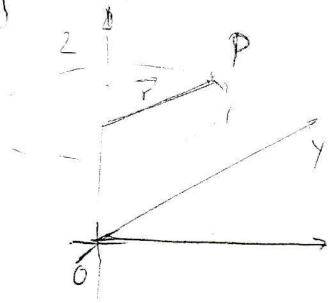
Kinematyka ruchu obrotowego

ograniczenie do ruchów wokół osi (bez przesuwania)



w ogólności mogą występować ruchy złożone postępowo-obrotowe

! Ale ruch postępowy układu punktów można sprowadzić do ruchu pojedynczego punktu (CM) środka masy

$$\vec{F}_{zew} = M \vec{a}_{CM} \qquad M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

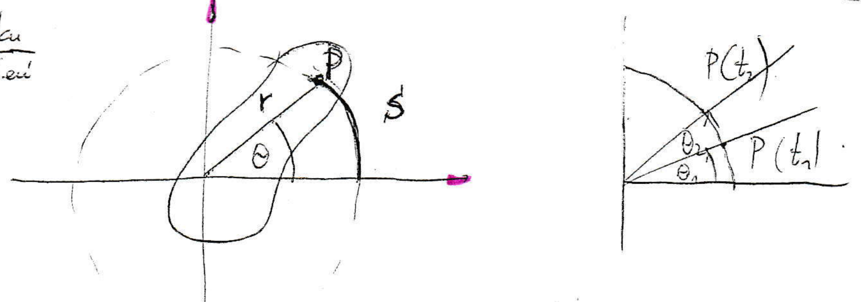
$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \vec{a_1} + m_2 \vec{a_2} + \ldots + m_n \vec{a_n}}{M}$$

Wielkości kinematyczne ruchu obrotowego

kąt θ ($^\circ$, radiany) $360^\circ = 2\pi$ ← jedn. geometr. bezwymiarowa

1 radian = $57,3^\circ$ bo 2π radianów = 360°

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{\text{dł. łuku}}{\text{promień}}$$



$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \left[\frac{1}{s}\right] \quad \Big\} \text{ dla danego przedziału}$$

prędkość kątowa $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$ lub $\left[\frac{obr}{s}\right]$.

przyspieszenie kąt. $\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$

w ciągu s obrócił się od 90° $\Rightarrow$ $\omega = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4} \left[\frac{obr}{s}\right]$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

(4) Związki między ruchem postęp. a obrot.

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + at \qquad\qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad\qquad \theta = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$$

$$t = (v - v_0)/a \qquad\qquad t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}$$

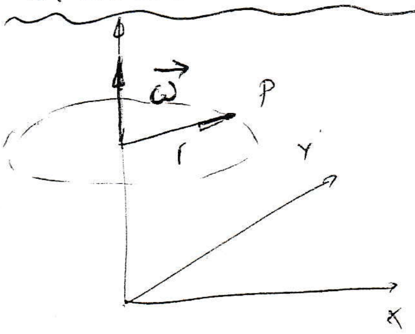
$$x = \frac{v_0(v-v_0)}{a} + \frac{a}{2}\frac{(v-v_0)^2}{a^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\cancel{2v_0}v - 2v_0^2 + v^2 - \cancel{2vv_0} + v_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^2\right)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad\qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta$$

Wielkości wektorowe



$$S = \theta r$$

związek między wielkościami liniowymi a kątowymi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r$$

$$\boxed{v = \omega r}$$

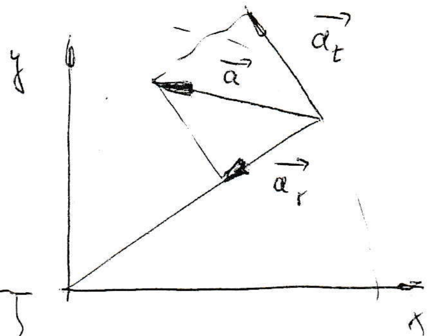
$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} r$$

