

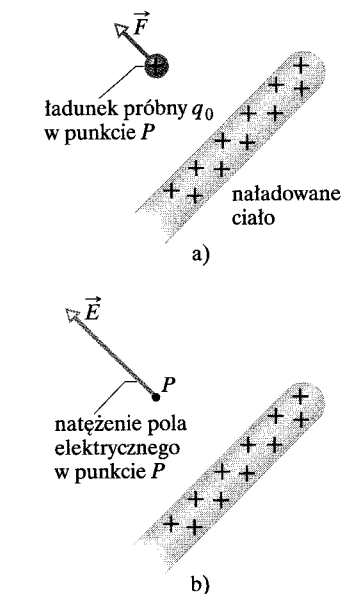
23 Pole elektryczne

Podczas częstych wybuchów wulkanu Sakurajima w Japonii, nad kraterem wulkanu powstają liczne wyładowania elektryczne (iskry), które rozświetlają niebo i wysyłają fale dźwiękowe przypominające grzmoty. Nie są to jednak błyskawice odpowiadające burzy z piorunami, z naelektryzowanymi chmurami kropli wody, rozładowującymi się ku powierzchni ziemi. Jest to coś innego.

Jak elektryzuje się przestrzeń nad wulkanem i czy można ustalić, w którą stronę lecą iskry: w górę (od krateru), czy w dół (do krateru)?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





Rys. 23.1. a) Dodatni ładunek próbny q_0 umieszczono w punkcie P w pobliżu naładowanego ciała. Na ładunek próbny działa siła elektrostatyczna $\vec{F}$. b) Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$, wytworzonego przez naładowane ciało w punkcie P

Tabela 23.1. Wybrane pola elektryczne

Sytuacja fizyczna	Natężenie pola (N/C)
Na powierzchni jądra uranu	$3 \cdot 10^{21}$
W atomie wodoru w odległości $5,29 \cdot 10^{-11}$ m od jądra	$5 \cdot 10^{11}$
Przebiecie elektryczne w powietrzu	$3 \cdot 10^6$
W pobliżu naładowanego bębna fotokopiarki	10^5
W pobliżu naładowanego grzebienia	10^3
W dolnej warstwie atmosfery	10^2
W przewodniku miedzianym w domowej instalacji elektrycznej	10^{-2}

23.1. Jeszcze o ładunkach i siłach

Założmy, że umieszczamy gdzieś punktowy ładunek dodatni q_1 i następnie zbliżamy do niego drugi dodatni ładunek punktowy q_2 . Z prawa Coulomba wiemy, że q_1 oddziałuje na q_2 odpychającą siłą elektrostatyczną i mając potrzebne dane, możemy określić wartość i kierunek tej siły. Może jednak nękać nas pytanie: skąd ładunek q_1 „wie” o obecności ładunku q_2 ? Skoro ładunki się nie stykają, to jak q_1 może działać siłą na q_2 ?

Na pytanie o *działanie na odległość* można odpowiedzieć, że ładunek q_1 powoduje powstanie **pola elektrycznego** w otaczającej go przestrzeni. W dowolnym punkcie P przestrzeni pole to można scharakteryzować za pomocą wektora o określonej wartości i kierunku. Jego wartość zależy od wartości ładunku q_1 i odległości między punktem P i ładunkiem q_1 . Kierunek zależy od położenia punktu P względem ładunku q_1 i znaku ładunku q_1 . Gdy więc umieścimy ładunek q_2 w punkcie P , ładunek q_1 oddziałuje z ładunkiem q_2 za pośrednictwem pola elektrycznego w punkcie P . Wartość i kierunek wektora pola elektrycznego określają wartość i kierunek siły działającej na ładunek q_2 .

Inne pytanie, dotyczące oddziaływania na odległość nasuwa się, gdy przesuniemy ładunek q_1 , powiedzmy, w kierunku ładunku q_2 . Na podstawie prawa Coulomba stwierdzamy, że gdy ładunek q_1 jest bliżej ładunku q_2 , to odpychająca siła elektrostatyczna, działająca na q_2 musi być większa, i tak jest. Może nas więc nękać kolejne pytanie: czy pole elektryczne w punkcie, w którym znajduje się ładunek q_2 , i stąd siła działająca na ładunek q_2 , zmieniają się natychmiast, wraz ze zmianą położenia źródła pola?

Odpowiedź na to pytanie jest przecząca. Informacja o ruchu ładunku q_1 rozchodzi się od ładunku q_1 (we wszystkich kierunkach) w postaci fali elektromagnetycznej, z prędkością światła c . Zmiana wektora pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek q_2 , a stąd i zmiana siły, działającej na ładunek q_2 pojawia się, gdy fala dotrze do ładunku q_2 .

23.2. Pole elektryczne

Temperatura w każdym punkcie pokoju ma określoną wartość. Można ją zmierzyć w dowolnym punkcie lub układzie punktów, umieszczając tam termometr. Otrzymany rozkład temperatur nazywamy *polem temperatury*. W podobny sposób można sobie wyobrazić *pole ciśnienia* w atmosferze: charakteryzuje je rozkład wartości ciśnienia powietrza, podający jego wartość w każdym punkcie atmosfery. Te dwa przykłady odpowiadają *polom skalarnym*, ponieważ temperatura i ciśnienie powietrza są wielkościami skalarnymi.

Pole elektryczne jest *polem wektorowym*, gdyż jego scharakteryzowanie wymaga określenia rozkładu *wektorów*, czyli podania wektora dla każdego punktu obszaru wokół naładowanego ciała, np. naładowanego pręta. Pole elektryczne w pewnym punkcie w pobliżu naładowanego ciała, np. punkcie P na rysunku 23.1a, możemy zdefiniować w następujący sposób: najpierw umieszczamy *dodatni* ładunek q_0 , zwany *ładunkiem próbnym* w tym punkcie, a następnie mierzymy siłę elektrostatyczną $\vec{F}$, która działa na ładunek próbny. Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$, wytworzonego przez naładowane ciało w punkcie P definiujemy wtedy wzorem:

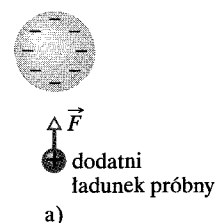
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (\text{natężenie pola elektrycznego}). \quad (23.1)$$

Wartość natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w punkcie P wynosi więc $E = F/q_0$, a kierunek natężenia $\vec{E}$ jest taki sam jak kierunek siły $\vec{F}$ działającej na *dodatni* ładunek próbny. Na rysunku 23.1b przedstawiono natężenie pola elektrycznego w punkcie P w postaci wektora o początku w punkcie P . Aby zdefiniować pole elektryczne w pewnym obszarze, należy podobnie zdefiniować jego natężenie we wszystkich punktach obszaru.

Jednostką natężenia pola elektrycznego w układzie SI jest niuton na kulomb (N/C). W tabeli 23.1 podano wartości natężeń pól elektrycznych, jakie występują w kilku sytuacjach fizycznych.

Chociaż do definicji natężenia pola elektrycznego naładowanego ciała używamy dodatniego ładunku próbnego, to pole istnieje niezależnie od tego ładunku. Pole w punkcie P na rysunku 23.1b istniało zarówno przed, jak i po umieszczeniu tam ładunku próbnego (rys. 23.1a). (Zakładamy, że obecność ładunku próbnego nie wpływa na rozkład ładunku w naładowanym ciele i stąd nie zmienia się natężenie definiowanego pola elektrycznego).

Badanie roli pola elektrycznego w oddziaływaniu między naładowanymi ciałami sprowadza się do dwóch zadań: 1) obliczenia natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez dany rozkład ładunku i 2) obliczenia siły, jaką dane pole działa na umieszczony w nim ładunek. Pierwszym zadaniem dla kilku rozkładów ładunku zajmijmy się w paragrafach od 23.4 do 23.7, a drugim — w paragrafach 23.8 i 23.9, rozważając jeden lub dwa ładunki punktowe w polu elektrycznym. Najpierw jednak przedyskutujemy graficzny sposób przedstawiania pola elektrycznego.

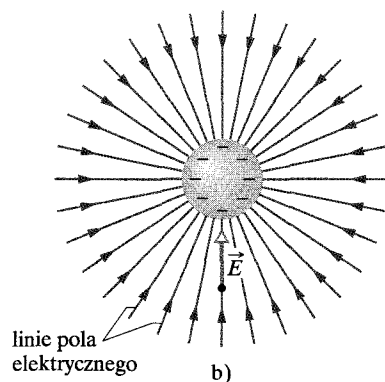


23.3. Linie pola elektrycznego

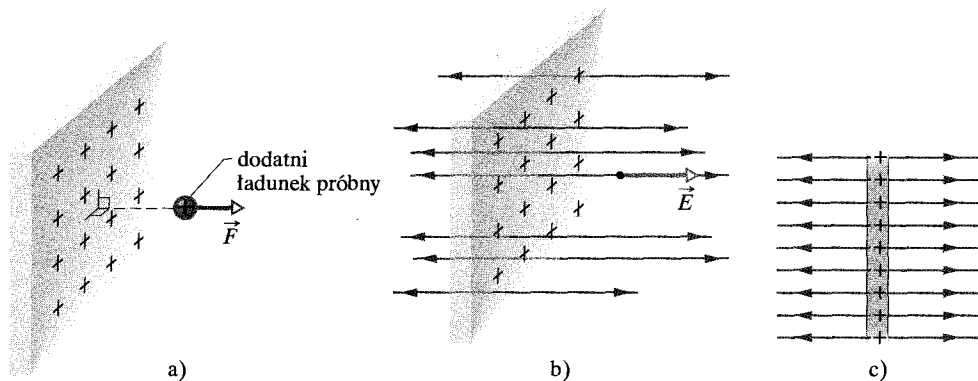
Michael Faraday, który wprowadził ideę pola elektrycznego w XIX w., wyobrażał sobie, że przestrzeń wokół naładowanego ciała jest jak gdyby wypełniona *liniami sił*. Chociaż nie przypisujemy tym liniom, zwanym obecnie **liniami pola elektrycznego**, realnego istnienia, to nadal ułatwiają one graficzne przedstawienie rozkładu natężenia pola elektrycznego.

Związek między liniami pola i wektorami natężenia pola elektrycznego jest następujący: 1) w dowolnym punkcie kierunek linii pola (gdy jest ona prostą) lub stycznej do linii pola (gdy linia jest zakrzywiona) określa kierunek wektora $\vec{E}$ w tym punkcie, 2) linie pola są tak narysowane, że liczba linii na jednostkę powierzchni, mierzona w płaszczyźnie prostopadłej do linii, jest proporcjonalna do *wartości* wektora $\vec{E}$. Drugi związek oznacza, że tam, gdzie linie pola są blisko siebie, wartość E jest duża, a tam, gdzie są daleko od siebie, wartość E jest mała.

Na rysunku 23.2a przedstawiono kulę, na której znajduje się jednorodnie rozłożony ładunek ujemny. Jeśli umieścimy *dodatni* ładunek próbny gdziekolwiek blisko kuli, to będzie na niego działać siła elektrostatyczna, skierowana *do* środka kuli, jak na rysunku. Innymi słowy, wektory natężenia pola elektrycznego we



Rys. 23.2. a) Na dodatni ładunek próbny znajdujący się w pobliżu jedno-rodnie ujemnie naładowanej kuli działa siła elektrostatyczna $\vec{F}$. b) Wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w miejscu ładunku próbnego i linie pola elektrycznego w przestrzeni w pobliżu kuli. Linie pola skierowane są *do* ujemnie naładowanej kuli. (Zaczynają się one na oddalonych ładunkach dodatnich)



Rys. 23.3. a) Siła elektrostatyczna $\vec{F}$ działająca na dodatni ładunek próbny w pobliżu bardzo dużej nieprzewodzącej płyty o jednej powierzchni jednorodnie naładowanej ładunkiem dodatnim. b) Wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w miejscu ładunku próbnego i linie pola elektrycznego w przestrzeni w pobliżu płyty. Linie pola wychodzą z dodatnio naładowanej płyty. c) Widok z boku sytuacji (b)

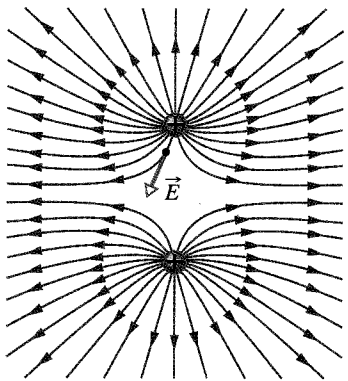
wszystkich punktach w pobliżu kuli są skierowane radialnie do jej środka. Rozkład wektorów przedstawiono na rysunku 23.2b przy zastosowaniu linii pola, których kierunki są takie same, jak kierunki sił i wektorów natężenia pola. Co więcej, oddalanie się od siebie linii pola wraz ze wzrostem odległości od kuli oznacza, że wartość natężenia pola maleje wraz z odległością od środka kuli.

Jeśli kula na rysunku 23.2 byłaby naładowana jednorodnie ładunkiem *dodatnim*, to wektory natężenia pola elektrycznego, a stąd i linie pola elektrycznego we wszystkich punktach w pobliżu kuli byłyby skierowane radialnie *od* kuli. Mamy więc następującą regułę:

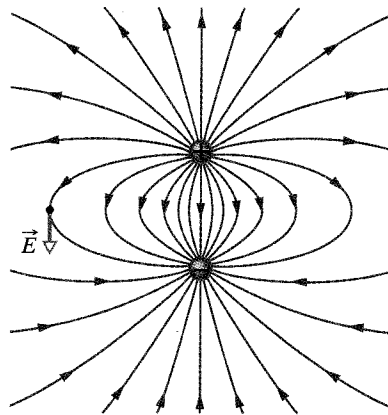
➤ Linie pola elektrycznego wychodzą od ładunku dodatniego (gdzie się zaczynają) i są skierowane ku ładunkowi ujemnemu (gdzie się kończą).

