasadą zachowania ładunku elektrycznego (t. II) i zasadą zachowania momentu pędu itd. W fizyce zasady zachowania są ważne i ze względów teoretycznych, i ze względów praktycznych, ponieważ są one proste i uniwersalne. Wszystkie one mogą być wyrażone w następującej postaci: gdy układ się zmienia, istnieje pewna cecha tego układu, która pozostaje nie zmieniona. Gdyby różni obserwatorzy, znajdujący się w swoich własnych układach odniesienia, obserwowali ten sam zmieniający się układ, to wszyscy byłiby zgodni, że do tego układu stosują się zasady zachowania. Na przykład, w przypadku zasady zachowania pędu obserwatorzy w różnych układach odniesienia wyznaczaliby różne wartości pędu $\mathbf{P}$ układu, lecz każdy z nich zgodziłby się z tym, że ustalona przez niego wartość $\mathbf{P}$ pozostaje nie zmieniona, gdy punkty materialne, które tworzą układ, przemieszczają się (przy założeniu: $\mathbf{F}_{zew} = 0$).

Całkowity pęd układu może być zmieniony tylko przez siły zewnętrzne działające na ten układ. Siły wewnętrzne, równe co do wartości i przeciwnie skierowane, wytwarzają równe co do wartości i przeciwnie skierowane zmiany pędu, które się wzajemnie redukują. Dla układu punktów materialnych

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = \mathbf{P},$$

i gdy całkowity pęd $\mathbf{P}$ jest stały, mamy

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = \text{const} = \mathbf{P}_0. \quad (9-18)$$

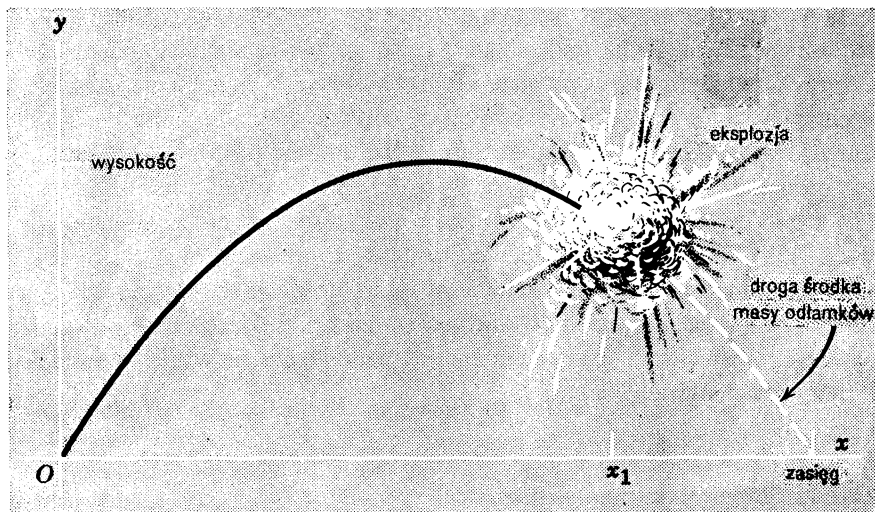
Pędy poszczególnych punktów mogą ulegać zmianom, ale suma tych pędów, jeżeli na układ nie działa żadna siła zewnętrzna, jest stała.

Pęd jest wielkością wektorową. Równanie (9-18) jest zatem równoważne trzem równaniom skalarnym, po jednym dla każdej osi współrzędnych. A więc zasada zachowania pędu dostarcza nam trzech warunków ruchu układu, do którego tę zasadę stosujemy. Natomiast zasada zachowania energii daje nam tylko jeden warunek ruchu układu, ponieważ energia jest skalarą.

Zasada zachowania pędu obowiązuje również w fizyce atomowej i jądrowej, mimo że tu nie stosuje się już mechanika newtonowska. Wobec tego zasada zachowania pędu musi być bardziej fundamentalna od zasad Newtona. Wyprowadzając tę zasadę musieliśmy przyjąć bardziej sztywne założenia, niż to było konieczne nawet w zakresie mechaniki klasycznej. Czytelnik powinien przypomnieć sobie podstawową rolę, którą przy formułowaniu zasady zachowania pędu odegrała trzecia zasada Newtona. Zastosowaliśmy tę zasadę w celu potwierdzenia założenia, że suma sił wewnętrznych, działających na wszystkie cząstki, wynosi zero. Jednakże potraktowanie wewnętrznych sił w materii jako par równych co do wartości i przeciwnie skierowanych sił, działających między różnymi parami atomów, jest nieco sztuczne. Siły te bowiem są w rzeczywistości siłami występującymi między wieloma ciałami i zależą nie tylko od względnej odległości i orientacji dwóch atomów, lecz także od położenia i orientacji atomów sąsiednich. Gdybyśmy mogli sprawdzić nasze założenie, nie korzystając z trzeciej zasady Newtona, wtedy zasada zachowania pędu nie zależałaby od prawdziwości tej trzeciej zasady. Możemy istotnie sprawdzić to założenie na podstawie o wiele słabszych żądań niż wymaga trzecia zasada Newtona. Sprawdzenie tego leży jednak poza zakresem tego podręcznika.

9-6. Niektóre zastosowania zasady zachowania pędu

Przykład 4. Jako pierwszy przypadek rozważmy działanie siły zewnętrznej na układ punktów materialnych. Przypomnijmy naszą poprzednią dyskusję o rzucie ukośnym (rozdział 4). Wyobraźmy sobie, że nasz fajerwerkowy pocisk rozrywa się w czasie lotu. Tor pocisku jest przedstawiony na rys. 9-8. Zakładamy, że opór powietrza można pominąć. Pocisk jest układem poruszającym się, Ziemia jest układem odniesienia, a ciężar — siłą zewnętrzną. W punkcie x_1 następuje rozerwanie się pocisku i odłamki rozlatują się we wszystkich kierunkach. Co możemy powiedzieć o ruchu układu w takim przypadku?

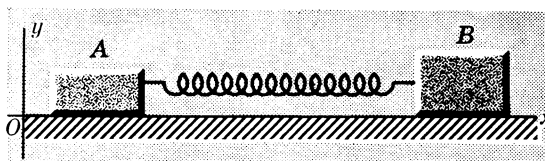


Rys. 9-8. Przykład 4. Pocisk poruszając się po torze parabolicznym wybucha w punkcie x_1 . Środek masy odłamków porusza się nadal po tym samym torze

Siły wybuchu są siłami wewnętrznymi, są to siły, którymi oddziałuje jedna część układu na drugą. Siły te mogą zmienić pędy wszystkich poszczególnych odłamków, lecz nie mogą zmienić całkowitego wektora pędu układu. Jedynie siła zewnętrzna może zmienić ten pęd całkowity. Jednakże siłą zewnętrzną jest tu po prostu siła ciężkości. Ponieważ układ punktów materialnych jako całość porusza się tak, jakby cała jego masa była skupiona w środku masy (który jest punktem zaczepienia siły zewnętrznej), więc środek masy odłamków będzie się poruszał dalej po torze parabolicznym tak, jakby rozerwanie pocisku nie nastąpiło. Zmiana całkowitego pędu układu, wywołana przez siłę ciężkości, jest taka sama, niezależnie od tego czy pocisk leci w całości, czy też w postaci dużej liczby odłamków.

Co można powiedzieć o energii mechanicznej układu przed i po eksplozji?

Przykład 5. Rozważmy teraz dwa ciała A i B o masach m_A i m_B , połączone sprężyną i pozostające w spoczynku na doskonale gładkim, poziomym stole. Odciągnijmy od siebie ciała na pewną odległość, jak na rys. 9-9, a następnie puśćmy je swobodnie. Opisać ruch ciał w takim przypadku.



Rys. 9-9. Przykład 5. Dwa ciała A i B , spoczywające na doskonale gładkiej powierzchni, połączone są sprężyną. Jeżeli zostaną odsunięte, a następnie swobodnie puszczane, to suma ich pędów pozostaje równa zeru

Jeżeli układ jest złożony z dwóch ciał i sprężyny, to po uwolnieniu ciał na układ nie działa *sila zewnętrzna*. Dlatego do ruchu tego możemy zastosować zasadę zachowania pędu. Przed uwolnieniem ciał w układzie odniesienia związanym ze stołem pęd układu ciał był równy zeru. I taki pozostał po ich uwolnieniu. Chociaż ciała poruszają się, całkowity pęd może być równy zeru, ponieważ pęd jest wielkością wektorową. Jedno ciało będzie miało pęd dodatni (A porusza się w kierunku $+x$), a ciało drugie będzie miało pęd ujemny (B porusza się w kierunku $-x$). Z zasady zachowania pędu mamy:

pęd początkowy = pęd końcowy,

$$0 = m_B v_B + m_A v_A.$$

Zatem

$$m_B v_B = -m_A v_A$$

lub

$$v_A = -\frac{m_B}{m_A} v_B.$$

Na przykład, jeżeli $m_A = 2$ kg, a $m_B = 1$ kg, to prędkość v_A będzie zawsze równa połowie v_B co do bezwzględnej wartości, ale zwrot będzie miała przeciwny, ponieważ ciała poruszają się w przeciwnym kierunku.

