

GRANITACJA

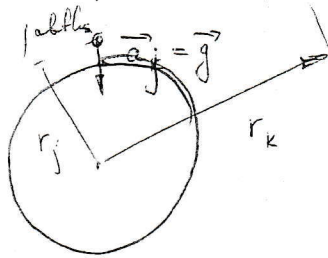
S) M₁ (Venus) 2) M₂ 7) S

Czy istnienie w postaci pływanna spadającego jabłka i ruchu Księżyca?

$\vec{v}$
Księżyca
 $\vec{a}_k \approx \frac{v^2}{r}$

$\{a_k \sim \frac{1}{3600} a_j\}$?

Isaac Newton (1643-1727)
fizyk, astronom, matematyk
- rach. różn. i całk.
- p. powst. wśziemia
- kłp. teoria światła



! opy w opublikowaniu

> Principia < = > Philosophiae naturalis principia mathematica < 1678

$r_j \sim 6400 \text{ km}$
 $r_k \sim 384000 \text{ km} \Rightarrow \frac{r_j}{r_k} \approx 0.01666 \quad \left(\frac{r_j}{r_k}\right)^2 \approx 0.000277 = \frac{1}{3600}$

Czy ogromne masy (Ziemia, Księżyca) można traktować jako masy skupione w jednym punkcie?

D. wydanie pracy zmusił go Halley (kometa Halleya)!
de Morgan (matematyk) nie dawał szans Księżycowi!

$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$

G - stała uniwersalna

prawo powszechnego ciążenia

$G = \left[\frac{L^3}{M T^2} \right]$

$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$

$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$
 $\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$

$r_{12} = r_{21}$

ale $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

akcja - reakcja

Wymiarowanie stałej G (1798)

$G = 6.672 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

dośw. Cavendisha

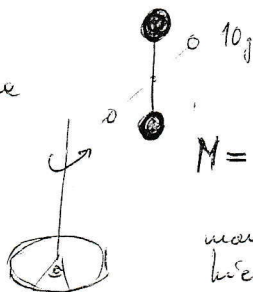
$\Rightarrow F = G \frac{1 \cdot 1}{1^2} = G$

$m_1 = m_2 = 1 \text{ kg} \quad r = 1 \text{ m} \quad \text{ale} \quad m_1 = m_2 = 100 \text{ kg} \quad F = G \times 10^4 = 6.67 \times 10^{-7} \text{ N}$

właśc. dla toru pływ

$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mathcal{H}}}$

$M = I\epsilon = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$



$M = -\mathcal{H} \theta$

moment
wskręcający

$I = \sum m r^2 = 2 \cdot (10 \text{ g}) \cdot (25 \text{ cm})^2$
 $= 1.25 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$\mathcal{H} = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = 8.34 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

$\{M = 2 \frac{G M m}{r} = \mathcal{H} \theta\}$

$$Q = 3.96 \times 10^{-4} \text{ rad.} \approx 0.225^\circ$$

$$S = Qr$$

$$r = 1 \text{ m} \Rightarrow S = 0.396 \text{ cm}$$

$$r = 5 \text{ cm} \Rightarrow s \sim \underline{\underline{2 \text{ cm}}}$$

$$F = \cancel{m}g = G \frac{\cancel{m} M_2}{R_2^2}$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{g R^2}{G M_2} \approx \underline{\underline{5.97 \times 10^{24} \text{ kg}}}$$

$$\rho_2 = \frac{M_2}{\frac{4}{3} \pi R_2^3} \approx 5.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

5 very wicked & wacky!