Na rysunku 23.3a przedstawiono fragment nieskończenie dużej, nieprzewodzącej płyty (*płaszczyzny*). Na jednej jej stronie umieszczono jednorodnie rozłożony ładunek dodatni. Jeśli umieścimy dodatni ładunek próbny w dowolnym punkcie w pobliżu płyty z rys. 23.3a, to wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na ładunek próbny będzie prostopadła do płyty, ponieważ siły działające we wszystkich innych kierunkach znoszą się ze względu na symetrię zagadnienia. Ponadto, siła wypadkowa działająca na ładunek próbny będzie skierowana od płyty, jak na rysunku. Stąd wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie przestrzeni po każdej stronie płaszczyzny jest także prostopadły do płyty i skierowany od niej (rys. 23.2b i c). Ładunek jest rozłożony równomiernie na całej płycie, dlatego też wszystkie wektory natężenia pola mają taką samą wartość. Pole elektryczne o takiej samej wartości i takim samym kierunku natężenia w każdym punkcie nazywamy *jednorodnym polem elektrycznym*.

Oczywiście, żadna nieprzewodząca płyta (np. płaska powierzchnia plastikowa) nie jest nieskończenie duża, ale jeśli rozważymy obszar w pobliżu środka rzeczywistej płyty, a nie przy jej brzegach, to linie pola w tym obszarze mają rozkład jak na rysunkach 23.3b i c.



Rys. 23.4. Linie pola dla dwóch jednakowych dodatnich ładunków punktowych. Ładunki odpychają się wzajemnie. (Linie kończą się na odległych ładunkach ujemnych). Aby „zobaczyć” rzeczywisty trójwymiarowy rozkład linii pola, należy w myśli obrócić rozkład tu pokazany wokół osi przechodzącej przez obydwa ładunki. Trójwymiarowy rozkład i reprezentowane przez niego pole elektryczne mają symetrię obrotową wokół tej osi. Pokazano wektor natężenia pola elektrycznego w jednym punkcie; widać, że jest on styczny do linii pola przechodzącej przez ten punkt



Rys. 23.5. Linie pola dla położonych blisko siebie dodatniego i ujemnego ładunku punktowego, o jednakowej wartości ładunków. Ładunki przyciągają się wzajemnie. Rozkład linii pola i reprezentowane przez niego pole elektryczne mają symetrię obrotową wokół osi, przechodzącej przez obydwa ładunki. Pokazano wektor natężenia pola elektrycznego w jednym punkcie; ten jest styczny do linii pola, przechodzącej przez ten punkt

Na rysunku 23.4 przedstawiono linie pola dla dwóch jednakowych ładunków dodatnich, a na rysunku 23.5 — rozkład pola dla dwóch ładunków o jednakowych wartościach, ale o przeciwnych znakach, czyli dla układu, który nazywamy **dipolem elektrycznym**. Chociaż nie będziemy często używać linii pola do opisu ilościowego, to są one bardzo użyteczne do graficznego przedstawienia tego, co się dzieje. Czyż prawie nie „widać”, że ładunki odpychają się na rys. 23.4 i przyciągają się na rys. 23.5?

Przykład 23.1

Jak zmienia się wartość natężenia pola elektrycznego wraz z odległością od środka jednorodnie naładowanej kuli z rysunku 23.2? Użyj argumentów, opartych na pojęciu linii pola elektrycznego.

ROZWIĄZANIE:

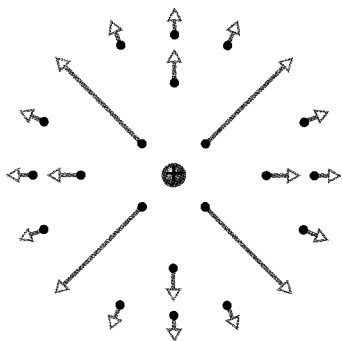
➡ 1. Linie pola są jednorodnie rozłożone wokół kuli i skierowane na zewnątrz od niej. Jeśli więc umieścimy współśrodkową powłokę sferyczną o promieniu r wokół naładowanej kuli,

to wszystkie linie kończące się na naładowanej kuli muszą przejść przez współśrodkową powłokę. Jeśli liczba linii pola wynosi N , to liczba linii przechodzących przez jednostkę powierzchni powłoki wynosi $N/(4\pi r^2)$, bo pole powierzchni sfery wynosi $4\pi r^2$.

➡ 2. Wartość natężenia pola elektrycznego E jest proporcjonalna do liczby linii na jednostkę powierzchni prostopadłej do linii. Powłoka sferyczna jest prostopadła do linii pola, a więc wartość E jest proporcjonalna do $N/(4\pi r^2)$. Odległość r jest jedyną zmienną w tym wyrażeniu, a więc E maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od środka naładowanej kuli.

23.4. Pole elektryczne ładunku punktowego

Aby znaleźć pole ładunku punktowego q (czyli naładowanej cząstki) w dowolnym punkcie, w odległości r od ładunku punktowego, umieszczamy w tym punkcie dodatni ładunek próbny q_0 . Z prawa Coulomba (22.4) wiesz, że wartość siły



Rys. 23.6. Wektory natężenia pola elektrycznego w otoczeniu dodatniego ładunku punkowego

elektrostatycznej, działającej na q_0 wynosi:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||q_0|}{r^2}. \quad (23.2)$$

Siła $\vec{F}$ jest skierowana od ładunku punkowego, jeśli q jest ładunkiem dodatnim, i do ładunku punkowego, jeśli q jest ładunkiem ujemnym. Wartość natężenia pola elektrycznego na podstawie wzoru (23.1) wynosi:

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \quad (\text{ładunek punkowy}). \quad (23.3)$$

Kierunek natężenia $\vec{E}$ jest taki sam, jak kierunek siły działającej na dodatni ładunek próbny: od ładunku punkowego, jeśli q jest ładunkiem dodatnim, i do niego, jeśli ładunek q jest ujemny.

Dla ładunku q_0 wybraliśmy dowolny punkt, a więc wzór (23.3) określa natężenie pola w dowolnym punkcie w otoczeniu ładunku q . Rozkład natężenia pola dla dodatniego ładunku punkowego przedstawiono na rysunku 23.6 za pomocą wektorów (a nie linii pola).

Możemy szybko znaleźć wypadkowe pole elektryczne, pochodzące od więcej niż jednego ładunku punkowego. Jeśli umieścimy dodatni ładunek próbny q_0 w pobliżu n ładunków punkowych $q_1, q_2, \dots, q_n$, to ze wzoru (22.7) siła wypadkowa $\vec{F}_0$ oddziaływania n ładunków punkowych na ładunek próbny wynosi:

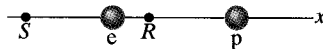
$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n}.$$

Ze wzoru (23.1) możemy obliczyć wypadkowe natężenie pola elektrycznego w miejscu ładunku próbnego, które wynosi:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} + \frac{\vec{F}_{02}}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_{0n}}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n, \quad (23.4)$$

gdzie $\vec{E}_i$ jest natężeniem pola elektrycznego, jakie wytworzyłby tylko sam ładunek punkowy q_i . Ze wzoru (23.4) widać, że zasada superpozycji stosuje się zarówno do natężeń pola elektrycznego, jak i sił elektrostatycznych.

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku przedstawiono umieszczone na osi x proton p i elektron e . Jaki jest kierunek natężenia pola elektrycznego elektronu w: a) punkcie S , b) punkcie R ? Jaki jest kierunek wypadkowego natężenia pola elektrycznego w: c) punkcie R , d) punkcie S ?



Przykład 23.2

Na rysunku 23.7a przedstawiono trzy cząstki o ładunkach $q_1 = +2Q$, $q_2 = -2Q$ i $q_3 = -4Q$, z których każda znajduje się w odległości d od początku układu. Jakie jest wypadkowe natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w początku układu?

ROZWIĄZANIE:

Ładunki q_1, q_2 i q_3 wytwarzają w początku układu pole elektryczne o natężeniach odpowiednio $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ i $\vec{E}_3$, a wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest sumą wektorową $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$. Aby znaleźć tę sumę, musimy najpierw znaleźć wartości

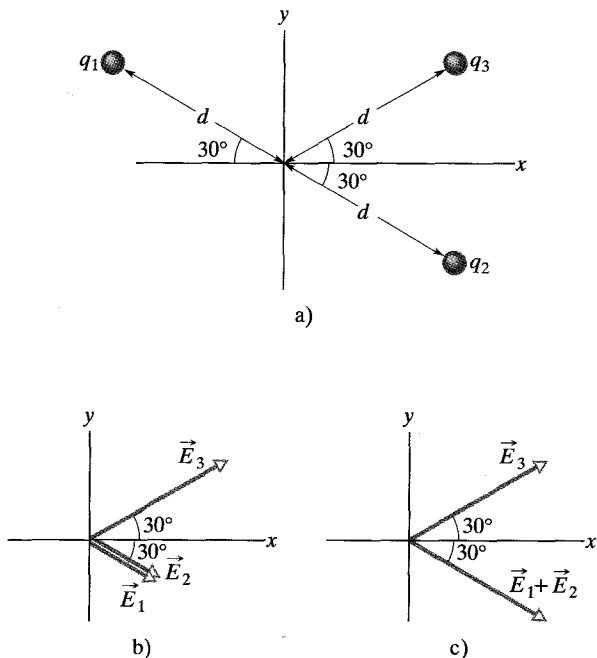
i kierunki tych trzech wektorów natężeń. Aby znaleźć wartość natężenia $\vec{E}_1$, które jest wytworzone przez ładunek q_1 , korzystamy ze wzoru (23.3) i po podstawieniu d zamiast r i $2Q$ zamiast $|q|$ otrzymujemy:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2}.$$

Podobnie obliczamy wartości natężeń $\vec{E}_2$ i $\vec{E}_3$, które wynoszą:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} \quad \text{i} \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}.$$

Następnie musimy znaleźć kierunki trzech wektorów natężenia pola elektrycznego w początku układu. Ładunek q_1 jest ładunkiem dodatnim, dlatego też natężenie wytwarzanego przez niego pola jest skierowane *od* niego. Ładunki q_2 i q_3 są ujemne, a więc natężenia odpowiadających im pól są skierowane *do* nich. Stąd natężenia pól elektrycznych, wytworzonych w środku układu przez te trzy naładowane cząstki mają kierunki przedstawione na rysunku 23.7b. (Uwaga: Początki wektorów umieściliśmy w punkcie, gdzie są obliczane natężenia pól — takie postępowanie zmniejsza prawdopodobieństwo pomyłki).



Rys. 23.7. Przykład 23.2. a) Trzy cząstki o ładunkach q_1 , q_2 i q_3 znajdują się w takiej samej odległości d od początku układu. b) Wektory natężenia pola elektrycznego $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ i $\vec{E}_3$ w początku układu, pochodzące od tych trzech cząstek. c) Wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}_3$ i suma wektorowa $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ w początku układu

Możemy teraz dodać wektorowo natężenia, podobnie jak dawaliśmy siły w przykładzie 22.1c. Warto tu jednak zastosować symetrię w celu uproszczenia obliczeń. Z rysunku 23.7b widzimy, że $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ mają ten sam kierunek. Stąd ich wektorowa suma ma ten sam kierunek, a jej wartość wynosi:

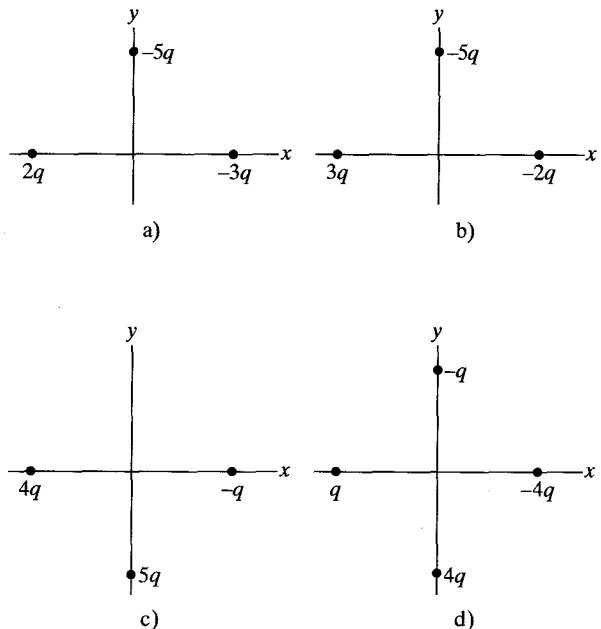
$$E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}.$$

Jest ona równa wartości natężenia $\vec{E}_3$.