Energia kinetyczna ciała A wynosi $\frac{1}{2} m_A v_A^2$, co można zapisać jako $(m_A v_A)^2 / 2m_A$. Energia kinetyczna ciała B wynosi $\frac{1}{2} m_B v_B^2$, co zapisujemy jako $(m_B v_B)^2 / 2m_B$. Lecz

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{2m_B(m_A v_A)^2}{2m_A(m_B v_B)^2} = \frac{m_B}{m_A},$$

gdzie $m_A v_A$ równa się $m_B v_B$, jak to wynika z zasady zachowania pędu. W każdej chwili energie kinetyczne ciał są odwrotnie proporcjonalne do ich mas. Ponieważ energia mechaniczna jest również zachowana, więc ciała będą kontynuować ruch drgający tam i z powrotem, a ich energia będzie częściowo kinetyczna i częściowo potencjalna. Jaki jest ruch środka masy tego układu?

Jeżeli energia mechaniczna nie jest zachowana, jak to się dzieje w przypadku występowania tarcia, to ruch będzie wygasał w miarę rozpraszania się energii. Wyjaśnić, czy możemy zastosować w tym przypadku zasadę zachowania pędu.

Przykład 6. Jako przykład odrzutu rozpatrzmy rozpad promieniotwórczy. Cząstka α (jądro atomu helu) jest emitowana z prędkością $1,4 \cdot 10^7$ m/s i z energią kinetyczną 4,1 MeV (1 MeV = milion elektronowoltów) przez jądro uranu 238, pozostające początkowo w spoczynku. Znaleźć prędkość odrzutu powstałego jądra (tor 234).

Wyobraźmy sobie, że układ (tor + cząstka α) jest początkowo związany i tworzy jądro uranu. Układ ten rozdziela się następnie na dwie oddzielne części. Pęd układu przed rozpadem wynosi zero. Ze względu na nieobecność sił zewnętrznych pęd układu po rozpadzie jest także równy zeru. Wobec tego

pęd początkowy = pęd końcowy,

$$0 = M_\alpha v_\alpha + M_{Th} v_{Th},$$

$$v_{Th} = -\frac{M_\alpha}{M_{Th}} v_\alpha.$$

Stosunek mas cząstki α i jądra toru wynosi $M_\alpha / M_{Th} = 4/234$, a $v_\alpha = 1,4 \cdot 10^7$ m/s. Zatem

$$v_{Th} = -\frac{4}{234} \cdot 1,4 \cdot 10^7 \text{ m/s} = -2,4 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Znak minus wskazuje, że jądro toru jest odrzucone w kierunku przeciwnym niż cząstka α . Dlatego też wypadkowy wektor pędu jest równy zeru.

Jak można obliczyć energię kinetyczną odrzuconego jądra (patrz poprzedni przykład)? Skąd się bierze energia fragmentów rozpadu?

Przykład 7. Rozważmy teraz pozornie prosty przykład piłki rzuconej w górę z Ziemi i po jej powrocie złapanej przez tę samą osobę. Dla uproszczenia przyjmujemy, że osoba ta jest sztywno związana z Ziemią oraz że pomijamy opór powietrza.

Rozważany układ składa się z Ziemi i piłki. Siły grawitacyjne działające między częściami tego układu są w tym przypadku siłami wewnętrznymi. Przyjmijmy jako układ odniesienia taki układ, w którym Ziemia

wraz z piłką jest początkowo nieruchoma. Gdy piłka jest wyrzucana w górę, z punktu widzenia obserwatora w tym układzie odniesienia, Ziemia musi doznać odrzutu. Pęd układu (Ziemia + piłka) jest początkowo równy zeru i nie działają siły zewnętrzne. Zatem pęd jest zachowany i całkowity pęd podczas ruchu pozostaje zerem. Pęd piłki, skierowany w górę jest równoważony przez pęd Ziemi skierowany w dół. Wobec tego

pęd początkowy = pęd końcowy,

$$0 = m_P v_P + m_Z v_Z,$$

$$m_P v_P = -m_Z v_Z,$$

gdzie m_P i m_Z oznaczają odpowiednio masy piłki i Ziemi, a v_P i v_Z są to prędkości piłki i Ziemi w obranym układzie odniesienia. Ziemia ma olbrzymią masę w porównaniu z piłką, zatem prędkość Ziemi jest tak mała, że można ją pominąć.

Gdy piłka i Ziemia są od siebie oddalone, działa między nimi wewnętrzna siła przyciągania grawitacyjnego, powodująca ich wzajemne zbliżanie się. Gdy piłka spada na Ziemię, wtedy Ziemia spada na piłkę z równym co do wartości, lecz przeciwnie skierowanym pędem. W chwili upadku piłki jej pęd jest neutralizowany (i sam neutralizuje) pęd Ziemi. Obydwa ciała tracą swój ruch względny, pęd pozostaje nadal równy zeru; zostaje przywrócony stan początkowy.

Przypominamy, że kiedy omawialiśmy zasadę zachowania energii, uwzględniając potencjalną energię grawitacyjną, pominęliśmy ruch samej Ziemi. Przyjęliśmy, że poziom zerowy potencjalnej energii grawitacyjnej znajduje się na powierzchni Ziemi. Punkt odniesienia nie miał tu znaczenia, ponieważ mieliśmy do czynienia tylko ze zmianami energii potencjalnej. Jednakże, obliczając zmiany energii kinetycznej, założyliśmy, że Ziemia znajduje się w spoczynku. Tak samo postąpiliśmy w przypadku piłki wyrzuconej nad powierzchnię Ziemi.

W zasadzie nie możemy ignorować zmiany energii kinetycznej samej Ziemi. Na przykład, gdy piłka spada na powierzchnię Ziemi, wtedy Ziemia jest nieznacznie przyspieszana w kierunku piłki. Poprzednio pominęliśmy ten fakt, ponieważ założyliśmy, że zmianę energii kinetycznej Ziemi można pominąć. To założenie nasuwa pewne wątpliwości. Chociaż prędkość Ziemi jest wówczas z pewnością mała, to jednak jej masa jest olbrzymia i wobec tego nabyta energia kinetyczna może być znaczna. Aby rozstrzygnąć ten problem, obliczmy stosunek energii kinetycznej Ziemi do energii kinetycznej piłki. Korzystając z zależności $m_P v_P = -m_Z v_Z$, wynikającej z zasady zachowania pędu, otrzymujemy:

$$\frac{K_Z}{K_P} = \frac{\frac{1}{2} m_Z v_Z^2}{\frac{1}{2} m_P v_P^2} = \frac{\frac{1}{2} (m_Z v_Z)^2}{\frac{1}{2} (m_P v_P)^2} \frac{m_P}{m_Z} = \frac{m_P}{m_Z}.$$

Ponieważ masę piłki m_P w porównaniu z masą Ziemi m_Z możemy pominąć, więc energię kinetyczną K_Z , uzyskaną przez Ziemię, możemy też pominąć w porównaniu z energią piłki K_P . Na przykład, jeżeli $m_P = 6$ kg (piłka raczej ciężka), a $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, to $K_Z/K_P = 10^{-24}$ (!).

Zwracamy uwagę, że zadanie to jest w zasadzie takie samo, jak w przykładzie 5. Różnice występują tylko w szczegółach. Energia potencjalna sprężyny została zastąpiona grawitacyjną energią potencjalną, a na miejscu mas, o tym samym rzędzie wielkości, pojawiły się masy o bardzo różniących się rzędach wielkości.

9-7. Układy o zmiennej masie

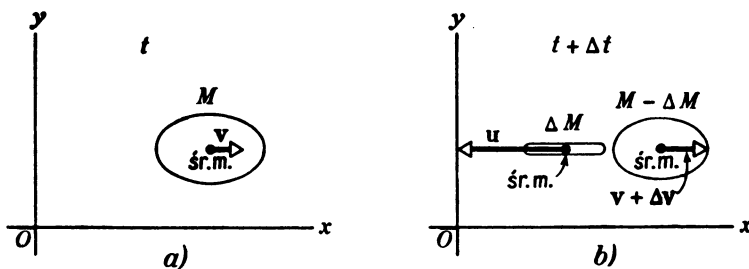
Dotychczas zajmowaliśmy się tylko takimi układami, których całkowita masa M pozostawała stała wraz z upływem czasu. Obecnie zajmiemy się takimi układami, których masa podczas obserwacji zjawiska wzrasta lub maleje. Jeżeli masa układu rośnie, to pochodna dM/dt jest dodatnia, a gdy maleje — ujemna.