$\int_2$ div unigra $f_2 \rightarrow$ informa a schia

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Ich habe abgelehnt

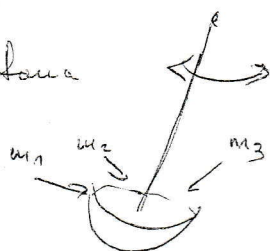
$$F = m_b a$$

opos richu

masa grawi iacyjna
berastadua

$$\frac{m_g}{m_b}$$

Wahacht Newhouse



$$m_1 = m_2 = m_3 \quad (\text{same substance})$$

$$\underline{T_1 = T_2 = T_3 = 2\bar{u} \sqrt{\frac{L}{g}}}$$

1909 (Eötvoš)

$$m_b = m_g$$

$$\approx 5 \times 10^{-9} = \frac{\Delta m}{m} \quad \text{dobitachosť}$$

Zmiany przy sp. ziemskiego

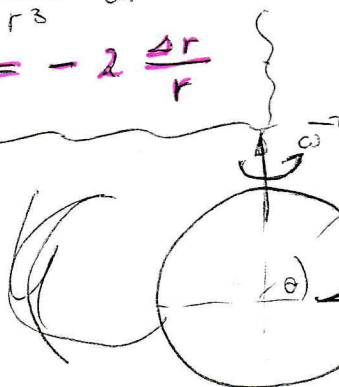
$$dF = -2 \frac{G m_1 m_2}{r^3} dr$$

$$\frac{dF}{F} = -2 \frac{dr}{r} = \frac{dg}{g}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = -2 \frac{\Delta r}{r}$$

freq. 45°

h [m]	g [$\frac{m}{s^2}$]
0	9.806
1 000	9.803
16 000	9.757
100 000	9.60
1 000 000 (sat.)	7.41
300 000 000 (Ks.)	0.0027



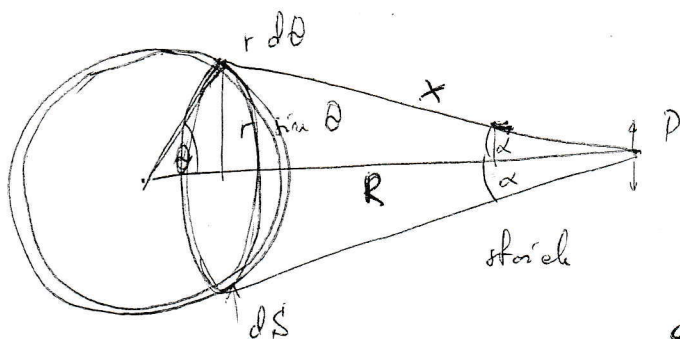
$$g' = g - \omega^2 l_2 \quad (\text{row 1})$$

$$g' = g - \omega^2 l_2 \cos \theta$$

ser.	geogr.	$g \left[\frac{m}{s^2} \right]$
0		9.780
30°		9.793
60°		9.819
80°		9.830
90°		9.832

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx 0.5\%$$

$80 \text{ kg} \pm 0.4 \text{ kg}$



$r d\theta$
□

$$dV = 2\pi r \sin \theta r dr d\theta$$

$$dM = \rho dV$$

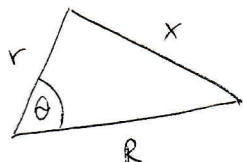
$$dF = G \frac{m dM}{x^2} \cos \alpha$$

$$dF = G \rho 2\pi r^2 \sin \theta \frac{dr d\theta}{x^2} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{R - r \cos \theta}{x}$$

s. 399

tw. cosinusów



$$x^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta$$

$$r \cos \theta = \frac{-x^2 + r^2 + R^2}{2R}$$

$$dF = G \rho 2\pi r^2 \sin \theta \frac{(R - r \cos \theta)}{x}$$

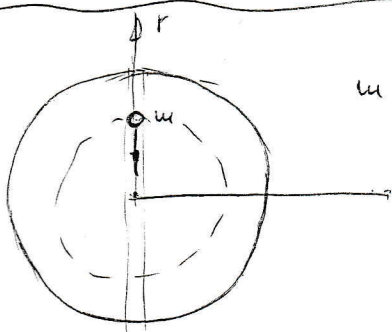
$$2x dx = 2Rr \sin \theta d\theta$$

$$\cancel{2x dx} = \cancel{2Rr} 2R \cos \theta$$

$$\sin \theta d\theta = \frac{x dx}{2Rr}$$

$$dF = G \rho 2\pi r^2 \frac{x dx}{2Rr} \frac{1}{x^2} \left(\frac{r^2 + R^2 - x^2}{2Rr} \right)$$