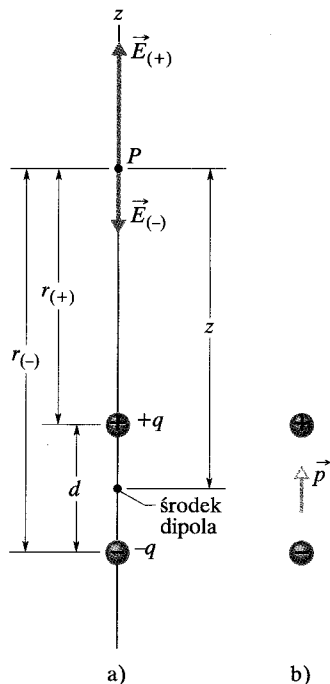
Musimy teraz dodać dwa wektory, $\vec{E}_3$ i sumę wektorową $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, które mają taką samą wartość i są skierowane symetrycznie względem osi x , jak pokazano na rysunku 23.7c. Korzystając z symetrii rysunku 23.7c, wnioskujemy, że składowe y naszych dwóch wektorów, jednakowe co do wartości bezwzględnej, znoszą się, a składowe x , jednakowe co do wartości bezwzględnej, się dodają. Stąd wypadkowe natężenie pola $\vec{E}$ w początku układu jest skierowane w dodatnim kierunku osi x i ma wartość:

$$\begin{aligned} E &= 2E_{3x} = 2E_3 \cos 30^\circ = (2) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2} (0,866) \\ &= \frac{6,93Q}{4\pi\epsilon_0 d^2}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono cztery układy, w których naładowane cząstki są umieszczone w jednakowych odległościach od początku układu. Uszereguj te układy względem wartości wypadkowego natężenia pola elektrycznego w początku układu, zaczynając od największej.



23.5. Pole elektryczne dipola elektrycznego



Rys. 23.8. a) Dipol elektryczny. Wektory natężenia pola elektrycznego $\vec{E}_{(+)}$ i $\vec{E}_{(-)}$ w punkcie P na osi dipola pochodzą od dwóch ładunków dipola. Punkt P znajduje się w odległości $r_{(+)}$ i $r_{(-)}$ od poszczególnych ładunków tworzących dipol. b) Moment dipolowy $\vec{p}$ dipola jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego

Na rysunku 23.8a przedstawiono dwie naładowane cząstki o takiej samej wartości ładunku q , ale przeciwnych znakach, znajdujące się w odległości d . Jak już wspomnieliśmy podczas omawiania rysunku 23.5, taki układ ładunków nazywamy *dipolem elektrycznym*. Znajdźmy pole elektryczne dipola z rysunku 23.8a w punkcie P , w odległości z od środkowego punktu dipola, na osi przechodzącej przez cząstki, zwanej *osią dipola*.

Korzystając z symetrii, wnioskujemy, że natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w punkcie P — a także natężenia pól $\vec{E}_{(+)}$ i $\vec{E}_{(-)}$ wytworzonych przez oddzielne ładunki tworzące dipol — muszą być skierowane wzdłuż osi dipola, którą wybraliśmy za oś z . Stosując zasadę superpozycji dla natężeń pól elektrycznych, znajdujemy wartość E natężenia pola elektrycznego w punkcie P :

$$\begin{aligned} E &= E_{(+)} - E_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{(-)}^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z + \frac{1}{2}d)^2}. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Po algebraicznym przekształceniu wzór ten można zapisać w postaci:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right]. \quad (23.6)$$

Jesteśmy zwykle zainteresowani polem dipola w dużych odległościach w porównaniu z wymiarami dipola, czyli dla $z \gg d$. Przy tak dużych odległościach we wzorze (23.6) mamy $d/(2z) \ll 1$. Możemy wtedy rozwinąć w szereg dwie wielkości w nawiasach w tym równaniu i po skorzystaniu ze wzoru dwumianowego (dodatek E) otrzymujemy:

$$\left[\left(1 + \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) \right].$$

Stąd:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 + \frac{d}{z} + \dots\right) - \left(1 - \frac{d}{z} + \dots\right) \right]. \quad (23.7)$$

Wyrazy, które pominęliśmy, pisząc wzór (23.7), zawierają d/z kolejno w coraz wyższych potęgach. Wartości tych wyrazów są kolejno coraz mniejsze, ponieważ $d/z \ll 1$. Obliczając E dla dużych odległości, możemy je pominąć. W tym przybliżeniu możemy przepisać wzór (22.7) w postaci:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3}. \quad (23.8)$$

Iloczyn qd , który zawiera dwie wielkości charakteryzujące dipol, q i d , jest wartością p wielkości wektorowej zwanej **momentem dipolowym elektrycznym** $\vec{p}$ dipola. (Jednostką momentu $\vec{p}$ jest kulomb razy metr ($C \cdot m$)). Wzór (23.8) możemy więc zapisać w postaci:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} \quad (\text{dipol elektryczny}). \quad (23.9)$$

Za kierunek momentu $\vec{p}$ przyjmujemy kierunek od ujemnego do dodatniego ładunku dipola, zgodnie z rysunkiem 23.8b, dlatego też możemy używać $\vec{p}$ do określania ustawienia dipola.

Ze wzoru (23.9) wynika, że jeśli mierzymy natężenie pola elektrycznego dipola tylko w odległych punktach, to nie możemy znaleźć oddzielnie q i d , lecz tylko ich iloczyn. Natężenie pola w dużych odległościach nie ulegnie zmianie, jeśli na przykład podwoimy q i równocześnie dwukrotnie zmniejszymy d . Moment dipolowy elektryczny jest więc podstawową właściwością dipola.

Chociaż wzór (23.9) jest słuszny tylko dla odległych punktów na osi dipola, to okazuje się, że E dla dipola zmienia się proporcjonalnie do $1/r^3$ dla *wszystkich* odległych punktów, niezależnie od tego, czy leżą one na osi dipola, czy nie; wielkość r jest tu odległością między rozważanym punktem i środkiem dipola.

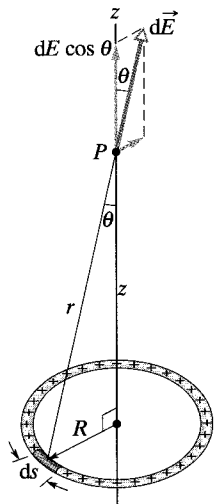
Analiza rysunku 23.8 i linii pola na rysunku 23.5 pokazuje, że natężenie $\vec{E}$ dla odległych punktów na osi dipola, na przykład dla punktu P na rysunku 23.8a zarówno w górnej, jak i w dolnej części osi dipola ma kierunek wektora momentu dipolowego $\vec{p}$.

Ze wzoru (23.9) wynika, że jeśli podwoimy odległość punktu od dipola, to natężenie pola elektrycznego w tym punkcie zmaleje ośmiokrotnie. Jeśli jednak podwoimy odległość od pojedynczego ładunku punktowego, to zgodnie ze wzorem (23.3) natężenie pola elektrycznego zmaleje tylko czterokrotnie. Tak więc natężenie pola elektrycznego dipola maleje szybciej wraz z odległością, niż natężenie pola elektrycznego pojedynczego ładunku. Fizycznym powodem tego szybkiego spadku natężenia pola elektrycznego dipola jest to, że z odległych punktów dipol wygląda jak dwa równe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwne ładunki, które prawie, choć nie całkiem, się pokrywają. Stąd natężenia ich pola elektrycznego w odległych punktach prawie całkiem się znoszą.

23.6. Pole elektryczne naładowanej linii

Rozważaliśmy dotąd pole elektryczne wytwarzane przez jeden ładunek punktowy, lub co najwyżej kilka. Rozważymy obecnie rozkłady ładunków, składające się z bardzo wielu (np. miliardów) leżących blisko siebie ładunków punktowych, rozłożonych wzdłuż linii, na powierzchni, czy w pewnej objętości. Rozkłady takie nazywamy **ciągłymi**, w przeciwieństwie do dyskretnych. Takie rozkłady mogą zawierać ogromną liczbę ładunków punktowych, dlatego też wytwarzane przez nie pola elektryczne znajdujemy, korzystając z metod analizy matematycznej, a nie przez rozważanie poszczególnych ładunków punktowych. W tym paragrafie omówimy pole elektryczne naładowanej linii, w następnym paragrafie rozważymy naładowaną powierzchnię, a w następnym rozdziale wyznaczymy pole wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli.

Gdy mamy do czynienia z ciągłymi rozkładami ładunku, to wygodnie jest wyrazić ładunek obiektu za pomocą *gęstości ładunku*, a nie całkowitego ładunku. Na przykład, dla naładowanej linii będziemy używać liniowej gęstości ładunku (czyli ładunku na jednostkę długości linii) λ , której jednostką w układzie SI jest kulomb na metr (C/m). W tabeli 23.2 przedstawiono także inne gęstości ładunku, jakich będziemy używać w tym rozdziale.



Rys. 23.9. Pierścień naładowany jednorodnie dodatnio. Element ładunku zajmuje długość ds (znacznie powiększoną dla lepszego obrazu). Element ten wytwarza pole elektryczne o natężeniu $d\vec{E}$ w punkcie P . Składowa natężenia $d\vec{E}$ wzdłuż osi pierścienia wynosi $dE \cos \theta$

Tabela 23.2. Niektóre wielkości określające rozkład ładunku elektrycznego

Nazwa	Symbol	Jednostka SI
Ładunek	q	C
Liniowa gęstość ładunku	λ	C/m
Powierzchniowa gęstość ładunku	σ	C/m ²
Objętościowa gęstość ładunku	ρ	C/m ³

Na rysunku 23.9 przedstawiono cienki pierścień o promieniu R , naładowany jednorodnie dodatnio o liniowej gęstości ładunku λ na całym obwodzie. Możemy sobie wyobrazić, że pierścień jest z plastiku, lub jakiegoś innego izolatora, i ładunki są umieszczone w poszczególnych jego punktach. Jakie jest natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w punkcie P , w odległości z od płaszczyzny pierścienia, leżącym na osi pierścienia?

Aby znaleźć odpowiedź, nie możemy bezpośrednio zastosować wzoru (23.3), który określa natężenie pola ładunku punktowego, gdyż ładunek rozmieszczony na pierścieniu nie jest oczywiście ładunkiem punktowym. Możemy jednak w myśli podzielić ładunek na pierścieniu na nieskończenie małe elementy, które zachowują się jak ładunki punktowe, i potem zastosować wzór (23.3) do każdego z nich. Możemy następnie dodać natężenia pola elektrycznego, wytworzonego w punkcie P przez poszczególne elementy. Suma wektorowa tych wszystkich natężeń daje nam natężenie pola, wytwarzanego w punkcie P przez pierścień.

Niech ds będzie długością (wzdłuż łuku) elementu pierścienia. Ponieważ λ jest ładunkiem przypadającym na jednostkę długości, to taki element ma ładunek o wartości:

$$dq = \lambda ds. \quad (23.10)$$

Ten ładunek wytwarza natężenie pola $d\vec{E}$ w punkcie P , który znajduje się w odległości r od elementu. Traktując ten element jak ładunek punktowy i korzystając ze wzoru (23.10), możemy napisać wzór (23.3) dla wartości $d\vec{E}$ w postaci:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}. \quad (23.11)$$

Zgodnie z rysunkiem 23.9 możemy zapisać wzór (23.11) jako:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)}. \quad (23.12)$$

Na rysunku 23.9 pokazano, że wektor $d\vec{E}$ jest skierowany pod kątem θ do osi, którą wybraliśmy jako oś z i ma składową prostopadłą i równoległą do tej osi.

Każdy element ładunku pierścienia wytwarza natężenie pola $d\vec{E}$ w punkcie P , o wartości danej wzorem (23.12). Wszystkie wektory $d\vec{E}$ mają identyczne składowe równoległe do osi, zarówno co do wartości, jak i kierunku. Składowe prostopadłe wektorów $d\vec{E}$ są identyczne co do wartości, ale skierowane w różnych kierunkach. Dla każdej składowej prostopadłej skierowanej w danym kierunku istnieje inna skierowana przeciwnie. Suma takiej pary składowych, podobnie jak suma wszystkich innych par przeciwnie skierowanych składowych, jest równa zeru.

Składowe prostopadłe znoszą się więc i nie musimy ich brać pod uwagę. Pozostają składowe równoległe, które mają ten sam kierunek i wypadkowe natężenie pola w punkcie P jest ich sumą.

Składowa równoległa wektora $d\vec{E}$, pokazanego na rysunku 23.9, ma wartość $dE \cos \theta$. Z rysunku wynika także, że:

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}. \quad (23.13)$$

Ze wzorów (23.13) i (23.12) dla składowej równoległej wektora $d\vec{E}$ otrzymujemy:

$$dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} ds. \quad (23.14)$$

Aby dodać składowe równoległe $dE \cos \theta$, wytworzone przez wszystkie elementy, należy scałkować wzór (23.14) po obwodzie pierścienia od $s = 0$ do $s = 2\pi R$. Jedyną wielkością we wzorze (23.14), która zmienia się podczas całkowania, jest s , a więc pozostałe wielkości można wyłączyć przed znak całki. Całkowanie daje więc:

$$E = \int dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (23.15)$$

Ponieważ λ jest ładunkiem przypadającym na jednostkę długości pierścienia, to człon $\lambda(2\pi R)$ we wzorze (23.15) jest równy całkowitemu ładunkowi q pierścienia. Wzór (23.15) możemy więc zapisać w postaci:

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (\text{naładowany pierścień}). \quad (23.16)$$

Jeśli ładunek umieszczony na pierścieniu jest ujemny, a nie dodatni, jak założyliśmy, to wartość natężenia pola w punkcie P jest w dalszym ciągu dana wzorem (23.16), ale wektor natężenia jest skierowany do pierścienia zamiast od pierścienia.

Sprawdźmy wzór (23.16) dla ładunku punktowego, umieszczonego na osi tak daleko, że $z \gg R$. Dla takiego punktu wyrażenie $z^2 + R^2$ we wzorze (23.16) można przybliżyć przez z^2 i wzór (23.16) przyjmuje postać:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \quad (\text{pole naładowanego pierścienia w dużej odległości}). \quad (23.17)$$

Jest to rozsądny wynik, ponieważ przy dużej odległości pierścień „wygląda” jak ładunek punktowy. Jeśli zastąpimy z przez r we wzorze (23.17), to mamy wzór (23.3) dla wartości natężenia pola elektrycznego ładunku punktowego.