Rysunek 9-10a przedstawia pewien układ o masie M , którego środek masy porusza się z prędkością v , gdy obserwację prowadzi się z określonego układu odniesienia. Na ten układ działa pewna siła zewnętrzna F_{zew} . Po upływie czasu Δt stan układu zmienia się tak, jak to przedstawiono na rys. 9-10b. Z układu została wyrzucona pewna ilość substancji o masie ΔM , jej środek masy porusza się z prędkością u względem przyjętego układu odniesienia. Wobec tego masa układu zmniejszyła się do wartości $M - \Delta M$, a prędkość v środka masy układu osiągnęła wartość $v + \Delta v$.

Można sobie wyobrazić, że układ na rys. 9-10 przedstawia jakąś raketę. Wyrzuca ona ze swej dyszy gorący gaz z dość dużą prędkością, zmniejszając dzięki temu swoją masę i zwiększając prędkość. Zmniejsze-

nie masy rakiety odbywa się w sposób ciągły podczas procesu spalania. Siła zewnętrzna F_{zew} nie stanowi siły ciągu rakiety, lecz jest sumą jej ciężaru i siły oporu atmosfery.

W celu przeanalizowania tej sytuacji założmy na razie, że rozpatrywany układ ma stałą masę. Oznacza to, że do naszego układu (rys. 9-10b) włączmy nie tylko masę $M - \Delta M$ ciała, ale również wyrzuconą masę ΔM ; całkowita masa tego układu będzie równa masie M przedstawionej na rys. 9-10a. Po wprowadzeniu



Rys. 9-10. Ciało o masie M , poruszające się z prędkością v , wyrzuca w przedziale czasu Δt substancję o masie ΔM . Na ten układ działa pewna siła zewnętrzna F_{zew} (nie pokazana na rysunku)

dzeniu tego założenia będziemy mogli wykorzystać wyniki uzyskane dotychczas dla układów o stałej masie. Zobaczymy, że taki sposób postępowania doprowadzi nas do drugiej zasady Newtona dla układów, których masa nie jest stała.

Opieramy się na równaniu (9-17):

$$F_{zew} = \frac{dP}{dt}.$$

Dla skończonego przedziału czasu Δt otrzymujemy następujące wyrażenie przybliżone:

$$F_{zew} \cong \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_k - P_p}{\Delta t},$$

gdzie P_k jest pędem (końcowym) układu z rys. 9-10b, a P_p — pędem (początkowym) układu z rys. 9-10a. Ponieważ $P_k = (M - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M u$, a $P_p = M v$, wobec tego mamy

$$F_{zew} \cong \frac{[(M - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M u] - M v}{\Delta t} = M \frac{\Delta v}{\Delta t} + [u - (v + \Delta v)] \frac{\Delta M}{\Delta t}. \quad (9-19)$$

Jeżeli teraz przyjmimy, że Δt dąży do zera, to stan przedstawiony na rys. 9-10b zmierza do stanu przedstawionego na rys. 9-10a, co oznacza, że $\Delta v / \Delta t$ dąży do dv / dt , czyli do przyspieszenia ciała (rys. 9-10a). Wielkość ΔM jest masą substancji wyrzuconej w czasie Δt ; w wyniku tego wyrzucenia zmniejsza się masa M pierwotnego ciała. Gdy Δt dąży do zera, dodatnią wartość $\Delta M / \Delta t$ należy zastąpić przez $-dM / dt$, ponieważ wielkość dM / dt , wyrażająca zmianę czasową masy ciała, jest z natury rzeczy ujemna. W końcu, gdy Δt dąży do zera, wtedy Δv także dąży do zera. Po uwzględnieniu tych zmian w równaniu (9-19) otrzymujemy

$$F_{zew} = M \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt} - u \frac{dM}{dt} \quad (9-20a)$$

lub

$$F_{zew} = \frac{d}{dt} (M v) - u \frac{dM}{dt}. \quad (9-20b)$$

Równanie to wyraża drugą zasadę Newtona, która definiuje siły zewnętrzne działające na jakieś ciało (podobne do przedstawionego na rys. 9-10a) o zmiennej masie.

Zwracamy uwagę, że równania te redukują się do znanych postaci: odpowiednio $F_{zew} = M a$ i $F_{zew} = (d/dt)(M v)$ dla szczególnego przypadku ciała o stałej masie ($dM / dt = 0$). Należy podkreślić, że nie możemy wyprowadzić ogólnego wyrażenia na drugą zasadę Newtona dla układów o zmiennej masie, traktując masę we wzorze $F_{zew} = dP / dt = d(M v) / dt$ jako wielkość zmienną. Taki sposób postępowania prowadzi bowiem do wyniku:

$$F_{zew} = \frac{d}{dt} (M v) = M \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt},$$

co stanowi jedynie szczególnie przypadek bardziej ogólnego równania (9-20), mianowicie przypadek, w którym albo (a) $dM/dt = 0$, co oznacza układ o stałej masie, albo (b) $\mathbf{u} = 0$, co oznacza specjalny wybór układu odniesienia. Wyrażenie $\mathbf{F}_{zew} = d\mathbf{P}/dt$ możemy wykorzystać do analizowania układów o zmiennej masie, ale tylko wtedy, gdy stosujemy je do jakiegoś *całkowitego układu o stałej masie*, złożonego z części, między którymi odbywa się wymiana masy. To właśnie uczyniliśmy przy wyprowadzaniu równań (9-20). Znaczenie wzoru $\mathbf{F}_{zew} = d\mathbf{P}/dt$ w fizyce klasycznej polega na tym, że wyjaśnia on zasadę zachowania pędu i daje nam prosty, fizyczny sposób traktowania skomplikowanych układów. Ponieważ wybór układu zależy od naszej decyzji, możemy zawsze wybrać jakiś układ o stałej masie, włączając do niego dostatecznie wiele ciał.

Jednak często wygodne jest — np. w zagadnieniach dotyczących rakiet — wybranie jakiegoś układu, którego masa zmienia się wraz z upływem czasu. W takich przypadkach stosujemy drugą zasadę Newtona (równania 9-20) w postaci, która jest niekiedy bardziej wygodna i lepiej daje się interpretować fizycznie. Wektor $\mathbf{u} = (\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})$ w równaniu (9-19) oznaczamy jako $\mathbf{v}_{wzgl}$; jest to względna prędkość wyrzuconej masy względem głównego ciała. Zatem równania (9-20) mogą być zapisane następująco:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{zew} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \frac{dM}{dt} \quad (9-21a)$$

lub

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{zew} + \mathbf{v}_{wzgl} \frac{dM}{dt}. \quad (9-21b)$$

Ostatni wyraz w równaniu (9-21b), tzn. $[\mathbf{v}_{wzgl}(dM/dt)]$ wyraża pęd przekazywany w jednostce czasu do układu (lub z układu) przez substancję, którą ten układ wyrzucił (lub pobrał). Wyraz ten może być interpretowany jako siła wywierana na układ przez substancję, która go opuszcza (lub przyłącza się do niego). W przypadku rakiety nosi on nazwę siły ciągu; dążeniem konstruktorów raketowych jest uczynienie go tak wielkim, jak tylko jest to możliwe. Z równania (9-21) wynika, że aby zrealizować to dążenie, ilość substancji wyrzucanej przez raketę w jednostce czasu oraz prędkość rakiety względem wyrzuconej substancji powinny być jak największe. Możemy zapisać równanie (9-21) w postaci:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{zew} + \mathbf{F}_{reakcji},$$

gdzie $\mathbf{F}_{reakcji} (= \mathbf{v}_{wzgl} dM/dt)$ jest siłą reakcji wywieraną na układ przez substancję, która go opuszcza.

Przykład 8. Karabin maszynowy stoi na platformie wagonu mogącego się swobodnie poruszać bez tarcia po poziomym torze, tak jak na rys. 9-11a. W określonej chwili karabin zaczyna strzelać pociskami o masie m , których prędkość w układzie odniesienia związanym z Ziemią wynosi $\mathbf{u}$. Prędkość wagonu w tym układzie odniesienia wynosi $\mathbf{v}$, a prędkość pocisków *względem wagonu* jest równa $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Liczba pocisków wystrzelonych w jednostce czasu wynosi n . Obliczyć przyspieszenie wagonu.