pycha, ga tak jakby masa zgromadzona w srodku
 Ruch ciata w tunelu przez Ziemię } tylko masa "powinny"
 oddziaływać grawitacyjnie



$$mg' = G \frac{M' m}{r^2}$$

$$M' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Ass

$$g' = G \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{r^2} = G \frac{4}{3} \pi \rho r$$

$$F = ma = -mg'$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{4}{3} \pi G \rho r = 0$$

$$\omega^2 = \frac{4}{3} \pi G \rho \Rightarrow \omega = 2 \sqrt{\frac{\pi G \rho}{3}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \sqrt{3}}{2 \sqrt{\pi G \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G \rho}}$$

$$\rho \sim 5.5 \frac{g}{cm^3} = 5.5 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

$$T \sim 84 \text{ min}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

prawo Gaussa dla

pola gravit.



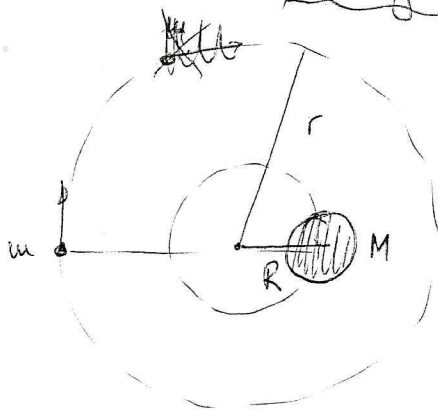
$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -\sum_i m_i$$

$$\alpha = 4\pi G$$

$$G \frac{M}{r^2} \oint dS = 4\pi G M$$

$$\left\{ g = G \frac{M}{r^2} \right\}$$

Ludzy planet i satelitów



Stożek masy

$$m r = M R$$

$$\frac{m}{M} = \frac{R}{r}$$

$$\frac{G M m}{(L+r)^2} = m \omega^2 r$$

$$G M_s = \omega^2 r^3$$

$$R \ll r$$

$$G M_s = \frac{4\pi^2}{T^2} r^3 \Rightarrow T^2$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G M_s}{4\pi^2}$$

Prawa ruchu planet Koplera (1571-1630)

obserwacje Tycho const.
de Brahe (1546-1601)

- ① Planety poruszają się po orbitach eliptycznych / w jednym kierunku względem się Słońca.
- ② Prawo pól (promień wodzący zmienia się jednakowo w jednostkach czasu)
- ③ Prawo okresów

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G M_s}{4\pi^2}$$

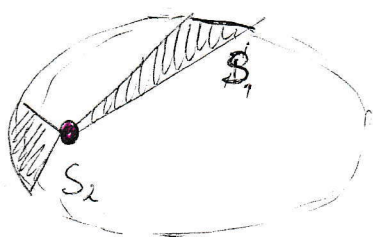
np. $T = 365 \text{ dni} = 3.15 \times 10^7 \text{ s}$
 $r = 1.5 \times 10^{11} \text{ m} = 150 000 000 \text{ km}$

$$\Rightarrow M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$S_1 = S_2$$

$$S = \frac{1}{2} \frac{(\omega r \Delta t) r}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega r^2 = \text{const}$$

$$L = m v r = m \omega r^2 = \text{const}$$



[moment pędu] jest stały!

prawo zach. momentu pędu

Pole grawitacyjne

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

(natężenie pola graw)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \Rightarrow E_p = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta E_p^{ab} = -W_{ab}$$

$$E_p = - \left(GMm \int \frac{dr}{r^2} \right) = - GMm \frac{-1}{-2+2} \frac{1}{r} \Big|_0^r = \underline{\underline{-\frac{GMm}{r}}}$$