Sprawdźmy następnie wzór (23.16) dla punktu, leżącego w środku pierścienia, czyli dla $z = 0$. Ze wzoru (23.16) wynika, że w tym punkcie $E = 0$. Jest to również rozsądny wynik, bo jeśli umieścimy ładunek próbny w środku pierścienia, to działająca na niego wypadkowa siła elektrostatyczna będzie równa zero; siła pochodząca od dowolnego elementu pierścienia będzie się znosić z siłą od elementu po przeciwnej stronie pierścienia. Ze wzoru (23.1) i faktu, że siła w środku pierścienia jest równa zero, wynika, że natężenie pola także jest równe zero.

Przykład 23.3

Na rysunku 23.10a przedstawiono plastikowy pręt naładowany jednorodnie ładunkiem $-Q$. Pręt został wygięty tak, że tworzy łuk okręgu o promieniu r i rozwartości 120° . Oś układu współrzędnych wybieramy w taki sposób, że oś symetrii pręta pokrywa się z osią x , a środek układu znajduje się w środku krzywizny P pręta. Jak przez Q i r wyrazisz natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ pręta w punkcie P ?

ROZWIĄZANIE:

Ze względu na ciągły rozkład ładunku w przecie musimy znaleźć wyrażenie na natężenie pola, wytworzonego przez elementy pręta, a następnie dodać je przez całkowanie. Rozważmy element o długości ds umieszczony nad osią x pod kątem θ (rys. 23.10b). Jeśli λ oznacza liniową gęstość ładunku pręta, to nasz element ds ma ładunek o wartości:

$$dq = \lambda ds. \quad (23.18)$$

Taki element wytwarza pole elektryczne o natężeniu $d\vec{E}$ w punkcie P , który znajduje się w odległości r od elementu. Traktując element jak ładunek punktowy, możemy przedstawić wzór (23.3) dla wartości wektora $d\vec{E}$ w postaci:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}. \quad (23.19)$$

Wektor $d\vec{E}$ jest skierowany do ds , bo ładunek dq jest ujemny.

Wybrany przez nas element ma symetrycznie położony element ds' (obraz zwierciadlany) w dolnej połowie pręta. Natężenie pola elektrycznego $d\vec{E}'$, wytworzonego w punkcie P przez ds' , ma znów wartość opisaną wzorem (23.19), ale wektor natężenia jest skierowany do ds' zgodnie z rysunkiem 23.10b. Jeśli rozłożymy wektory natężenia pola, pochodzącego od ds i ds' na składowe x i y , jak pokazano na rysunku 23.10b, to widzimy, że składowe y znoszą się (ponieważ mają jednakowe wartości i przeciwnie kierunki). Widzimy także, że składowe x mają jednakowe wartości i takie same kierunki.

Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego pręta, należy więc zsumować (przez całkowanie) tylko składowe x natężeń pola od wszystkich elementów pręta. Na podstawie rysunku 23.10b i wzoru (23.9) możemy zapisać składową dE_x od elementu ds w postaci:

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta ds. \quad (23.20)$$

Wzór (23.20) ma dwie zmienne: θ i s . Przed obliczeniem całki musimy pozbyć się jednej z nich. W tym celu zastosujemy związek: $ds = r d\theta$, w którym $d\theta$ jest kątem o wierzchołku w punkcie P , który odpowiada długości łuku ds (rys. 23.10c). Po tym podstawieniu możemy scałkować wzór (23.20) względem kąta θ , od $\theta = -60^\circ$ do $\theta = 60^\circ$. Otrzymujemy wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie P :

$$\begin{aligned} E &= \int dE_x = \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta r d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin \theta]_{-60^\circ}^{60^\circ} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)] = \frac{1,73\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (23.21)$$

(Gdybyśmy przestawili granice całkowania, to otrzymalibyśmy ten sam wynik ze znakiem minus. Całkowanie daje tylko wartość wektora $\vec{E}$, a więc znak nie jest istotny).

W celu obliczenia λ zauważmy, że prętowi odpowiada kąt 120° , czyli $\frac{1}{3}$ kąta pełnego. Długość pręta wynosi więc $2\pi r/3$, a liniowa gęstość ładunku wynosi:

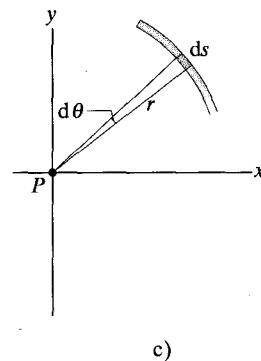
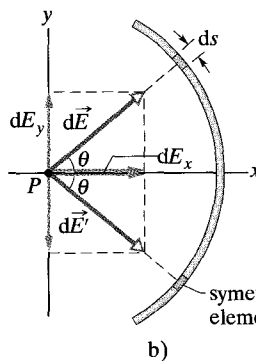
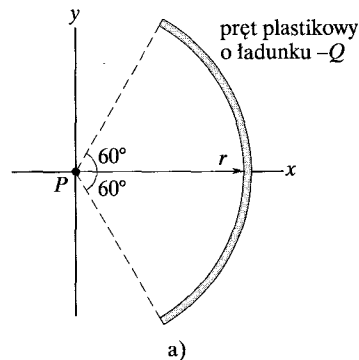
$$\lambda = \frac{\text{ładunek}}{\text{długość}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0,477 Q}{r}.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (23.21), otrzymujemy:

$$E = \frac{(1,73)(0,477 Q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{0,83 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Natężenie $\vec{E}$ jest skierowane do pręta wzdłuż osi symetrii rozkładu ładunku. Używając wektorów jednostkowych, zapisujemy:

$$\vec{E} = \frac{0,83 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{i}.$$



Rys. 23.10. Przykład 23.3. a) Pręt plastikowy o ładunku $-Q$ stanowi część łuku okręgu o promieniu r i kącie środkowym 120° ; punkt P jest w środku krzywizny pręta. b) Element w górnej części pręta, pod kątem θ do osi i długości ds , wytwarza pole elektryczne o natężeniu $d\vec{E}$ w punkcie P . Element ds' , symetryczny do ds względem osi x , wytwarza w punkcie P pole o takiej samej wartości natężenia $d\vec{E}'$. c) Elementowi długości łuku ds odpowiada kąt $d\theta$ o wierzchołku w punkcie P .

Porada 1: Obliczanie natężenia pola pochodzącego od naładowanej linii

Oto szczegółowy opis metody obliczania natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$, wytwarzanego w punkcie P przez jednorodnie naładowaną linię, będącą łukiem okręgu lub odcinkiem prostej. Ogólna strategia polega na wybraniu elementu dq ładunku, znalezieniu $d\vec{E}$ od tego elementu i scałkowaniu $d\vec{E}$ po całej naładowanej linii.

Krok 1. Jeśli naładowana linia jest łukiem okręgu, to jako ds należy wybrać długość łuku elementu rozkładu. Jeśli linia jest prostą biegnącą wzdłuż osi x , to jako dx wybieramy długość elementu. Zaznaczamy ten element na rysunku.

Krok 2. Szukamy związku ładunku dq z długością elementu, zgodnie ze wzorem $dq = \lambda ds$ lub $dq = \lambda dx$. Rozważamy dq i λ dodatnie, nawet jeśli ładunek jest w rzeczywistości ujemny. (Znak ładunku weźmiemy pod uwagę w następnym kroku).

Krok 3. Wyrażamy natężenie pola $d\vec{E}$ wytworzonego w punkcie P przez ładunek dq , korzystając ze wzoru (23.3) i zastępując q w tym równaniu przez λds lub λdx . Jeśli ładunek na linii jest dodatni, to w punkcie P rysujemy wektor $d\vec{E}$ tak, aby był skierowany od dq . Jeśli ładunek jest ujemny, to rysujemy wektor skierowany do dq .

Krok 4. Zawsze szukamy symetrii w rozważanej sytuacji. Jeśli punkt P leży na osi symetrii rozkładu ładunku, to rozkładamy natężenie pola $d\vec{E}$, wytworzonego przez dq na składowe: prostopadłą i równoległą do osi symetrii. Rozważamy następnie drugi element dq' , który znajduje się symetrycznie do dq względem osi symetrii. W punkcie P rysujemy wektor natężenia pola $d\vec{E}'$ wytworzonego przez ten symetryczny element i rozkładamy go na składowe. Jedna ze składowych natężenia wytworzonego przez dq jest składową, która się znosi z odpowiednią składową natężenia pola, wytworzonego przez dq' i nie wymaga dalszych rozważań. Druga składowa natężenia pola wytworzonego przez dq dodaje się do składowej, wytworzonej przez dq' . Sumujemy składowe pochodzące od wszystkich elementów przez całkowanie.

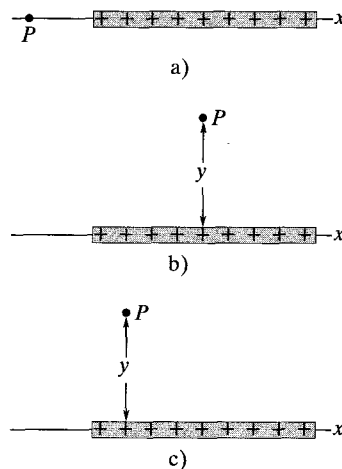
Krok 5. Niżej podajemy cztery ogólne typy jednorodnego rozkładu ładunku, z omówieniem strategii uproszczenia całki z kroku 4.

Pierścień, z punktem P leżącym na osi symetrii, jak na rysunku 23.9. W wyrażeniu na dE zastępujemy r^2 przez $z^2 + R^2$, jak we wzorze (23.12). Wyrażamy składowe natężenia dE przez θ , co wprowadza $\cos \theta$, ale θ jest identyczne dla wszystkich elementów i dlatego nie jest zmienną. Zastępujemy $\cos \theta$, jak we wzorze (23.13) i całkujemy względem s po całym obwodzie pierścienia.

Łuk okręgu z punktem P , leżącym w środku krzywizny, jak na rysunku 23.10. Wyrażamy składowe natężenia pola $d\vec{E}$ przez θ , co wprowadza $\sin \theta$ lub $\cos \theta$. Zastępując ds przez $r d\theta$, otrzymujemy jedną zmienną θ , zamiast dwóch

zmiennych s i θ . Całkujemy względem θ , jak w przykładzie 23.3, od jednego końca łuku do drugiego.

Odcinek prostej z punktem P na jego przedłużeniu, jak na rysunku 23.11a. W wyrażeniu na dE zastępujemy r przez x . Całkujemy względem x od jednego końca naładowanego odcinka do drugiego.

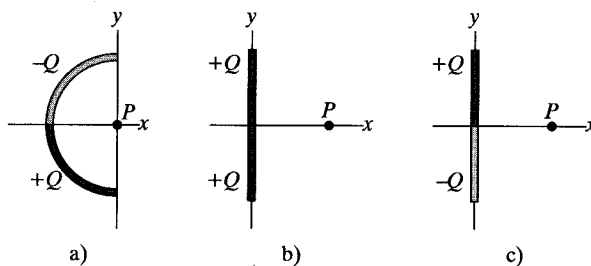


Rys. 23.11. a) Punkt P znajduje się na przedłużeniu naładowanego odcinka. b) Punkt P znajduje się na symetralnej naładowanego odcinka, w odległości y od odcinka. c) Punkt P znajduje się w odległości y od naładowanego odcinka, ale w przeciwnieństwie do (b) nie leży na jego symetralnej

Odcinek prostej z punktem P w odległości y od naładowanego odcinka, jak na rysunku 23.11b. W wyrażeniu na dE zastępujemy r wyrażeniem zawierającym x i y . Jeśli punkt P umieszczony jest na symetralnej naładowanego odcinka, to znajdujemy wyrażenie na dodające się składowe natężenia pola $d\vec{E}$, co wprowadza $\sin \theta$ lub $\cos \theta$. Przejdziemy od dwóch zmiennych x i θ do jednej zmiennej x przez zastąpienie funkcji trygonometrycznej definiującą ją wyrażeniem zawierającym x i y . Obliczamy całkę względem x od jednego do drugiego końca odcinka. Jeśli punkt P nie jest umieszczony na symetralnej, jak na rysunku 23.11c, to tworzymy całkę sumującą składowe dE_x i całkujemy względem x , aby znaleźć E_x . Następnie tworzymy całkę sumującą składowe dE_y i całkujemy względem x , aby znaleźć E_y . Wartość i kierunek natężenia pola $\vec{E}$ wyznaczamy w standardowy sposób, ze składowych E_x i E_y .

Krok 6. Jeden z wybranych wariantów granic całkowania daje dodatni wynik. Przeciwny wybór daje ten sam wynik z przeciwnym znakiem — należy wtedy pominąć znak minus. Jeśli wynik chcemy wyrazić przez całkowity ładunek Q rozkładu, to zastępujemy λ przez Q/L , gdzie L jest długością naładowanej linii. Dla pierścienia L jest długością jego obwodu.

✓ **SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono trzy nieprzewodzące pręty: jeden kołowy i dwa proste. Każdy pręt jest jednorodnie naładowany ładunkiem o wartości bezwzględnej Q w górnej i dolnej połowie jak pokazano na rysunku. Jak skierowane jest wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie P w przypadku każdego pręta?



23.7. Pole elektryczne naładowanej tarczy

Na rysunku 23.12 przedstawiono kołową plastikową tarczę o promieniu R , której górna powierzchnia jest naładowana dodatnio, a gęstość powierzchniowa σ jest stała (zob. tabela 23.2). Ile wynosi natężenie pola elektrycznego w punkcie P , leżącym w odległości z od środka tarczy?