Układ nasz stanowią wagon i karabin. Ponieważ jego masa M jest zmienna, stosujemy drugą zasadę Newtona w postaci wyrażonej równaniem (9-21b). Skoro na układ nie działa siła zewnętrzna, to $\mathbf{F}_{zew} = 0$ i równanie przyjmuje postać:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{wzgl} \frac{dM}{dt},$$

przy czym $d\mathbf{v}/dt$ równa się przyspieszeniu $\mathbf{a}$ tego układu; $\mathbf{v}_{wzgl}$ równa się prędkości $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ skierowanej na lewo (rys. 9-11a); dM/dt równa się $-mn$. Po wstawieniu tych wyrażeń do powyższego równania otrzymujemy

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{\mathbf{v}_{wzgl}(mn)}{M}.$$

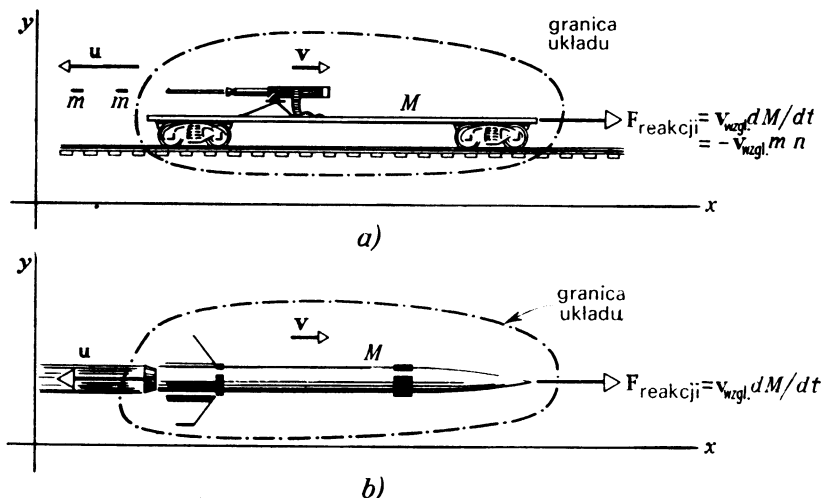
Wynika stąd, że $\mathbf{a}$ ma zwrot przeciwny do $\mathbf{v}_{wzgl}$, tzn. $\mathbf{a}$ jest skierowane na prawo (rys. 9-11a). Jeżeli w określonej chwili $\mathbf{v}_{wzgl} = 500$ m/s, $m = 10$ g; $n = 10/s$ i $M = 200$ kg, to w chwili tej

$$a = \frac{500 \text{ m/s} \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 10/s}{200 \text{ kg}} = 0,25 \text{ m/s}^2.$$

Wartość średniej „siły ciągu” pochodzącej od wyrzuconych pocisków, która w omawianej chwili działa na układ (wagon + karabin), wynosi

$$F = \mathbf{v}_{wzgl} mn = 500 \text{ m/s} \cdot 10/s \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 50 \text{ N}.$$

Na rysunku 9-11b przedstawiamy analogiczną sytuację dla rakiety. Pouczające jest zbadanie tego problemu z punktu widzenia trzeciej zasady Newtona i zasady zachowania pędu. Wybierzmy układ (rakieta + gaz) o ustalonej masie i zwińmy układ odniesienia z jego środkiem masy. Rakieta wyrzuca z rury wydechowej strumień gorących gazów; wyrzucanie to jest równoznaczne z działaniem pewnej siły. Strumień gorących gazów wywiera na raketę określoną siłę napędzającą, skierowaną ku przodowi. Jest to siła reakcji. Obydwie te siły są siłami wewnętrznymi w omawianym układzie (rakieta + gaz). W przypadku nie-



Rys. 9-11. (a) Przykład 8. Karabin maszynowy przymocowany jest do wagonu, który toczy się bez tarcia. Karabin strzela pociskami o masie m , z szybkością (liczba na jednostkę czasu) b , prędkość pocisków względem karabinu wynosi $u - v$. W chwili, do której odnosi się rysunek, niektóre pociski opuściły już rozpatrywany układ. Zaznaczone prędkości wagonu i pocisków mierzone są przez obserwatora znajdującego się w układzie odniesienia związanym z torem kolejowym. Siła reakcji działająca na układ wynosi $F = -mnv_{wzgl} = (dM/dt)v_{wzgl}$. (b) Ruch rakiety w przestrzeni w przypadku znikomo małych sił zewnętrznych. Z dyszy wyrzucone są drobiny gazu mające względem rakiety prędkość $u - v$. Szybkość wyrzucania substancji z dyszy rakiety wynosi $-dM/dt$. Siła reakcji, działająca na raketę, wyraża się wzorem $F = (dM/dt)v_{wzgl}$. Zaznaczone prędkości rakiety i wyrzucanego gazu mierzone są względem powierzchni Ziemi

obecności sił zewnętrznych całkowity pęd tego układu jest stały (środek masy początkowo znajdujący się w spoczynku w dalszym ciągu pozostaje w spoczynku). Niemniej jednak poszczególne części tego układu (rakieta i gazy) mogą zmieniać swój pęd. Względem układu odniesienia, związanego ze środkiem masy, gorące gazy nabywają pędu skierowanego do tyłu, a rakieta nabywa pędu o takiej samej wartości, skierowanego do przodu.

W podobny sposób Czytelnik może przeanalizować poprzedni układ (pociski + wagon).

Przykład 9. Na stanowisku startowym rakieta, zaopatrzona w materiał pędny, ma ciężar 13 500 kG. Zostaje ona wystrzelona pionowo do góry i w chwili po zużyciu paliwa waży 4500 kG. Szybkość spalania materiału pędnego wynosi 150 kg/s, a prędkość wyrzucania gazów względem rakiety jest równa 1500 m/s; zakładamy, że obydwie te wielkości są stałe podczas spalania materiału pędnego.

(a) Obliczyć siłę ciągu. Siła ciągu F występuje jako ostatni wyraz w równaniu (9-21b):

$$F = v_{wzgl} \frac{dM}{dt} = 1500 \text{ m/s} \cdot 150 \text{ kg/s} = 2,25 \cdot 10^5 \text{ N} = 23\,000 \text{ kG}.$$

Zwracamy uwagę, że początkowo, gdy zbiorniki materiału pędnego są pełne, działająca na raketę siła, skierowana ku górze, jest równa sile ciągu (23 000 kG) minus początkowy ciężar rakiety (13 500 kG), czyli 9500 kG (przy pominięciu oporu powietrza). Bezpośrednio po zużyciu paliwa siła, skierowana ku górze, wynosi 23 000 kG minus 4500 kG, czyli 18 500 kG.

(b) Jaka byłaby prędkość rakiety w chwili zużycia paliwa, gdybyśmy mogli *pominąć wszystkie siły zewnętrzne*, włączając w to ciężar i opór powietrza?

Jeżeli w równaniu (9-21b) $F_{zew} = 0$, to

$$M \frac{dv}{dt} = v_{wzg1} \frac{dM}{dt} \quad \text{lub} \quad dv = v_{wzg1} \frac{dM}{M}.$$

Całkując to wyrażenie (patrz dodatek I) od chwili, w której prędkość jest równa v_0 , a masa rakiety wynosi M_0 , otrzymujemy

$$\int_{v_0}^v dv = v_{wzg1} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M},$$

przy czym zakładamy, że w wymienionym wyżej przedziale czasu prędkość wyrzucania gazów jest stała. Całkowanie daje następujący wynik:

$$v - v_0 = -v_{wzg1} \ln(M_0/M) = -v_{wzg1} \ln\left(1 + \frac{M_0 - M}{M}\right),$$

co oznacza, że zmiana prędkości rakiety w dowolnym przedziale czasu zależy jedynie od prędkości wyrzucania gazów (mającej przeciwny zwrot) oraz od ułamka masy substancji wyrzucanej w tym przedziale czasu.

W naszym przykładzie $v_0 = 0$, $M_0/M = 13\,500/4500 = 3,0$, a więc prędkość rakiety w chwili zużycia paliwa wynosi:

$$v = v_{wzg1} \ln(M_0/M) = 1500 \text{ m/s} \cdot \ln 3,0 \cong 1650 \text{ m/s}.$$

Gdyby zostały uwzględnione siły zewnętrzne, ciężar i opór powietrza, wtedy końcowa prędkość byłaby mniejsza*.

Zakładamy, że w chwili startu prędkość początkowa rakiety równa się zeru ($v_0 = 0$), a masa wynosi M_0 . Jeżeli w chwili zużycia paliwa prędkość końcowa rakiety wynosi v_k , a jej masa równa się M_k , to równanie rakiety możemy zapisać następująco:

$$\frac{M_k}{M_0} = e^{-v_k/v_{wzg1}},$$

gdzie v_{wzg1} jest prędkością wyrzucania gazów.

Równania klasyczne rakiety (lub zmiennej masy) nasuwają wniosek, że prędkość rakiety może się zwiększać do dowolnej wartości pod warunkiem jedynie, że raketa wyrzuca wystarczającą ilość paliwa i że pozostała, końcowa masa jest dostatecznie mała. Na podstawie mechaniki relatywistycznej wiemy jednak, że raketa nie może być przyspieszona do prędkości równej lub większej od prędkości światła. Gdy prędkość rakiety zbliży się do zakresu prędkości relatywistycznej, równania klasyczne nie mogą już być stosowane. W zależności od prędkości należy uwzględnić zmianę masy bezwzględnej cząstki i dodatkowo wzór na prędkość relatywistyczną. Równania, które z tego wynikają, mogą być stosowane do rakiety relatywistycznej**.