$$F_\infty = 0 = - \frac{GMm}{r^2} \text{ (przyjajmyca stała)}$$

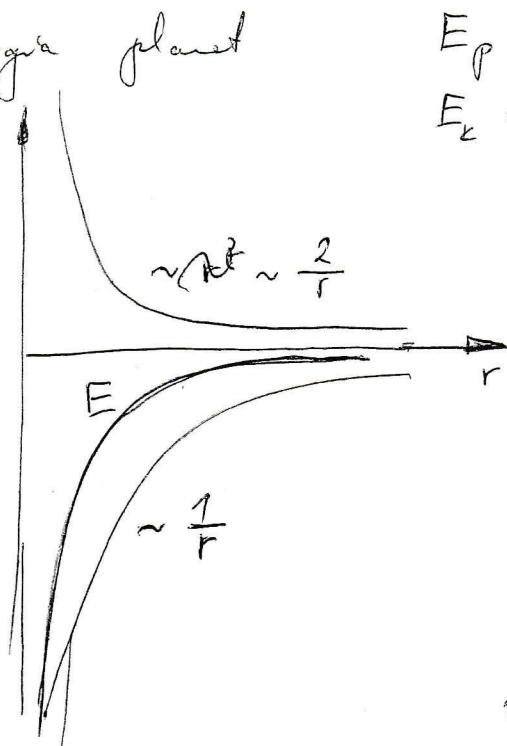
$$E_{p\infty} = 0$$

potencjał $\Rightarrow V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = \underline{\underline{-\frac{GM}{r}}}$

$$E_p(r) = -W_{\infty r}$$

Energia planet

wzrost



$$E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{GM}{2r}$$

ale $GM = \omega^2 r^2 r$
 $\omega^2 r^2 = \frac{GM}{r}$

$$\text{bo } \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$E = E_k + E_p = -\frac{GMm}{2r}$$

$$\underline{\underline{E_p + 2E_k = 0}} \quad \text{tw. o wirach}$$

podstawa kosmonautyki

I prędkość kosmiczna - odwołanie od Ziemi

Ziemia

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

II prędkość kosm.

- potaniecie przyspieszenia ziemskiego

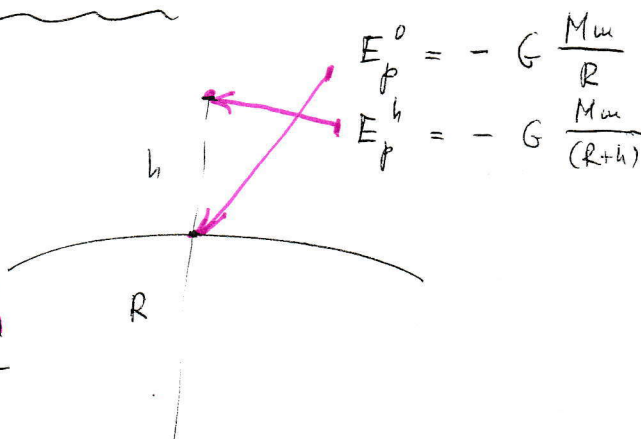
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2} v_I}}$$

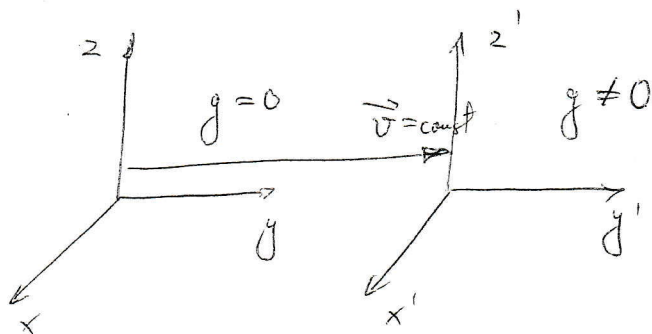
! dla małego $E_p = mgh$!

$$\Delta E_p = E_p^h - E_p^0 = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

$$= GMm \frac{R+h-R}{R(R+h)} \approx \underline{\underline{G \frac{Mm}{R^2} h = mgh}}$$