Podzielimy tarczę na współśrodkowe płaskie pierścienie i następnie obliczymy natężenie pola elektrycznego w punkcie P przez dodanie (scałkowanie) składników pochodzących od wszystkich pierścieni. Na rysunku 23.12 przedstawiono jeden taki pierścień o promieniu r i szerokości radialnej dr . Ponieważ σ jest ładunkiem przypadającym na jednostkę powierzchni, to ładunek na pierścieniu wynosi:

$$dq = \sigma dS = \sigma(2\pi r dr), \quad (23.22)$$

gdzie dS jest powierzchnią pierścienia.

Rozwiązaliśmy już problem natężenia pola elektrycznego naładowanego pierścienia. Podstawiając dq ze wzoru (23.22) zamiast q we wzorze (23.16) i zastępując R we wzorze (23.16) przez r , otrzymujemy wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego dE w punkcie P , pochodzącego od naszego płaskiego pierścienia:

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}},$$

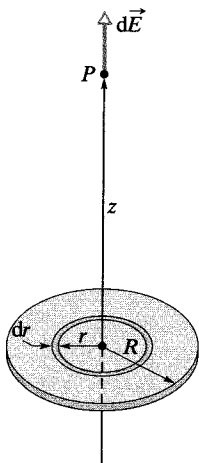
które można zapisać w postaci:

$$dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (23.23)$$

Możemy teraz znaleźć E przez scałkowanie wzoru (23.23) po powierzchni tarczy, czyli przez scałkowanie względem zmiennej r , od $r = 0$ do $r = R$. Zauważ, że z pozostaje stałe przy tym całkowaniu. Otrzymujemy:

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr. \quad (23.24)$$

Aby obliczyć tę całkę, sprowadzamy ją do postaci $\int X^m dX$, podstawiając $X = (z^2 + r^2)$, $m = -\frac{3}{2}$ i $dX = (2r)dr$. Wartość takiej całki wynosi:



Rys. 23.12. Tarcza o promieniu R jest naładowana jednorodnie dodatnio. Pokazany pierścień o promieniu r i szerokości radialnej dr wytwarza pole elektryczne o natężeniu $d\vec{E}$ w punkcie P na osi tarczy

$$\int X^m dX = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

i wzór (23.24) przyjmuje postać:

$$E = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R. \quad (23.25)$$

Uwzględniając granice całkowania we wzorze (23.25), otrzymujemy po przekształceniu wyrażenie:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (\text{naładowana tarcza}) \quad (23.26)$$

na wartość natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego przez płaską, kołową, naładowaną tarczę w punktach leżących na jej osi. (Przy obliczaniu całki przyjęliśmy $z \geq 0$).

Jeśli przyjmiemy, że $R \rightarrow \infty$ przy ustalonej skończonej wartości z , to drugi człon w nawiasach we wzorze (23.26) będzie dążył do zera i wzór ten sprowadzi się do postaci:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{nieskończona płaszczyzna}). \quad (23.27)$$

Jest to wartość natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez nieskończoną płaszczyznę, na przykład przez naładowaną jednorodnie z jednej strony płytę z izolatora takiego, jak plastik. Linie pola elektrycznego w takiej sytuacji są przedstawione na rysunku 23.3.

Wzór (23.27) otrzymujemy także, jeśli przyjmiemy $z \rightarrow 0$ we wzorze (23.26), przy ustalonym skończonym R . Wynik ten dowodzi, że w punktach bliższych tarczy natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez tarczę jest takie samo jak w przypadku tarczy o nieskończonym promieniu.

23.8. Ładunek punktowy w polu elektrycznym

W poprzednich czterech paragrafach zajmowaliśmy się pierwszym z naszych dwóch zadań: przy danym rozkładzie ładunku znajdowaliśmy natężenie pola elektrycznego, wytwarzanego przez ten ładunek w otaczającej go przestrzeni. Obecnie zajmiemy się drugim zadaniem: określeniem, co stanie się z naładowaną cząstką, gdy znajdzie się w polu elektrycznym, wytworzonym przez inne stacjonarne lub powoli poruszające się ładunki.

Otóż na naładowaną cząstkę będzie działać siła elektrostatyczna, określona następującym wzorem:

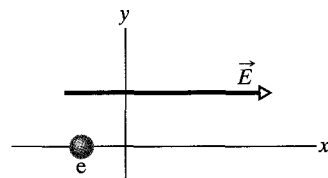
$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad (23.28)$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki (z uwzględnieniem jego znaku), a $\vec{E}$ jest natężeniem pola elektrycznego, wytworzonego przez pozostałe ładunki w miejscu, w którym znajduje się cząstka. (Natężenie to *nie* uwzględnia pola wytworzonego przez samą cząstkę — aby odróżnić te dwa pola, pole działające na cząstkę we

wzorze (23.28) nazywa się często *polem zewnętrznym*. Naładowana cząstka (lub naładowane ciało) nie podlega oddziaływaniu swego własnego pola elektrycznego. Na podstawie wzoru (23.28) możemy powiedzieć, że:

➤ Siła elektrostatyczna $\vec{F}$, działająca na cząstkę umieszczoną w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ ma kierunek natężenia $\vec{E}$, jeśli ładunek cząstki q jest dodatni, i ma przeciwny kierunek, jeśli ładunek q jest ujemny.

✓ **SPRAWDZIAN 4:** a) Jak skierowana jest siła elektrostatyczna działająca na elektron i pochodząca od pola elektrycznego o natężeniu przedstawionym na rysunku? b) W którym kierunku elektron będzie przyspieszany, jeśli przed wejściem w obszar pola elektrycznego poruszał się równoległe do osi y ? c) Jeśli elektron poruszał się początkowo w prawo, to czy jego prędkość wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie stała?



Pomiar ładunku elementarnego

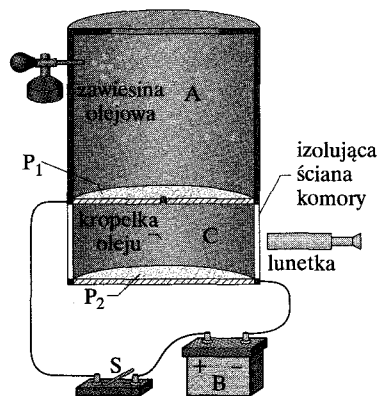
Równanie (23.28) stanowi podstawę pomiaru ładunku elementarnego e , jakiego dokonał fizyk amerykański Robert A. Millikan w latach 1910–1913. Na rysunku 23.13 przedstawiono używaną przez niego aparaturę. Gdy maleńkie kropelki oleju zostaną wstrzyknięte do komory A, niektóre z nich zostaną w czasie tego procesu naładowane dodatnio lub ujemnie. Przeanalizujemy kropelkę, która przechodzi na dół przez mały otwór w płycie P_1 do komory C i założmy, że kropelka ma ujemny ładunek q .

Jeśli klucz S na rysunku 23.13 jest otwarty (jak w narysowanym położeniu), to źródło B nie wytwarza pola elektrycznego w komorze C. Jeśli jest zamknięty (istnieje połączenie między komorą C i dodatnim biegunem źródła), to powstaje nadmiarowy ładunek dodatni na płycie przewodzącej P_1 i nadmiarowy ładunek ujemny na płycie przewodzącej P_2 . W wyniku naładowania płyt, w komorze C powstanie pole elektryczne o natężeniu $\vec{E}$, skierowanym w dół. Zgodnie ze wzorem (23.28) pole to działa siłą elektrostatyczną na każdą naładowaną kropelkę, która pojawi się w komorze, oraz wpływa na jej ruch. W szczególności, nasza ujemnie naładowana kropelka zacznie poruszać się do góry.

Analizując ruch kropelek oleju przy otwartym i zamkniętym kluczu Millikan określił wielkość ładunku q i odkrył, że wartości q były zawsze dane przez:

$$q = ne, \quad \text{dla } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (23.29)$$

gdzie e jest stałą podstawową, równą $1,60 \cdot 10^{-19}$ C i zwaną *ładunkiem elementarnym*. Doświadczenie Millikana jest przekonującym dowodem skwantowania ładunku. Częściowo za tę pracę w 1923 roku Millikan otrzymał nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki. Współczesne pomiary ładunku elementarnego opierają się na różnych powiązanych ze sobą doświadczeniach, znacznie dokładniejszych niż pionierski eksperyment Millikana.



Rys. 23.13. Aparatura do pomiaru ładunku elementarnego e w doświadczeniu Millikana z kropelkami oleju. Gdy naładowana kropelka oleju przejdzie do komory C przez otwór w płycie P_1 , na jej ruch wpływa zamknięcie lub otwarcie klucza S , czyli włączenie lub wyłączenie pola elektrycznego w komorze C. Lunetka służy tu do oglądania kropli i pozwala śledzić jej ruch

Drukarka atramentowa

Potrzeba bardzo szybkiego i dobrej jakości druku spowodowała poszukiwanie innego sposobu, niż stosowane w standardowych maszynach do pisania drukowanie uderzeniowe. Jednym z takich sposobów jest tworzenie liter przez wtryskiwanie maleńkich kropelek atramentu na papier.

Na rysunku 23.14 przedstawiono ujemnie naładowaną kropelkę, która porusza się między dwiema przewodzącymi płytkami odchylającymi, między którymi wytworzono jednorodne pole elektryczne o natężeniu $\vec{E}$, skierowanym w dół. Kropelka jest odchylana do góry zgodnie ze wzorem (23.28) i pada na papier w punkcie, którego położenie jest określone przez wartość natężenia $\vec{E}$ i ładunku q kropelki.

W praktyce wartość E jest stała i położenie kropelki jest określone przez ładunek q , przekazany kropelce w układzie ładowania, przez który kropelka musi przejść przed wejściem do układu odchylającego. Układ ładowania jest z kolei aktywowany elektronicznie, za pomocą sygnałów kodujących drukowany tekst czy rysunek.

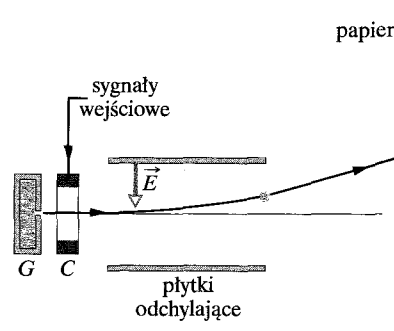
Błyski wulkanów

Podczas wybuchu wulkan Sakurajima, przedstawiony na fotografii na początku tego rozdziału, wyrzuca popioły do atmosfery. Popioły powstają wtedy, gdy para, w którą zamienia się gwałtownie woda w wulkanie w wyniku przepływu gorącej lawy, kruszy skały ulegające następnie spaleni. Przejście wody w parę i eksplozja skały powodują rozdzielanie się w niej dodatnich i ujemnych ładunków. Gdy para i popioły dostają się do atmosfery, tworzą obłok, w którym występują zarówno obszary z ładunkiem dodatnim, jak i ujemnym.

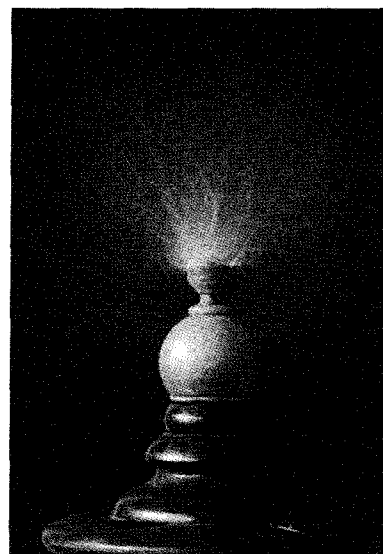
Przy wzroście wielkości tych obszarów rośnie natężenie pól elektrycznych między sąsiednimi obszarami i między nimi a kraterem wulkanu. Gdy natężenie osiągnie wartość około $3 \cdot 10^6$ N/C, w powietrzu następuje *przebiecie elektryczne* i zaczyna płynąć prąd elektryczny. Chwilowe tory przewodzące pojawiają się w powietrzu tam, gdzie pole elektryczne zjonizowało cząsteczki powietrza, uwalniając część ich elektronów. Elektrony te, przyspieszane przez pole, zderzają się na swej drodze z cząsteczkami powietrza, co powoduje, że cząsteczki emitują światło. Możemy zobaczyć te krótkie tory, zwane zwykle *iskrami*, właśnie w wyniku emisji światła. (*Iskrzenie* w małej skali możemy zauważyć np. wokół naładowanej metalowej czaszy na rysunku 23.15).

Iskry nad wulkanem skierowane są od naładowanego obszaru do krateru lub w przeciwną stronę. Możemy określić kierunek iskry patrząc, jak rozchodzą się od niej ślepe odgałęzienia. Jeśli rozchodzą się one w dół, to iskra skierowana jest w dół. Jeśli odgałęzienia odchodzą do góry, to iskra też skierowana jest do góry. Czasem iskra skierowana w dół i iskra skierowana do góry się spotykają.