Przykład 10. Z nieruchomego zbiornika sypie się piasek z szybkością dM/dt na pas transportera poruszającego się z prędkością v w laboratoryjnym układzie odniesienia, tak jak to przedstawia rys. 9-12. Jaka jest wartość siły potrzebnej do utrzymania pasa w ruchu z prędkością v ?

Jest to klasyczny przykład siły związanej ze zmianą samej masy, gdy prędkość masy pozostaje stała. Układ nasz stanowi pas o zmiennej masie, wobec czego można doń stosować równanie (9-21). Ponieważ prędkość pasa jest stała, musimy w tym równaniu uwzględnić to, że $dv/dt = 0$. Obserwator znajdujący się na pasie i pozostający w spoczynku względem niego odczuwałby wrażenie, że sypany się piasek i zbiornik wykonują ruch poziomy z prędkością v w kierunku przeciwnym do pokazanego kierunku ruchu pasa w układzie laboratoryjnym. Zatem w równaniu (9-21b) należy wprowadzić następującą zmianę: $v_{wzg1} = u - v$, ponieważ jednak $u = 0$, dlatego $v_{wzg1} = -v$. Biorąc to pod uwagę otrzymujemy

$$0 = F_{zew} - v \frac{dM}{dt}$$

* Ścisłe rozwiązanie zagadnienia rakiety klasycznej podaje J. L. Meriam, *Variable-Mass Dynamics*, *Journal of Engineering Education*, December 1960.

** *Patrz*: Kalman B. Paneranz, *The Equation of Motion for Relativistic Particles and Systems with a Variable Rest Mass*, *American Journal of Physics*, December 1964.

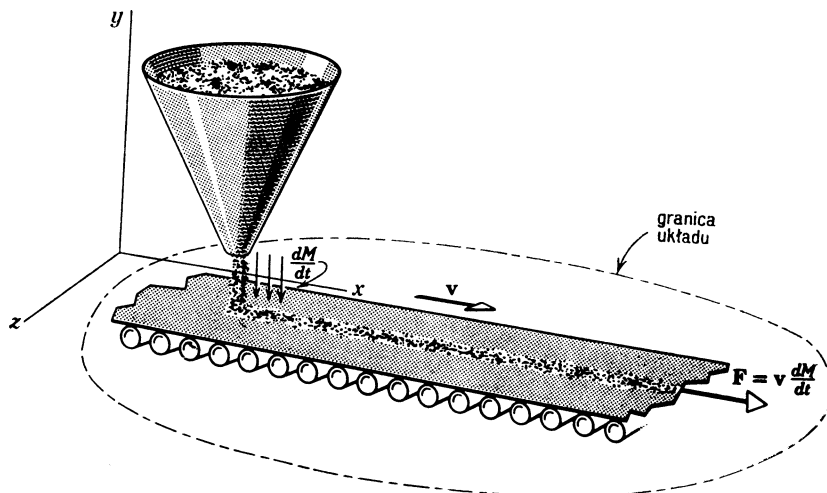
lub

$$F_{zew} = v \frac{dM}{dt}.$$

W przykładzie tym wielkość dM/dt jest dodatnia, ponieważ wraz z upływem czasu masa układu wzrasta. Wobec tego — jak należało się spodziewać — potrzebna siła zewnętrzna musi mieć zwrot zgodny z kierunkiem, w którym porusza się pas. Zwracamy uwagę, że w przypadku braku tarcia masa, którą jest obdarzony pas, nie występuje w tym zagadnieniu.

Moc dostarczona przez siłę zewnętrzną wynosi

$$P = F \cdot v = v \cdot F = v \cdot (v dM/dt) = v^2 (dM/dt).$$



Rys. 9-12. Przykład 10. Piasek sypie się ze zbiornika z szybkością dM/dt na pas transportera poruszający się z prędkością v w laboratoryjnym układzie odniesienia. Siła F , potrzebna do utrzymywania pasa w ruchu ze stałą prędkością, równa jest $v dM/dt$. W przedstawionym układzie odniesienia zbiornik znajduje się w spoczynku

Ponieważ $v = \text{const}$, możemy to zapisać następująco:

$$P = \frac{d(Mv^2)}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Mv^2 \right) = 2 \frac{dK}{dt}.$$

Widzimy więc, że moc potrzebna do utrzymania pasa w ruchu jest dwukrotnie większa od szybkości zwiększania się energii kinetycznej tego układu; zwracamy uwagę, że można nie rozpatrywać energii kinetycznej samego pasa, ponieważ ma on stałą prędkość, a więc jego energia kinetyczna nie zmienia się. Jest zrozumiałe, że w tym przypadku energia mechaniczna nie jest zachowana. Co się dzieje z drugą połową mocy? W którym z poprzednich przykładów mieliśmy do czynienia z zachowaniem pędu bez jednoczesnego zachowania energii mechanicznej?

Czytelnik powinien umieć rozwiązać przykład 10 w inny sposób, a mianowicie wybierając układ o ustalonej masie i stosując zasadę zachowania pędu*.

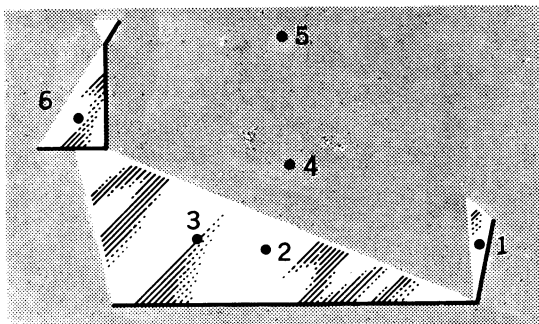
Pytania

1. Czy w środku masy układu ciał musi zawsze znajdować się jakaś substancja?
2. Czy środek masy ciała stałego musi leżeć koniecznie wewnątrz niego? Jeżeli nie, to podać odpowiednie przykłady.
3. Czy pojęcie środka masy ma coś wspólnego z pojęciem środka geograficznego danego kraju? A czy ma coś wspólnego z pojęciem środka zaludnienia kraju? Jaki wniosek można wyciągnąć z faktu, że środek geograficzny różni się od środka zaludnienia kraju?

* Doskonale, ogólne omówienie układów stałej i zmiennej masy, patrz: Force, Momentum Change and Motion, Martins Tiersten, *American Journal of Physics*, January 1969.

4. Rzeźbiarz — amator zdecydował się wykonać model ptaka (rys. 9-13). Model może samodzielnie stać. Został on wykonany z arkusza metalowej blachy o stałej grubości. Określić, który z punktów pokazanych na rysunku może być środkiem masy.

5. Położenie środka masy grupy punktów materialnych względem tych punktów nie zależy od układu odniesienia użytego dla opisanego przypadku. Czy jest to prawda? Czy można przyjąć taki układ odniesienia, którego początek znajdowałby się w środku masy?



Rys. 9-13. Pytanie 4

6. Jeżeli tylko siła zewnętrzna może zmienić stan ruchu środka masy ciała, to dlaczego siła wewnętrzna pochodząca od hamulców może całkowicie zatrzymać samochód?

7. Wyjaśnić, czy ciało może mieć energię nie mając jednocześnie pędu? Wyjaśnić, czy ciało może mieć pęd nie mając jednocześnie energii?

8. Dwa ciała: lekkie i ciężkie mają jednakowe energie kinetyczne ruchu postępowego. Które z nich ma większy pęd?

9. W drucianej klatce, wiszącej na wadze sprężynowej, znajduje się ptak. Czy w przypadku, gdy ptak fruwa wewnątrz klatki, wskazania wagi są większe, mniejsze, czy też równe wskazaniom, gdy ptak w klatce siedzi?

10. Czy łódź może być napędzana przez strumień powietrza padający na żagle, jeżeli jest on wytwarzany przez wiatraczek przymocowany do tej łodzi?

11. Siedząc w kajaku na stojącym zbiorniku wodnym można dostać się do brzegu szarpnięciem mocno za linę przyczepioną do dziuba kajaka. Jak można to wyjaśnić? (To naprawdę jest możliwe!)

12. Jak osoba stojąca nieruchomo na doskonale gładkiej poziomej powierzchni może się z niej wy dostać?

13. Na dużej tafli gładkiego lodu stoi nieruchomo człowiek trzymający w dłoni zapaloną petardę. W pewnej chwili rzuca on petardę w powietrze. Opisać krótko, ale możliwie najdokładniej, ruch środka masy petardy i ruch środka masy układu złożonego z człowieka i petardy. Najwygodniej jest podać opis każdego z tych ruchów w następujących przypadkach: (a) od chwili rzucenia petardy do chwili jej eksplozji; (b) od chwili eksplozji do chwili, w której pierwszy odłamek petardy trafia w lód; (c) od chwili uderzenia w lód pierwszego odłamka do chwili uderzenia ostatniego; (d) w czasie, w którym opadły wszystkie odłamki, i ślizgają się po powierzchni lodu.