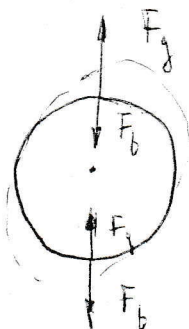


Zasada równoważności



~~LUCH FALOWY~~

Pływa



przyspieszenie pływa

$$a_g \sim -26 \text{ m/s}^2 R / r_k^3$$

odległość Ziemia-Księżyc

Wkład biegunowy

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

$$e = 0$$

okrąg

$$0 < e < 1$$

elipsa

$$e = 1$$

parabola

$$e > 1$$

hiperbola

ruchy planet w polu $V(r) = -\frac{k}{r}$

$$V(r) = -\frac{GM}{r}$$

$$k = GM$$

ruch po krzywej stałozmiennej

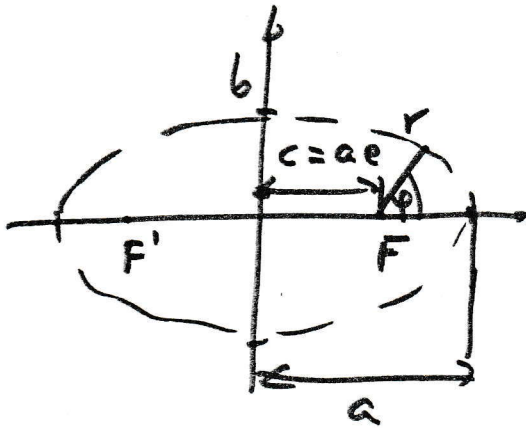
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

$$p = \frac{L^2}{k m^2} \quad \text{parameter orbit}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2 m^3}} \quad \text{eccentricity}$$

E - energy const
 L - moment pędu

① $E < 0 \Rightarrow e < 1 \Rightarrow$ ellipse



$$p = \frac{b^2}{a^2}$$

$$e = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = ae$$

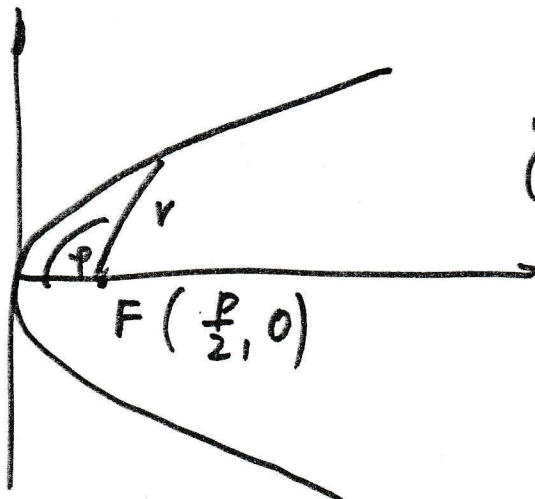
$$E = -\frac{k m}{2a}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

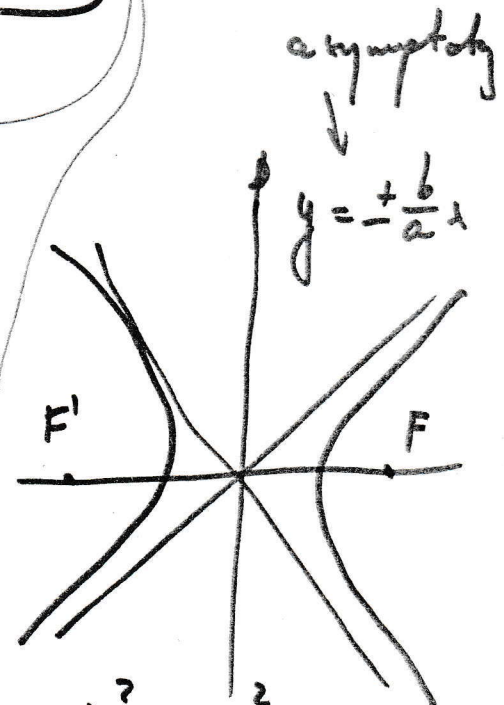
② $E = 0 \Rightarrow e = 1 \Rightarrow$ parabola

pole elipsy

$$S = \pi a b$$



$$y^2 = 2px$$



asymptoty
 $y = \pm \frac{b}{a} x$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$e = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

③ $E > 0 \Rightarrow e > 1 \Rightarrow$ hyperbola

$$F = (c, 0)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$E = \frac{k m}{2a}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$