23.15. Metalowa czasza jest tak silnie naładowana, że wytworzone przez nią w otaczającej przestrzeni pole elektryczne prowadzi do przebicia w występującym tam powietrzu. Widoczne iskry wskazują, gdzie w powietrzu powstały chwilowe przewodzące tory, wzdłuż których pole elektryczne usunęło elektrony z cząsteczek powietrza i przyspieszyło je, doprowadzając do zderzeń z cząsteczkami

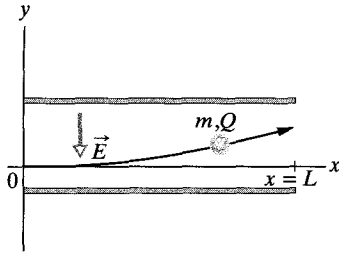


Rys. 23.14. Zasada działania drukarki atramentowej. Kropelki atramentu są wystrzeliwane z generatora G i otrzymują ładunek w jednostce ładującej C . Sygnał pochodzący z komputera określa ładunek nadawany każdej kropelce i wpływa na efekt działania pola $\vec{E}$ na kropelkę i położenie punktu na papierze, w którym kropelka wyląduje. Do wytworzenia pojedynczego znaku potrzeba około 100 drobnych kropelek



Przykład 23.4

Na rysunku 23.16 przedstawiono odchylające płytki drukarki atramentowej, z naniesionymi osiami układu współrzędnych. Kropelka atramentu o masie $m = 1,3 \cdot 10^{-10}$ kg i ujemnym ładunku o wartości $Q = 1,5 \cdot 10^{-13}$ C wpada w obszar między płytkami, poruszając się początkowo wzdłuż osi x , z prędkością $v_x = 18$ m/s. Długość L płyt wynosi 1,6 cm. Płytki są naładowane i wytwarzają pole elektryczne we wszystkich punktach między nimi. Załóż, że pole jest jednorodne, wektor natężenia pola $\vec{E}$ jest skierowany w dół i ma wartość $1,4 \cdot 10^6$ N/C. Jakie jest pionowe odchylenie kropelki po przejściu przez całą długość płyty? (Siła grawitacyjna, działająca na kropkę jest mała w porównaniu z siłą elektrostatyczną i można ją pominąć).



Rys. 23.16. Przykład 23.4. Kropelka atramentu o masie m i ładunku Q jest odchylana w polu elektrycznym drukarki atramentowej

ROZWIĄZANIE:

Kropka jest naładowana ujemnie, a natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dół. Zgodnie ze wzorem (23.28) na naładowaną kropkę działa stała siła elektrostatyczna o wartości QE , skierowana do góry. Kropelka, przesuując się równolegle do osi x ze stałą prędkością v_x , zaczyna więc odchylać się do góry z pewnym stałym przyspieszeniem a_y . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona ($F = ma$) dla składowych wzdłuż osi y otrzymujemy:

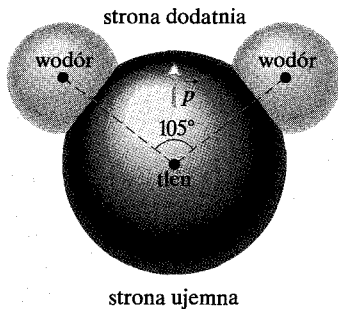
$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}. \quad (23.30)$$

Oznaczmy przez t czas potrzebny kropelce na przejście obszaru między płytkami. Po czasie t pionowe i poziome przesunięcia kropelki wynoszą odpowiednio:

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \text{ i } \quad L = v_x t. \quad (23.31)$$

Eliminując t z tych równań i podstawiając wartość (23.30) na a_y , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y &= \frac{QEL^2}{2mv_x^2} \\ &= \frac{(1,5 \cdot 10^{-13} \text{ C})(1,4 \cdot 10^6 \text{ N/C})(1,6 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(1,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg})(18 \text{ m/s})^2} \\ &= 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,64 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$



23.9. Dipol w polu elektrycznym

Elektryczny moment dipolowy $\vec{p}$ dipola elektrycznego zdefiniowaliśmy jako wektor skierowany od ujemnego do dodatniego ładunku dipola. Jak zobaczymy, zachowanie się dipola w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ można w pełni opisać, używając dwóch wektorów $\vec{E}$ i $\vec{p}$, bez potrzeby wnikania w strukturę dipola.

Cząsteczka wody (H_2O) jest dipolem elektrycznym, co przedstawiono na rysunku 23.17. Czarne kropki przedstawiają jądro tlenu (mające 8 protonów) i dwa jądra wodoru (mające po jednym protonie). Pokolorowane powierzchnie przedstawiają obszary w otoczeniu jąder, w których można znaleźć elektrony.

W cząsteczce wody dwa atomy wodoru i atom tlenu nie leżą na jednej prostej, ale proste, jakie można przez nie przeprowadzić, tworzą kąt równy około 105° , jak przedstawiono na rysunku 23.17. W wyniku tego cząsteczka ma określoną „stronę tlenową” i „stronę wodorową”. Co więcej, 10 elektronów cząsteczki ma skłonność do pozostawiania bliżej jądra tlenu niż jąder wodoru. Stąd strona tlenowa cząsteczki ma więcej ładunku ujemnego niż wodorowa, co prowadzi do powstania elektrycznego momentu dipolowego $\vec{p}$, skierowanego wzdłuż osi symetrii cza-

Rys. 23.17. Cząsteczka H_2O , składająca się z trzech jąder (zaznaczonych kropkami) i obszarów, gdzie występują elektrony. Elektryczny moment dipolowy $\vec{p}$ jest skierowany od (ujemnej) tlenowej do (dodatniej) wodorowej strony cząsteczki

steczki, jak pokazano na rysunku. Jeśli cząsteczką wody znajdzie się w zewnętrznym polu elektrycznym, to zachowuje się jak dipol elektryczny z rysunku 23.8.

W celu zbadania tego zachowania rozważmy taki dipol, umieszczony w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ (rys. 23.18a). Zakładamy, że dipol jest sztywnym układem, składającym się z dwóch przeciwnie naładowanych kulek, każda o ładunku q , które znajdują się w odległości d od siebie. Moment dipolowy $\vec{p}$ tworzy kąt θ z kierunkiem natężenia pola $\vec{E}$.

Na naładowane końce dipola działają siły elektrostatyczne. Pole elektryczne jest jednorodne, a więc siły działają w przeciwnych kierunkach (jak pokazano na rysunku 23.18) i mają taką samą wartość $F = qE$. W jednorodnym polu elektrycznym wypadkowa siła oddziaływania pola na dipol jest więc równa zeru i środek masy dipola się nie porusza. Jednak siły działające na naładowane końce wytwarzają wypadkowy moment siły $\vec{M}$ względem środka masy dipola. Środek masy leży na prostej, łączącej naładowane końce, w pewnej odległości x od jednego końca i w odległości $d - x$ od drugiego. Korzystając ze wzoru (11.31) ($M = rF \sin \phi$), możemy zapisać wartość wypadkowego momentu siły $\vec{M}$ w postaci

$$M = Fx \sin \theta + F(d - x) \sin \theta = Fd \sin \theta. \quad (23.32)$$

Wartość momentu siły $\vec{M}$ możemy także zapisać, używając wartości natężenia pola elektrycznego E i momentu dipolowego $p = qd$. W tym celu podstawimy qE za F i p/q za d do wzoru (23.32) i otrzymamy wyrażenie na wartość momentu siły:

$$M = pE \sin \theta. \quad (23.33)$$

Wzór ten możemy ogólnie zapisać w postaci wektorowej:

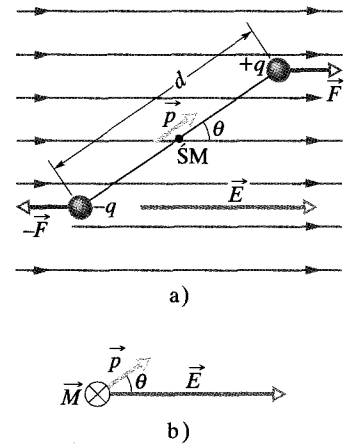
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (\text{moment siły działający na dipol}). \quad (23.34)$$

Wektory $\vec{p}$ i $\vec{E}$ przedstawiono na rysunku 23.18b. Moment siły działający na dipol dąży do obrócenia $\vec{p}$ (a stąd i dipola) w kierunku natężenia pola $\vec{E}$, czyli zmniejszenia kąta θ . Na rysunku 23.18 obrót taki jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. W rozdziale 11 powiedzieliśmy, że dla momentu siły, prowadzącego do obrotu zgodnego z kierunkiem ruchu wskazówek zegara wygodnie jest włączyć znak minus do wartości momentu. Przy takim zapisie moment siły z rysunku 23.18 ma wartość:

$$M = -pE \sin \theta. \quad (23.35)$$

Energia potencjalna dipola elektrycznego

Energia potencjalna jest związana z ustawieniem dipola elektrycznego w polu elektrycznym. Dipol ma najmniejszą energię potencjalną, gdy jest w stanie równowagi, czyli gdy jego moment $\vec{p}$ jest skierowany zgodnie z kierunkiem natężenia pola $\vec{E}$ (wówczas $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$). Dla każdego innego ustawienia dipol ma większą energię potencjalną. Podobnie jest dla wahadła, które ma swą najmniejszą grawitacyjną energię potencjalną w swym stanie równowagi, czyli w najniższym punkcie. Nadanie dipolowi lub wahadłu innego ustawienia (przez obrót) wymaga wykonania pracy przez siłę zewnętrzną.



Rys. 23.18. a) Dipol elektryczny w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$. Dwie kulki, o ładunkach jednakowych co do wartości, ale o przeciwnych znakach, znajdują się w odległości d . Linia między kulkami reprezentuje ich sztywne połączenie. b) Pole o natężeniu $\vec{E}$ działa momentem siły o wartości M na dipol. Moment siły $\vec{M}$ jest skierowany za kartkę, co zaznaczono symbolem $\otimes$

Możemy zawsze w całkiem dowolny sposób zdefiniować konfigurację o zerowej energii potencjalnej, ponieważ fizyczne znaczenie mają tylko różnice energii potencjalnej. Okazuje się, że wyrażenie na energię potencjalną dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym jest najprostsze, jeśli wybierzemy zerową wartość energii potencjalnej dla kąta θ (rys. 23.18) równego 90° . Możemy teraz znaleźć energię potencjalną E_p dipola przy dowolnej innej wartości kąta θ , korzystając ze wzoru (8.1) ($\Delta E_p = -W$), tzn. obliczając pracę W , wykonaną przez pole, przy obróceniu dipola od ustawienia odpowiadającego wartości 90° do wartości θ . Ze wzoru (11.45) ($W = \int M d\theta$) i wzoru (23.35) znajdujemy, że energia potencjalna E_p przy dowolnym kącie θ wynosi:

$$E_p = -W = - \int_{90^\circ}^{\theta} M d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin \theta d\theta. \quad (23.36)$$

Obliczenie całki prowadzi do wyniku:

$$E_p = -pE \cos \theta. \quad (23.37)$$

Wzór ten możemy zapisać ogólnie w postaci wektorowej:

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (\text{energia potencjalna dipola}). \quad (23.38)$$

Ze wzorów (23.37) i (23.38) wynika, że energia potencjalna dipola jest najmniejsza ($E_p = -pE$), gdy $\theta = 0$, czyli gdy $\vec{p}$ i $\vec{E}$ mają ten sam kierunek; energia potencjalna jest największa ($E_p = pE$), gdy $\theta = 180^\circ$, czyli gdy $\vec{p}$ i $\vec{E}$ są przeciwnie skierowane.

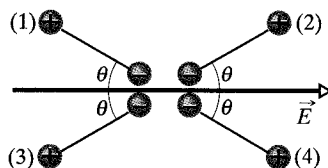
Gdy dipol obraca się od początkowego ustawienia θ_{pocz} do innego $\theta_{\text{końc}}$, praca W , wykonana przez pole elektryczne nad dipolem wynosi:

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p \text{ końc}} - E_{p \text{ pocz}}), \quad (23.39)$$

gdzie $E_{p \text{ pocz}}$ i $E_{p \text{ końc}}$ można obliczyć ze wzoru (23.38). Jeśli zmiana ustawienia jest spowodowana przez zewnętrzny moment siły zewnętrznej, to praca W_{zewn} , wykonana nad dipolem przez ten moment siły różni się znakiem od pracy, wykonanej nad dipolem przez pole, czyli:

$$W_{\text{zewn}} = -W = (E_{p \text{ końc}} - E_{p \text{ pocz}}). \quad (23.40)$$

SPRAWDZIAN 5: Na rysunku przedstawiono cztery ustawienia dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym. U szereguj te ustawienia względem: a) wartości momentu siły działającego na dipol, b) energii potencjalnej dipola, zaczynając od wartości największej.



Przykład 23.5

Obojętna cząsteczka wody (H_2O) w stanie gazowym ma elektryczny moment dipolowy o wartości $6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$.

a) W jakiej odległości od siebie znajdują się środki dodatniego i ujemnego ładunku cząsteczki?

ROZWIĄZANIE:

➡ Moment dipolowy cząsteczki zależy od wartości q dodatniego lub ujemnego ładunku cząsteczki i odległości d ładunków. W obojętnej cząsteczce wody jest 10 elektronów i 10 protonów i dlatego wartość jej momentu dipolowego wynosi:

$$p = qd = (10e)(d),$$

gdzie d jest poszukiwaną odległością, a e ładunkiem elementarnym. Stąd:

$$\begin{aligned} d &= \frac{p}{10e} = \frac{(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})}{(10)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})} \\ &= 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3,9 \text{ pm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Otrzymana odległość jest bardzo mała, mniejsza od promienia atomu wodoru.

b) Jakim maksymalnym momentem siły pole może oddziaływać na dipol, jeśli cząsteczka znajdzie się w polu elektrycznym o

natężeniu $1,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}$ (pole o takim natężeniu można łatwo wytworzyć w laboratorium)?

ROZWIĄZANIE:

➡ Moment siły działający na dipol jest największy, gdy kąt między $\vec{p}$ i $\vec{E}$ wynosi 90° . Podstawiając tę wartość do wzoru (23.33), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M &= pE \sin \theta = (6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})(1,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \sin 90^\circ \\ &= 9,3 \cdot 10^{-26} \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Jaką pracę trzeba wykonać, aby obrócić tę cząsteczkę o 180° , zaczynając od równoległego ustawienia odpowiadającego $\theta = 0^\circ$?