14. Jak podano w tekście, nie można stosować równania $F_{zew} = d(Mv)/dt$ do układu o zmiennej masie. Aby to udowodnić, należy: (a) przedstawić to równanie w równoważnej postaci $(F_{zew} - M dv/dt)/(dM/dt) = v$; (b) wykazać, że jedna strona tego równania ma tę samą wartość we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, podczas gdy druga strona nie ma tej właściwości. Wobec tego równanie to dla ogółu przypadków nie może być uzasadnione. (c) Wykazać, że równanie (9-20) nie prowadzi do takiej sprzeczności.

15. Kostka lodu została wyrzucona z prędkością v w gorącą, próżną, wolną od powszechnego ciążenia przestrzeń. Kostka stopniowo topnieje, następnie gotuje się i zamienia w parę. (a) Czy jest to w dalszym ciągu układ punktów materialnych? (b) Jeżeli tak, to czy jest to ten sam układ punktów materialnych? (c) Czy ruch środka masy przechodzi jakieś gwałtowne zmiany? (d) Czy zmienia się pęd całkowity? (e) Czy odpowiedzi na pierwsze pytania ulegną zmianie, jeżeli uwzględnimy powszechne ciążenie?

16. W roku 1920 znaczące czasopismo ogłosiło na temat pionierskich doświadczeń rakietowych Roberta H. Goddarda — negując pogląd, że rakieta może poruszać się w próżni — co następuje: „Już samo

to, że profesor Goddard za swoją „katedrą” w Clark College i poparciem Instytutu Smithsona nie wie o związku akcji z reakcją i o potrzebie istnienia czegoś lepszego niż próżnia, przeciw czemu można by reagować — wystarczy aby powiedzieć, że jest to absurd. Jest rzeczą oczywistą, że ma on pewne braki w wiedzy wyniesionej ze szkoły średniej”. Co jest błędne w tym zarzucie?

17. Wyjaśnić fakt, że ostatni stopień rakiety wielostopniowej ma o wiele większą prędkość końcową od prędkości końcowej rakiety jednostopniowej mającej taki sam całkowity ciężar i tyleż paliwa co rakieta wielostopniowa.

18. Gdy rakieta wyrzuca spalony materiał pędny, zmienia się położenie jej środka masy (w układzie odniesienia związanym z tą rakieta). Czy musi to być uwzględnione w dokładnym rozwiązaniu problemu raketowego?

19. Wyjaśnić różnicę pomiędzy pochodzeniem zmiennej masy układu klasycznego i układu relatywistycznego.

20. Czy można sobie wyobrazić układy o zmiennej masie inne niż te, które omówiono w przykładach podanych w tekście?

Zadania

Paragraf 9-1

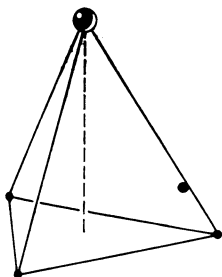
1. Udowodnić, że stosunek odległości dwóch punktów materialnych od ich środka masy jest równy stosunkowi odwrotności ich mas.

2. Eksperymenty przeprowadzone za pomocą dyfrakcji elektronów wykazują, że odległość między środkami atomów węgla (C) i tlenu (O) w cząsteczce gazowego tlenku węgla wynosi $1,130 \cdot 10^{-10}$ m. Znaleźć odległość środka masy cząsteczki CO od atomu węgla.

3. Masa Księżyca jest w przybliżeniu równa 0,013 masy Ziemi, a odległość od środka Księżyca do środka Ziemi jest około 60 razy większa od promienia Ziemi. Jak daleko od środka Ziemi leży środek masy układu Ziemia-Księżyc, jeżeli promień Ziemi wynosi w przybliżeniu 6400 km?

Odp.: 4900 km.

4. Masy i współrzędne czterech punktów materialnych są następujące: 5 kg, $x = y = 0$ cm; 3 kg, $x = y = 8$ cm; 2 kg, $x = 3$ cm, $y = 0$ cm; 6 kg, $x = -2$ cm, $y = -6$ cm. Znaleźć współrzędne środka masy tej grupy punktów materialnych.



Rys. 9-14. Zadanie 5

5. W cząsteczce amoniaku (NH_3) trzy atomy wodoru (H) tworzą trójkąt równoboczny. Odległość między środkami atomów wynosi $1,628 \cdot 10^{-10}$ m, tak więc środek trójkąta jest odległy o $9,39 \cdot 10^{-11}$ m od każdego atomu wodoru. Atom azotu (N) jest umieszczony na wierzchołku piramidy, której podstawą jest trójkąt utworzony z atomów wodoru (zob. rys. 9-14). Odległość między atomami wodoru i azotu jest równa $1,014 \cdot 10^{-10}$ m. Jaka jest odległość między atomem azotu a środkiem masy cząsteczki amoniaku?

Odp.: $6,74 \cdot 10^{-12}$ m w stronę płaszczyzny atomów wodoru, wzdłuż osi symetrii.

6. Znaleźć środek masy jednorodnej płyty w kształcie półkola. Niech a będzie promieniem tego koła.

Paragraf 9-2

7. Dwa klocki o masach 1 kg i 3 kg połączone sznurkiem leżą w stanie spoczynku na doskonale gładkiej powierzchni. Jeżeli klockom nadano różne prędkości i pierwszy porusza się z prędkością 1,7 m/s w kierunku środka masy, który pozostaje w stanie spoczynku, to jaka jest prędkość drugiego klocka?

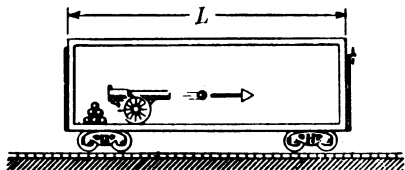
Odp.: 0,57 m/s, w kierunku środka masy.

8. Dwie cząstki P i Q będące w spoczynku znajdują się w odległości 1 m jedna od drugiej. P ma masę równą 0,10 kg, a Q masę 0,30 kg. P i Q przyciągają się wzajemnie ze stałą siłą $1,0 \cdot 10^{-2}$ N. Na układ ten nie działają żadne siły zewnętrzne. (a) Opisać ruch środka masy. (b) W jakiej odległości od początkowego położenia cząsteczki P nastąpi zderzenie tych cząstek?

9. Człowiek o masie m chwyta się drabiny linowej spuszczonej z balonu o masie M . Balon jest nieruchomy względem Ziemi. (a) Jeżeli człowiek zacznie wspinać się po drabinie z prędkością v (względem drabiny), to w jakim kierunku i z jaką prędkością (względem ziemi) balon zacznie się poruszać? (b) Jaki będzie stan ruchu, jeżeli człowiek przestanie się wspinać?

Odp.: (a) w dół, $\frac{m}{m+M}v$; (b) balon będzie znowu nieruchomy.

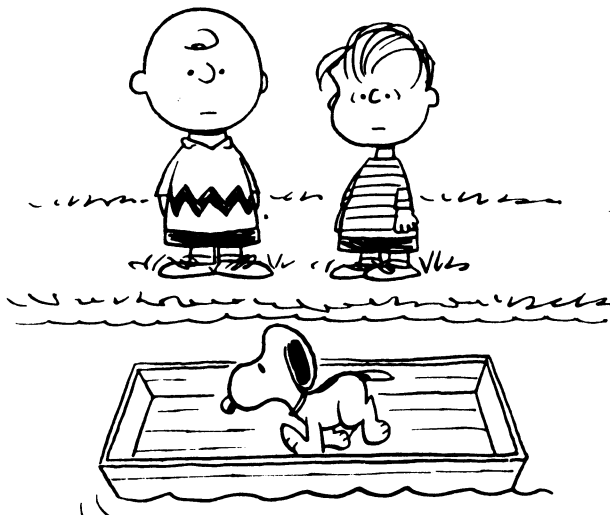
10. We wnętrzu zamkniętego wagonu kolejowego znajduje się armatka wraz z zapasem pocisków (rys. 9-15). Armatka strzela na prawo, wagon cofa się na lewo. Pociski, po uderzeniu w przeciwległą ścianę, pozostają w wagonie. Udowodnić, że — niezależnie od tego, jak pociski są wystrzeliwane — wagon kolejowy nie może potoczyć się dalej niż na odległość L równą swojej długości, przy założeniu, że zaczyna on poruszać się ze stanu spoczynku.



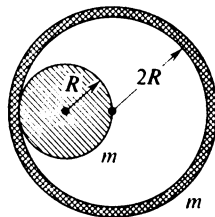
Rys. 9-15. Zadanie 10

11. W łodzi o płaskim dnie stoi pies o ciężarze 5 kG. Jest on oddalony od brzegu o 7 m. Idąc po dnie łodzi w kierunku brzegu, przebywa on odległość 3 m, a następnie się zatrzymuje. Ciężar łodzi wynosi 20 kG. Można przyjąć założenie, że między łodzią a wodą nie ma tarcia. Jak daleko od brzegu znajdzie się pies w chwili zatrzymania się? (Uwaga: środek masy układu łódź + pies nie porusza się. Dlaczego?) Linia brzegu znajduje się z lewej strony rys. 9-16.