składowa styczna

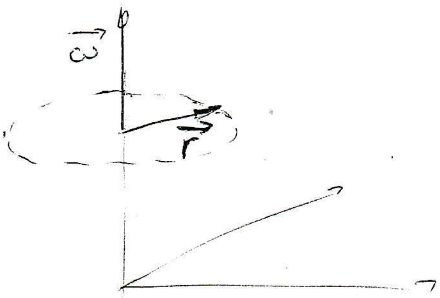
$$\boxed{a_t = \varepsilon r}$$

składowa radialna

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r}}$$



$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$



$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_r}$$

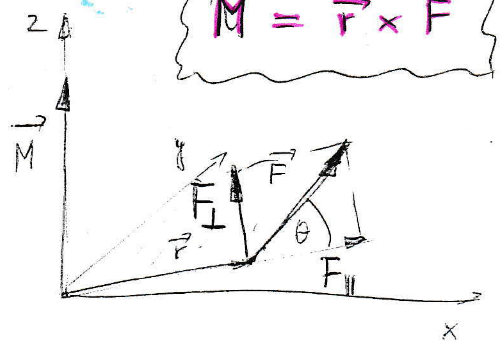
$$\boxed{\vec{a_t} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}} \; ; \; \boxed{\vec{a_r} = \vec{\omega} \times \vec{v}}$$

! reguła prawej dłoni
! lub reguła korkociągu

5 Dynamika ruchu obrotowego I (punkt materialny)

odpowiednikiem siły w ruchu obrotowym jest moment siły

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad M = rF\sin\theta = rF_{\perp}$$

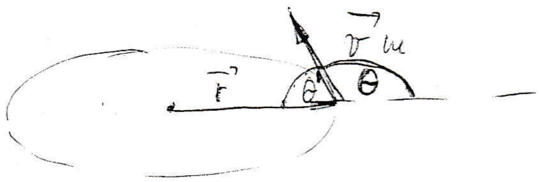


jeśli $\vec{r}$, $\vec{F}$ leżą w płaszczyźnie xy

$\vec{M} = max \iff \vec{r} \perp \vec{F}$

moment pędu

$$\boxed{\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}} \qquad l = rp\sin\theta = rp_{\perp}$$



$\theta' = \pi - \theta$ $\qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ale $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

stąd $\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}}$ zasada zachowania momentu pędu

Zmiana momentu pędu w czasie jest równa momentowi siły działającej na ten punkt.

$$M_x = \frac{dl_x}{dt}; \quad M_y = \frac{dl_y}{dt}; \quad M_z = \frac{dl_z}{dt}$$

Sformułowanie praw Newtona dla ruchu obrotowego

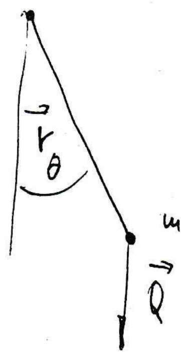
dla układu punktów materialnych

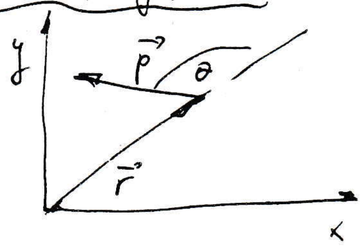
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_n \qquad \vec{M}_{zew} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n$$

$\left\{\vec{F}_{zew.} = \frac{d\vec{P}}{dt}\right\}$ $\qquad \left\{\vec{M}_{zew.} = \frac{d\vec{L}}{dt}\right\}$ możemy sprowadzić do obrotu wokół środka masy podobnie jak ruch

Moment pędu

(1) Pojedyncza cząstka





$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$$l = r p \sin\theta$$

$$l = p r_{\perp} = r p_{\perp}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{= 0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}} \qquad \begin{cases} M_x = \left(\frac{dL_x}{dt}\right)_x \\ M_y = \left(\frac{dL_y}{dt}\right)_y \\ M_z = \left(\frac{dL_z}{dt}\right)_z \end{cases}$$

"zmiana momentu pędu punktu materialnego jest równa momentowi siły działającej na ten punkt"

(2) Układy punktów:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

$$\vec{M}_{zew.} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

(3) Zasada zachowania momentu pędu

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const = \vec{L}_0 \iff \vec{M}_{zew.} = 0$$

bo $\vec{M}_{zew.} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\vec{L}_z = I\vec{\omega} = const \rightarrow I\omega = const$$