ROZWIĄZANIE:

➡ Aby obrócić cząsteczkę, należy przyłożyć do niej zewnętrzny moment siły. Praca wykonana przez ten moment siły jest równa zmianie energii potencjalnej przy zmianie ustawienia cząsteczki. Ze wzoru (23.40) znajdujemy:

$$\begin{aligned} W_{\text{zewn}} &= E_p(180^\circ) - E_p(0^\circ) \\ &= (-pE \cos 180^\circ) - (-pE \cos 0^\circ) = 2pE \\ &= (2) \cdot (6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}) \cdot (1,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \\ &= 1,9 \cdot 10^{-25} \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Podsumowanie

Pole elektryczne Jednym ze sposobów wyjaśnienia działania siły elektrostatycznej między dwoma ładunkami jest założenie, że każdy ładunek wytwarza w przestrzeni wokół siebie pole elektryczne. Siła elektrostatyczna działająca na dowolny ładunek jest wywołana polem elektrycznym, wytworzonym przez inne ładunki w miejscu, w którym znajduje się rozważany ładunek.

Definicja natężenia pola elektrycznego Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w dowolnym punkcie jest określone przez siłę elektrostatyczną $\vec{F}$, działającą na umieszczony w tym punkcie dodatni ładunek próbny q_0 :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (23.1)$$

Linie pola elektrycznego Linie pola elektrycznego umożliwiają graficzne przedstawienie kierunku i wartości natężeń pola elektrycznego. Wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie jest styczny do linii pola przechodzącej przez ten punkt. Gęstość linii pola w dowolnym obszarze jest proporcjonalna do wartości natężenia pola w tym obszarze. Linie pola są skierowane od ładunków dodatnich do ujemnych.

Pole ładunku punkowego Wartość natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$, wytworzonego przez ładunek punktowy q , w odległości r od ładunku wynosi:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}. \quad (23.3)$$

Wektor natężenia pola $\vec{E}$ jest skierowany od ładunku punktowego, jeśli ładunek jest dodatni i do ładunku punktowego, jeśli ładunek jest ujemny.

Pole dipola elektrycznego Dipol elektryczny składa się z dwóch cząstek o jednakowej wartości ładunku q , ale o przeciwnym znaku, znajdujących się w odległości d od siebie. Elektryczny moment dipolowy $\vec{p}$ dipola ma wartość qd i jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego. Wartość natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez dipol, w odległym punkcie na osi dipola (prostej przechodzącej przez obydwa ładunki) wynosi:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}, \quad (23.9)$$

gdzie z jest odległością między punktem i środkiem dipola.

Pole ciągłego rozkładu ładunku Natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek o rozkładzie ciągłym obliczamy, traktując elementy ładunku jak ładunki punktowe i następnie sumując przez całkowanie wektory natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez wszystkie elementy ładunku.

Siła działająca na ładunek punktowy w polu elektrycznym Gdy ładunek punktowy q znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ wytworzonym przez inne ładunki, siła elektrostatyczna $\vec{F}$ działająca na ładunek punktowy jest wyrażona wzorem:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (23.28)$$

Siła $\vec{F}$ ma ten sam kierunek jak natężenie $\vec{E}$, jeśli ładunek q jest dodatni i przeciwny kierunek, jeśli ładunek q jest ujemny.

Dipol w polu elektrycznym Jeśli dipol elektryczny o momencie dipolowym $\vec{p}$ znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$, to pole działa na dipol momentem siły $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (23.34)$$

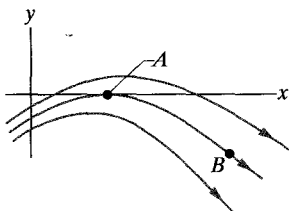
Dipol ma energię potencjalną E_p , związaną z jego ustawieniem w polu elektrycznym:

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (23.38)$$

Ta energia potencjalna jest tak określona, że przyjmuje wartość równą zero, gdy moment $\vec{p}$ jest prostopadły do natężenia $\vec{E}$; jest najmniejsza ($E_p = -pE$), gdy moment $\vec{p}$ ma kierunek zgodny z natężeniem $\vec{E}$, i największa ($E_p = pE$), gdy moment $\vec{p}$ ma kierunek przeciwny do natężenia $\vec{E}$.

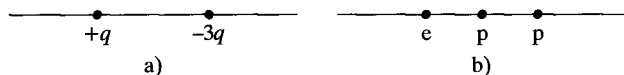
Pytania

1. Na rysunku 23.19 przedstawiono trzy linie pola elektrycznego. Jaki jest kierunek siły elektrostatycznej, działającej na dodatni ładunek próbny, umieszczony w: a) punkcie A, b) punkcie B? c) W którym punkcie, A czy B, przyspieszenie ładunku punktowego będzie większe, jeśli ładunek będzie mógł się poruszać?



Rys. 23.19. Pytanie 1

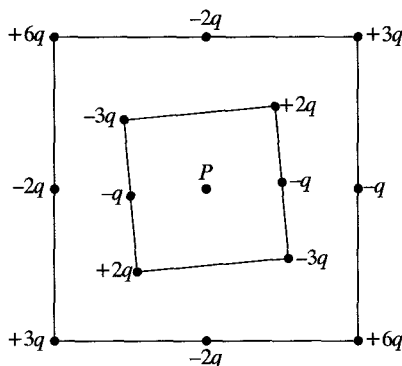
2. Na rysunku 23.20a przedstawiono dwie naładowane cząstki, umieszczone na osi. a) Gdzie na osi (w skończonej odległości) znajduje się punkt, w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest równe zero: między ładunkami, na lewo czy na prawo od nich? b) Czy istnieje punkt o zerowym natężeniu pola elektrycznego poza osią (w skończonej odległości)?



Rys. 23.20. Pytania 2 i 3

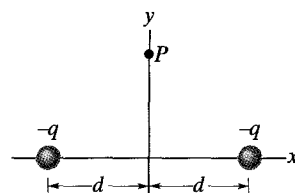
3. Na rysunku 23.20b przedstawiono dwa protony i elektron znajdujące się w równej odległości od siebie na osi. Gdzie na osi (w skończonej odległości) jest punkt, w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest równe zero: na lewo od cząstek, na prawo, między dwoma protonami, czy między elektronem i bliższym protonem?

4. Na rysunku 23.21 przedstawiono dwa układy naładowanych cząstek. Boki zaznaczonych kwadratów nie są równoległe do siebie. Ładunki znajdują się w odległości d lub $d/2$ wzdłuż obwodów kwadratów. Jaka jest wartość i kierunek wypadkowego natężenia pola elektrycznego w punkcie P?



Rys. 23.21. Pytanie 4

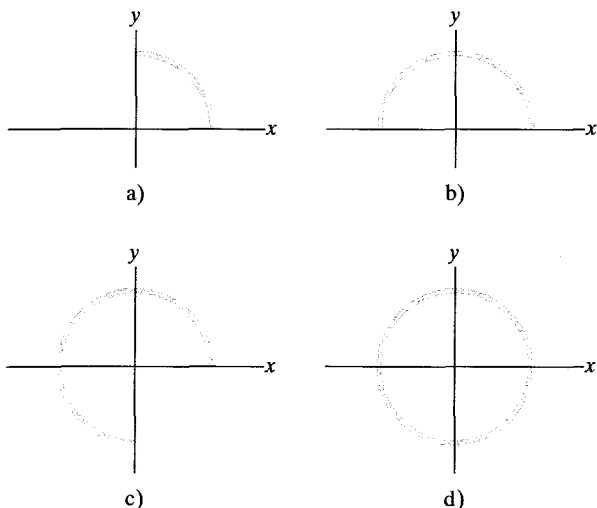
5. Na rysunku 23.22 dwie cząstki o ładunku $-q$ są rozmieszczone symetrycznie względem osi y ; każda z nich wytwarza pole elektryczne w punkcie P, leżącym na tej osi. a) Czy wartości natężeń pól w punkcie P są równe? b) Czy każde pole elektryczne jest skierowane do, czy od ładunku go wytwarzającego? c) Czy wartość wypadkowego natężenia pola elektrycznego w punkcie P jest równa sumie wartości E natężeń tych dwóch pól (czyli czy jest równa $2E$)? d) Czy składowe x natężeń tych dwóch pól dodają się, czy odejmują? e) Czy ich składowe y dodają się, czy odejmują? f) Czy kierunek wypadkowego natężenia pola w punkcie P jest kierunkiem składowych, które się odejmują, czy składowych, które się dodają? g) Jaki jest kierunek wypadkowego natężenia pola?



Rys. 23.22. Pytanie 5

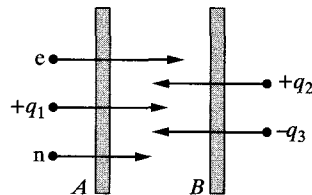
6. Trzy nieprzewodzące pręty o kształcie łuku o tym samym promieniu krzywizny są jednorodnie naładowane. Pręt A ma ładunek $+2Q$ i zajmuje łuk odpowiadający kątowi 30° , pręt B ma ładunek $+6Q$ i zajmuje łuk odpowiadający kątowi 90° , pręt C ma ładunek $+4Q$ i zajmuje łuk odpowiadający kątowi 60° . Uszereguj pręty według ich liniowej gęstości ładunku, zaczynając od największej.

7. Na rysunku 23.23a przedstawiono plastikowy pręt o kolistym kształcie, jednorodnie naładowany ładunkiem $+Q$, który wytwarza pole elektryczne o wartości natężenia E w środku krzywizny pręta (w początku układu). Na rysunkach 23.23b, c i d przedstawiono inne pręty kołiste, naładowane jednorodnie, z ładunkiem kolejno powiększanym o $+Q$, aż do wypełnienia całego okręgu. Piąty rozkład (który oznaczmy przez (e)) jest taki sam, jak w (d), ale pręt w czwartej ćwiartce ma ładunek $-Q$. Uszereguj te rozkłady zgodnie z wartością natężenia pola elektrycznego w środku krzywizny, zaczynając od największego.



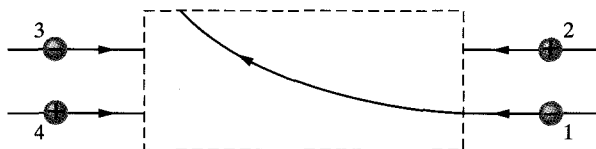
Rys. 23.23. Pytanie 7

8. Na rysunku 23.24 elektron e przechodzi przez mały otwór w płycie A , poruszając się w kierunku płyty B . Jednorodne pole elektryczne w obszarze między płytami spowalnia elektron bez odchylenia. a) Jaki jest kierunek natężenia pola? b) Cztery inne cząstki również przechodzą przez małe otwory w płycie A lub w płycie B , wpadając w obszar między płytami. Trzy z nich mają ładunki $+q_1$, $+q_2$ i $-q_3$, czwarta (oznaczona przez n) jest neutronem, który jest cząstką obojętną elektrycznie. Czy prędkość każdej z tych czterech cząstek rośnie, maleje, czy pozostaje taka sama w obszarze między płytami?



Rys. 23.24. Pytanie 8

9. Na rysunku 23.25 przedstawiono tor ujemnie naładowanej cząstki 1 w prostokątnym obszarze jednorodnego pola elektrycznego; cząstka jest odchylana do góry strony. a) Czy natężenie pola elektrycznego jest skierowane w lewo, w prawo, do góry, czy w dół strony? b) Na rysunku są przedstawione trzy inne cząstki naładowane, wpadające w obszar pola elektrycznego. Które cząstki zostaną odchylone do góry strony, a które w dół?



Rys. 23.25. Pytanie 9

10. a) Czy dla dipola ze sprawdzianu 5 przy obrocie od ustawienia 1 do ustawienia 2 praca wykonana nad nim przez pole jest dodatnia, ujemna, czy równa zero? b) Jeśli dipol obraca się od ustawienia 1 do ustawienia 4, to czy praca wykonana przez pole jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak w (a)?

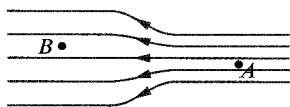
11. Energie potencjalne związane z czterema ustawieniami dipola elektrycznego w polu elektrycznym wynoszą: 1) $-5E_{p0}$, 2) $-7E_{p0}$, 3) $3E_{p0}$, 4) $5E_{p0}$, gdzie wartość E_{p0} jest dodatnia. Uszereguj ustawienia: a) zgodnie z wartością kąta między elektrycznym momentem dipolowym $\vec{p}$ i natężeniem pola elektrycznego $\vec{E}$, b) według wartości momentu siły działającego na dipol elektryczny, zaczynając od wartości największych.

12. Jeśli przejdziemy po dywanie z pewnego materiału podczas suchego dnia i następnie dotkniemy metalowej klamki w drzwiach lub (dla większej zabawy) czyjegoś karku, to możemy spowodować powstanie iskry. Dlaczego pojawia się iskra? (Jasność i głośność iskry można zwiększyć przez dotknięcie wyciągniętym palcem lub, nawet lepiej, końcem metalowego klucza).

www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
 ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

23.3. Linie pola elektrycznego

1. Na rysunku 23.26 przedstawiono linie pola elektrycznego, których wzajemna odległość w lewej części rysunku jest dwa razy większa niż w prawej. a) Jeśli wartość natężenia pola w punkcie A wynosi 40 N/C , to jaka siła działa na proton w punkcie A? b) Jaka jest wartość natężenia pola w punkcie B?