Odp.: 5,25 m.



Rys. 9-16. Zadanie 11



Rys. 9-17. Zadanie 12

12. Piłka o masie m i promieniu R została umieszczona wewnątrz wydrążonej kuli o tej samej masie i promieniu wewnętrznym $2R$. Układ ten pozostaje w stanie spoczynku na doskonale gładkiej powierzchni w pozycji pokazanej na rys. 9-17. Uwolniona mniejsza piłka przetacza się po wewnętrznej stronie kuli i ostatecznie zatrzymuje się na dnie. Jak daleko przemieści się w tym czasie większa kula?

13. Ricardo (masa 80 kg) i Carmelita podziwiają jezioro Merced o zmierzchu, w kajaku (masa 30 kg). Gdy kajak znajduje się w stanie spoczynku, przy spokojnej wodzie zamieniają się miejscami, które są od siebie oddalone o 3 m i ułożone symetrycznie względem środka kajaka. Ricardo zauważył, że kajak poruszył się 0,4 m względem zanurzonego logu i obliczył masę Carmelity, do której nigdy nie chciała się przyznać. Ile wynosi jej masa?

Odp.: 58 kg.

14. Człowiek (80 kG) stoi w tyle łodzi bojerowej (400 kG), która jedzie po lodzie (można przyjąć łód jako doskonale gładki) z prędkością 4 m/s. Postanawia przejść do przodu 18 metrowej łodzi i robi to z prędkością 2 m/s względem łodzi. Jak daleko pojechała łódź w czasie, gdy człowiek siedzi?

Paragraf 9-3

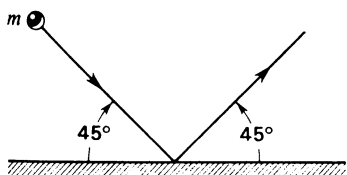
15. Z jaką prędkością musi jechać Volkswagen (816 kg), aby: (a) mieć ten sam pęd co Cadillac (2650 kg) jadący z prędkością 16 km/h? (b) mieć tę samą energię kinetyczną? (c) Dokonać tych samych obliczeń dla ciężarówki (9080 kg) zamiast Cadillaca?

Odp.: (a) 52 km/h, (b) 29 km/h, (c) 180 km/h, 52 km/h.

16. Piłkę 50 g wyrzucono w powietrze z prędkością początkową 15 m/s pod kątem 45° . (a) Jaka jest wartość energii kinetycznej na początku, a jaka tuż przed uderzeniem piłki o ziemię? (b) Znaleźć odpowiednie wartości pędu (wartość i kierunek). (c) Wykazać, że zmiana pędu jest równa ciężarowi piłki pomnożonemu przez czas lotu.

17. Ciało 5 kg uderza z prędkością 30 m/s w płytę stalową pod kątem 45° i odbija się z tą samą prędkością i pod tym samym kątem, (rys. 9-18). Jak zmienia się wartość i kierunek pędu ciała?

Odp.: 210 kg · m/s, prostopadłe do płyty.



Rys. 9-18. Zadanie 17

18. Dwa ciała, każde złożone z pewnej liczby ciężarków, zostały połączone lekką linką przerzuconą przez krążek obracający się bez tarcia, którego średnica równa się 5,0 cm. Oba ciała znajdują się na tym samym poziomie i początkowo ich masy są równe, po 500 g każda. (a) Znaleźć położenie środka masy tych ciał. (b) Ciężarek o masie dwudziestu gramów przeniesiono z jednego ciała na drugie i uniemożliwiono ruch tych ciał. Znaleźć teraz położenie środka masy. (c) W pewnej chwili ruch tych ciał został umożliwiony. W tym przypadku opisać ruch środka masy oraz znaleźć jego przyspieszenie.

Paragraf 9-4

19. Człowiek o masie 100 kg, stojący na powierzchni o bardzo małym tarcu, kopnął do przodu kamień o masie 0,1 kg, który leżał przy jego stopie, tak że nadał mu prędkość początkową 10 m/s. Jaka prędkość uzyska człowiek wskutek tego kopnięcia?

Odp.: 10^{-2} m/s, do tyłu.

20. Pistolet wyrzuca dziesięć dwugramowych kul na sekundę z prędkością 500 m/s. Kule zatrzymują się na sztywnej ścianie. (a) Ile wynosi pęd każdej kuli? (b) Jaka jest jej energia kinetyczna? (c) Jaką przeciętną siłę wywierają kule na ścianę?

21. Karabin maszynowy strzela pociskami o masach równych 50 g, nadając im prędkość 1000 m/s. Strzelec trzymający karabin maszynowy jest w stanie zrównoważyć średnią siłę oddziaływania, nie większą od 180 N. Określić maksymalną liczbę pocisków, jaka może być wystrzelona w ciągu minuty.

Odp.: 220 pocisków na minutę.

22. Bardzo giętki, jednorodny łańcuch o masie M i długości L zawieszony jednym końcem, zwisa pionowo w dół, a drugim końcem dotyka powierzchni stołu. Górny koniec został nagle puszczony i łańcuch spadł na stół formując małą górkę. Każde ogniwo łańcucha zatrzymało się całkowicie w momencie uderzenia w stół. Znaleźć siłę wywieraną przez stół na łańcuch w dowolnym momencie, jako funkcję ciężaru łańcucha znajdującego się w danym momencie już na stole.

Paragraf 9-5

23. Ciało o masie 8,0 kg, nie będące pod wpływem działania siły zewnętrznej, przemieszcza się z prędkością 2,0 m/s. W pewnej chwili następuje wewnętrzna eksplozja powodująca pęknięcie tego ciała na dwie części, każda o masie 4,0 kg. W wyniku eksplozji układ, który stanowią te dwie części, otrzymuje energię kinetyczną ruchu postępowego, równą 16 J. Przy założeniu, że żadna część nie opuszcza linii pierwotnego ruchu, znaleźć prędkość i kierunek ruchu każdej z nich.

Odp.: Jedna część zatrzymuje się całkowicie, druga porusza się w dalszym ciągu z prędkością 4 m/s.

24. Ostatni stopień rakiety porusza się z prędkością 7500 m/s. Jest on złożony z dwóch części spiętych razem kłamrą, a mianowicie: z osłony o masie 290 kg i kabiny z ciężarem użytecznym o łącznej masie 150 kg. W chwili otworzenia się kłamry ściśnięta sprężyna powoduje rozdzielenie obydwu części z prędkością względną 910 m/s. (a) Jakie prędkości mają obydwie części po ich rozdzieleniu? (b) Znaleźć całkowitą energię kinetyczną obydwu części przed i po ich rozdzieleniu oraz wytłumaczyć różnicę między nimi, jeżeli taka różnica istnieje.

25. Jądro pierwiastka promieniotwórczego, będące początkowo w spoczynku, ulega rozpadowi emitując elektron i neutrino w kierunkach prostopadłych względem siebie. Pędy elektronu i neutrino wynoszą odpowiednio $1,2 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ i $6,4 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. (a) Jaki jest kierunek i wartość pędu jądra odrzutu? (b) Jaka jest energia kinetyczna tego jądra, jeżeli ma ono masę $5,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$?

Odp.: (a) $1,4 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, pod kątem 150° do toru elektronu i 120° do toru neutronu; (b) 1 eV.

26. W każdej minucie specjalny karabin maszynowy leśniczego wystrzeliwuje 220 dziesięciogramowych gumowych pocisków z prędkością przy wylocie lufy wynoszącą 1200 m/s. Ile pocisków należy wystrzelić do zwierzęcia (85 kg) zmierzającego w stronę strażnika z prędkością 4 m/s, aby je zatrzymać? (Przyjąć, że pociski poruszają się po torze poziomym i upadają na ziemię, po uderzeniu w cel).

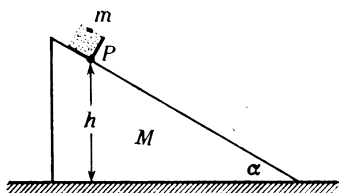
27. Naczynie, będące w spoczynku, nagle wybucha rozpadając się na trzy części. Dwie części o różnych masach zostały wyrzucone w kierunkach prostopadłych względem siebie, z prędkościami po 30 m/s każda. Trzecia część ma masę trzykrotnie większą od masy każdej z pozostałych części. Jaki jest kierunek i wartość prędkości trzeciej części bezpośrednio po wybuchu?

Odp.: 14 m/s, pod kątem 135° do każdej z dwu pozostałych części.

28. Pocisk został wystrzelony z działa pod kątem 60° do poziomu, z prędkością przy wylocie równą 500 m/s. U wylotu lufy pocisk rozrywa się na dwie części o równych masach. Jedna część, której prędkość początkowa natychmiast po rozerwaniu wynosi zero, spada pionowo w dół. Jak daleko od działa spadnie druga część pocisku przy założeniu, że teren jest płaski?

29. Ciało o masie m spoczywa na równi pochyłej o masie M , która z kolei spoczywa na poziomym stole, patrz rys. 9-19. Wszystkie powierzchnie są doskonale gładkie. Układ ten rozpoczyna ruch ze stanu spoczynku, gdy punkt P ciała znajduje się na wysokości h ponad stołem. Znaleźć prędkość równi w chwili, gdy punkt P dotknie stołu.

$$\text{Odp.: } \sqrt{\frac{2m^2gh\cos^2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}}.$$



Rys. 9-19. Zadanie 29

30. (a) Udowodnić, że prędkość rakiety jest równa prędkości wyrzucanych gazów, gdy stosunek M_0/M jest równy e (około 2,7). Określić również układ współrzędnych, w którym jest to prawdziwe. (b) Udowodnić, że prędkość rakiety jest dwukrotnie większa od prędkości wyrzucanych gazów, gdy stosunek M_0/M jest równy e^2 (około 7,4).

31. Rakieta oddala się od Układu Słonecznego z prędkością $6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. Rakieta odstrzeliwuje swój silnik, który wyrzuca gazy spalinowe ze względną prędkością $3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. Masa rakiety wynosi w tym mo-

mencie $4 \cdot 10^4$ kg, a jej przyspieszenie 2 m/s^2 . (a) Jaka jest prędkość gazów spalinowych względem Układu Słonecznego? (b) W jakim tempie były wyrzucane gazy podczas wyrzelenia silnika?

Odp.: (a) $3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$; (b) 27 kg/s .

32. Powszechnie stosowane paliwo rakietowe, nafta i ciekły tlen, jest zdolne dawać prędkość wyrzucanych gazów v_{wzg} równą około 2438 m/s . (a) Pominąć ciężar zbiorników paliwa, pomp itd. i obliczyć, ile kilogramów paliwa potrzeba na każdy kilogram ładunku, aby rakiet startująca ze stanu spoczynku mogła osiągnąć prędkość 12 km/s (prędkość ucieczki z Ziemi jest nieco większa od 11 km/s). (b) W przypadku Mariner (pojazd kosmiczny wysłany w kierunku Marsa) masa początkowa wynosiła około $90\,000 \text{ kg}$, a masa ładunku około 225 kg ; stosunek paliwa do ładunku był równy $400:1$. Jaka prędkość końcową może w tych warunkach osiągnąć rakiet startująca ze stanu spoczynku? (c) Rzeczywista prędkość końcowa rakiet wynosiła około 24 km/s , a więc była znacznie większa od wartości obliczonej w (b). Wyjaśnić, biorąc pod uwagę, że muszą być uwzględnione siły zewnętrzne i ciężar, pominięte w (a), że rakiet wykorzystuje pewną liczbę stopni i że w układzie odniesienia, związanym ze Słońcem, prędkość początkowa rakiet jest równa prędkości powierzchni Ziemi.

33. Rakiet o masie 6000 kg jest ustawiona do startu pionowego. Prędkość wyrzucanego gazu wynosi 1000 m/s . Jaka ilość gazu musi być wyrzucana w ciągu sekundy, aby uzyskać siłę ciągu potrzebną do: (a) zrównoważenia ciężaru rakiet; (b) nadania rakiecie początkowego przyspieszenia skierowanego ku górze, o wartości 20 m/s^2 ?

Odp.: (a) 59 kg/s ; (b) 180 kg/s .

34. Rozważyć punkt materialny, na który działa siła o kierunku zgodnym z kierunkiem prędkości tego punktu.

(a) Posługując się relatywistyczną zależnością $F = d(mv)/dt$ udowodnić, że

$$Fds = mv dv + v^2 dm,$$

gdzie ds jest nieskończenie małym przemieszczeniem. (b) Posługując się relatywistyczną zależnością $v^2 = (1 - m_0^2/m^2)c^2$, udowodnić, że

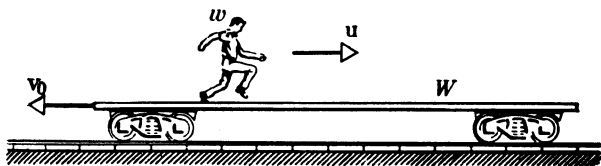
$$mv dv = \frac{m_0^2 c^2}{m^2} dm.$$

(c) Do wyrażenia (a) podstawić zależność na $mv dv$ i v^2 oraz udowodnić, że

$$W = \int Fds = (m - m_0)c^2.$$

35. Na prostych, poziomych szynach stoi platforma kolejowa o ciężarze W mogąca toczyć się po nich bez tarcia. Początkowo na platformie, poruszającej się w lewo z prędkością v_0 , stoi człowiek o ciężarze w . O jaką wartość zmienia się prędkość platformy, jeżeli człowiek zacznie biec w prawo (rys. 9-20) i uzyska na końcu platformy, przed zeskoczeniem z niej, prędkość względem platformy równą v_{wzg} ?

Odp.: $wv_{wzg}/(W + w)$.



Rys. 9-20. Zadanie 35

36. Przypuśćmy, że platforma, o której mowa w zadaniu 35 znajduje się początkowo w spoczynku oraz że jest na niej n osób, każda o ciężarze w . W którym z dwóch przypadków platforma uzyskuje większą prędkość: czy wtedy, gdy każdy człowiek biegnie kolejno z prędkością względną v_{wzg} i zeskakuje na końcu platformy, czy wtedy, gdy wszyscy biegną i zeskakują jednocześnie?

37. Sanki ważące 12 kg i załadowane 80 kg piasku zjeżdżają w dół oblodzonego wzniesienia o długości 300 m , nachylonego pod kątem 30° do poziomu. Sanki mają dziurę, przez którą piasek wysypuje się w ilości 5 kg/s . Po jakim czasie sanki zjadą na dół?

Odp.: $6,1 \text{ s}$.

38. Dwie długie barki płyną w tym samym kierunku w stojącym zbiorniku wodnym, jedna z prędkością 10 km/h , druga 20 km/h . W czasie gdy się mijają, węgiel znajdujący się na barce poruszającej się wolniej

zostaje przerzucony łopatom na barkę poruszającą się szybciej. Ile dodatkowej siły muszą dostarczyć silniki każdej z barek, jeżeli żadna nie zmieni prędkości? Przyjąć, że przerzucanie odbywa się zawsze dokładnie w bok i że siły tarcia między barkami a wodą nie zależą od ciężaru tych barek.

39. Samolot odrzutowy porusza się z prędkością 180 m/s. W czasie każdej sekundy silnik samolotu wciąga 68 m^3 powietrza o masie 70 kg i w czasie każdej sekundy powietrze to jest zużyte do spalania 2,9 kg paliwa. Energia wydzielana przy spalaniu powoduje sprężenie produktów spalania i wyrzucenie ich z prędkością początkową 490 m/s względem samolotu przez dyszę umieszczoną z tyłu samolotu. Znaleźć (a) siłę ciągu silnika odrzutowego i (b) wydzieloną przez niego moc.

Odp.: (a) $2,3 \cdot 10^4 \text{ N}$; (b) $4,1 \cdot 10^6 \text{ W}$.

40. Wagon towarowy bez dachu, o masie 10 t, porusza się ze znikomym tarciem po torze poziomym z prędkością 0,6 m/s. W pewnej chwili rozpoczyna się ulewa; krople padają prostopadle w dół. Jaka jest prędkość wagonu w chwili, gdy nagromadziło się w nim 0,5 t wody. Czy aby rozwiązać zadanie, trzeba przyjąć jakieś dodatkowe założenia, a jeżeli tak, to jakie?

41. Giętki, nierozciągliwy sznur o długości l został przewleczony przez gładką tubę, w której może się luźno przesuwac. Tuba jest zgięta pod kątem prostym i umieszczona w płaszczyźnie pionowej w ten sposób, że jedno ramię jest w pozycji pionowej, a drugie poziomej. Na początku, w chwili $t = 0$, część sznura o długości y_0 zwisa w dół z pionowego ramienia. Sznur został puszczonej wolno i począł wyslizgiwać się z tuby tak, że w dowolnej następnej chwili t będzie poruszał się z prędkością dy/dt , gdzie $y(t)$ jest długością części sznura, która wówczas będzie zwisła pionowo. (a) Pokazać, stosując zagadnienie zmiennej masy, że $v_{wzgl} = 0$ i równanie ruchu ma postać $mdv/dt = F_{zew}$. (b) Pokazać, że w tym przypadku równanie ruchu jest następujące: $d^2y/dt^2 = gy$. (c) Pokazać, że zachowanie energii mechanicznej prowadzi do $(dy/dt)^2 - gy^2 = \text{const}$ i że jest zgodne z (b). (d) Wykazać, że $y = (y_0/2)(e^{\sqrt{g/l}t} + e^{-\sqrt{g/l}t})$ jest rozwiązaniem równania ruchu (podstawiając w (b)) i omówić to rozwiązanie.