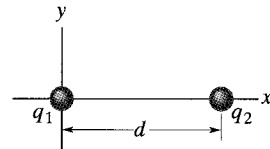
Rys. 23.26. Zadanie 1

2. Naskicuj linie pola elektrycznego w obszarach między i poza dwoma współśrodkowymi powłokami sferycznymi, gdy na wewnętrznej powłoce jest jednorodnie rozłożony ładunek dodatni q_1 , a na powłoce zewnętrznej jednorodnie rozłożony ładunek ujemny $-q_2$. Rozważ przypadki, gdy $q_1 > q_2$, $q_1 = q_2$ i $q_1 < q_2$.
3. Naskicuj linie pola elektrycznego dla cienkiej, kołowej, jednorodnie naładowanej tarczy o promieniu R . (Wskazówka: Rozważ jako graniczne przypadki punkty leżące blisko tarczy, gdzie natężenie pola elektrycznego jest skierowane prostopadle do powierzchni i punkty bardzo odległe od niej, gdzie pole elektryczne przypomina pole ładunku punkowego).

23.4. Pole elektryczne ładunku punkowego

4. Jaka jest wartość ładunku punkowego, który wytwarza pole elektryczne o natężeniu 1 N/C , w punktach odległych o 1 m ?
5. Jaka jest wartość ładunku punkowego, który w odległości 50 cm wytwarza pole elektryczne o natężeniu 2 N/C ?
6. Dwie cząstki, których ładunki mają jednakowe wartości równe $2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, lecz przeciwne znaki, znajdują się w odległości 15 cm od siebie. Wyznacz wartość i kierunek wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w środku odcinka łączącego cząstki.
7. Jądro atomu plutonu-239 o liczbie atomowej $Z = 94$ ma promień równy $6,64 \text{ fm}$. Zakładamy, że ładunek dodatni jest równomiernie rozłożony w obszarze jądra. Wyznacz wartość i kierunek wektora natężenia pola elektrycznego, wytworzonego na powierzchni jądra przez ten ładunek dodatni.

8. Na rysunku 23.27 przedstawiono dwa ładunki punktowe $q_1 = +1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ i $q_2 = +3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, znajdujące się w odległości $d = 10 \text{ cm}$. Wykreśl wypadkowe natężenie pola elektrycznego $E(x)$ w zależności od x dla dodatnich i ujemnych wartości x , przyjmując wartość E za dodatnią, jeśli wektor $\vec{E}$ jest skierowany w prawo i za ujemną, jeśli wektor $\vec{E}$ jest skierowany w lewo.

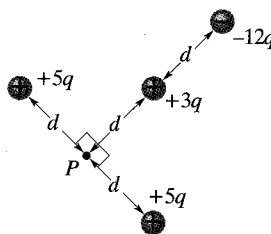


Rys. 23.27. Zadania 8 i 10

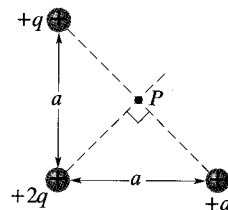
9. Dwa ładunki punktowe $q_1 = 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ i $q_2 = -4q_1$ znajdują się w odległości 50 cm od siebie. Znajdź punkt na linii prostej, przechodzącej przez te ładunki, w którym natężenie pola elektrycznego jest równe zero. www

10. a) Na rysunku 23.27 przedstawiono dwa ładunki punktowe $q_1 = -5q$ i $q_2 = +2q$, znajdujące się w odległości d . Wyznacz położenie punktu (lub punktów), w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez te dwa ładunki jest równe zero. b) Naskicuj linie wypadkowego pola elektrycznego.

11. Jaka wartość w punkcie P ma natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez cztery ładunki punktowe, przedstawione na rysunku 23.28?



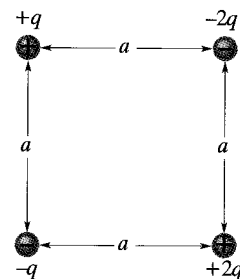
Rys. 23.28. Zadanie 11



Rys. 23.29. Zadanie 12

12. Wyznacz kierunek i oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie P, wytworzonego przez trzy ładunki punktowe przedstawione na rysunku 23.29.

13. Jaka wartość i kierunek ma natężenie pola elektrycznego w środku kwadratu na rysunku 23.30, jeśli $q = 1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ i $a = 5 \text{ cm}$? www



Rys. 23.30. Zadanie 13

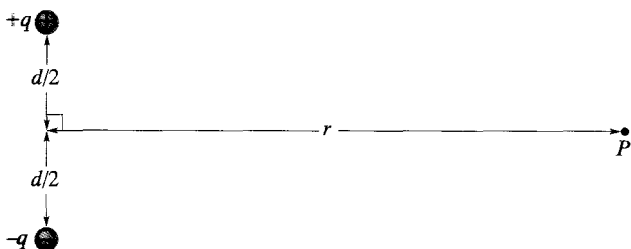
23.5. Pole elektryczne dipola elektrycznego

14. Przyjmij, że na rysunku 23.8 obydwa ładunki są dodatnie. Zakładając, że $z \gg d$ pokaż, że natężenie E w punkcie P na tym rysunku wynosi:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{z^2}.$$

15. Oblicz elektryczny moment dipolowy układu złożonego z elektronu i protonu znajdujących się w odległości 4,3 nm od siebie.

16. Znajdź wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie P , wytworzonego przez dipol elektryczny na rysunku 23.31. Punkt P znajduje się w odległości $r \gg d$ na symetralnej odcinka łączącego ładunki. Skorzystaj z wartości i kierunku elektrycznego momentu dipolowego $\vec{p}$.

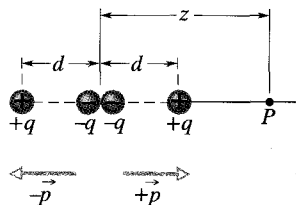


Rys. 23.31. Zadanie 16

17. * Kwadrupol elektryczny. Na rys. 23.32 przedstawiono kwadrupol elektryczny. Składa się on z dwóch dipoli o momentach dipolowych o takich samych wartościach i przeciwnych kierunkach. Pokaż, że wartość natężenia E na osi kwadrupola w punkcie P w odległości z od jego środka (przy założeniu $z \gg d$) wynosi:

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 z^4},$$

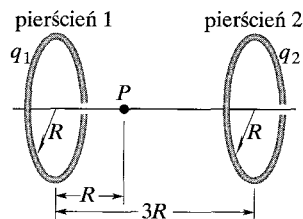
gdzie wielkość $Q (= 2qd^2)$ nosi nazwę elektrycznego momentu kwadrupolowego rozważanego rozkładu ładunków.



Rys. 23.32. Zadanie 17

23.6. Pole elektryczne naładowanej linii

18. Na rysunku 23.33 przedstawiono dwa równoległe nieprzewodzące pierścienie, których środki znajdują się na prostej, prostopadłej do obydwu pierścieni. Pierścień 1 o promieniu R jest jednorodnie naładowany ładunkiem q_1 ; pierścień 2 o tym samym promieniu jest jednorodnie naładowany ładunkiem q_2 . Pierścienie znajdują się w odległości $3R$. Wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie P na wspólnej osi, w odległości R od pierścienia 1 wynosi zero. Jaki jest stosunek ładunków q_1/q_2 ?



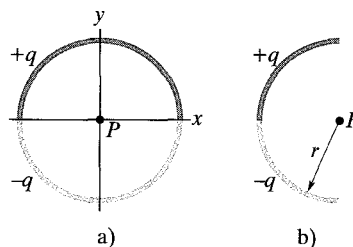
Rys. 23.33. Zadanie 18

19. Elektron może poruszać się wzdłuż osi symetrii naładowanego pierścienia o promieniu R , omawianego w paragrafie 23.6. Pokaż, że siła elektrostatyczna, działająca na elektron może spowodować jego drgania wokół środka pierścienia z częstotścią kątową równą:

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}},$$

gdzie q jest ładunkiem pierścienia, a m — masą elektronu.

20. Na rysunku 23.34a przedstawiono dwa zakrzywione pręty plastikowe, jeden o ładunku $+q$ i drugi o ładunku $-q$, które tworzą okrąg o promieniu R w płaszczyźnie xy . Oś x przechodzi przez punkty łączące pręty. W obydwu prętach ładunek jest rozłożony jednorodnie. Jaką wartość i kierunek ma natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$, wytworzonego w środku okręgu P ?



Rys. 23.34. Zadania 20 i 21

21. Cienki szklany pręt ma kształt półokręgu o promieniu r . Ładunek $+q$ jest rozłożony jednorodnie w górnej połowie, a ładunek $-q$ — w dolnej połowie (rys. 23.34b). Znajdź wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w środku półokręgu P . ilw

22. Punkt P leży osi symetrii naładowanego jednorodnie pierścienia o promieniu R . W jakiej odległości od środka tego pierścienia powinien znajdować się punkt P , aby wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek na pierścieniu była w tym punkcie największa?

23. Na rysunku 23.35 przedstawiono nieprzewodzący pręt o długości L , naładowany jednorodnie ładunkiem $-q$. a) Ile wynosi liniowa gęstość ładunku pręta? b) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego w punkcie P w odległości a od końca pręta? c) Jeśli



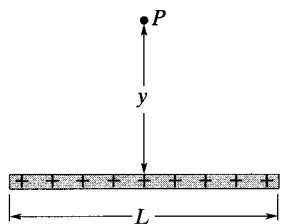
Rys. 23.35. Zadanie 23

punkt P znajdowałby się bardzo daleko od pręta w porównaniu z L , to pręt przypominałby ładunek punktowy. Pokaż, że wynik z (b) redukuje się do pola elektrycznego ładunku punktowego dla $a \gg L$.

24. Cienki nieprzewodzący pręt o skończonej długości L jest naładowany jednorodnie ładunkiem q . Pokaż, że:

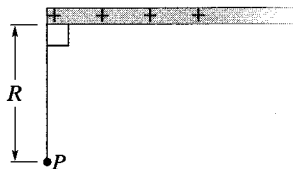
$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{(L^2 + 4y^2)^{1/2}}$$

określa wartość natężenia E pola elektrycznego w punkcie P na symetrycznej pręta (rys. 23.36).



Rys. 23.36. Zadanie 24

25*. Na rysunku 23.37 przedstawiono nieprzewodzący pręt w kształcie półprostej, naładowany jednorodnie z gęstością liniową λ . Pokaż, że natężenie pola elektrycznego w punkcie P tworzy kąt 45° z prętem i że wynik jest niezależny od odległości R . (Wskazówka: Znajdź niezależnie równoległą i prostopadłą (do pręta) składową natężenia pola elektrycznego w punkcie P i porównaj te składowe).



Rys. 23.37. Zadanie 25

23.7. Pole elektryczne naładowanej tarczy

26. Górna powierzchnia tarczy o promieniu 2,5 cm jest naładowana z gęstością powierzchniową $5,3 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez tarczę w punkcie leżącym na osi symetrii prostopadłej do tarczy, w odległości 12 cm od tarczy?

27. W jakiej odległości od środka jednorodnie naładowanej plastikowej tarczy o promieniu R (na jej osi symetrii) wartość natężenia pola elektrycznego jest równa połowie tej wartości w środku tarczy?

23.8. Ładunek punktowy w polu elektrycznym

28. W polu elektrycznym elektron porusza się w kierunku wschodnim z przyspieszeniem $1,8 \cdot 10^9 \text{ m/s}^2$. Określ wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego.

29. Spoczywający początkowo elektron znalazł się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $2 \cdot 10^4 \text{ N/C}$. Oblicz przyspieszenie elektronu (pomiń siłę ciężkości).

30. Cząstka α (jądro atomu helu) ma masę $6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ i ładunek $+2e$. Jaka jest wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego, w którym siła elektrostatyczna zrównoważy siłę ciężkości działającą na tę cząstkę?

31. Oblicz wartość siły oddziaływania dipola elektrycznego o momencie dipolowym $3,6 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ na elektron, znajdujący się na osi dipola, w odległości 25 nm od jego środka. Załóż, że ta odległość jest duża w porównaniu z odległością ładunków dipola.

32. Wilgotne powietrze ulega przebiciu (jego cząsteczki ulegają jonizacji) w polu elektrycznym o natężeniu $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$. Jaka jest wartość siły elektrostatycznej, działającej w takim polu na: a) elektron b) jon jednododatni?

33. Naładowana chmura wytwarza pole elektryczne w powietrzu nad powierzchnią Ziemi. Na cząstkę o ładunku $-2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, znajdującą się w tym polu, działa siła elektrostatyczna o wartości $3 \cdot 10^{-6} \text{ N}$, skierowana w dół. a) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego? b) Jaka jest wartość i kierunek siły elektrostatycznej, działającej na proton umieszczony w tym polu? c) Jaka jest wartość siły grawitacyjnej działającej na proton? d) Ile wynosi stosunek wartości siły elektrostatycznej do wartości siły grawitacyjnej, działającej na proton?

34. W atmosferze w pobliżu powierzchni Ziemi natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ o średniej wartości około 150 N/C jest skierowane w dół. Chcemy „zawiesić” w powietrzu kulę siarkową o ciężarze $4,4 \text{ N}$ przez jej naładowanie. a) Znajdź wartość i znak ładunku, jakiego trzeba użyć. b) Dlaczego taki eksperyment nie ma szerszego zastosowania?

35. Stosując pola elektryczne do przyspieszania protonów w „działach protonowych” można wytwarzać wiązki szybkich protonów. a) Jakiego przyspieszenia dozna proton, jeśli natężenie pola elektrycznego „działa” wynosi $2 \cdot 10^4 \text{ N/C}$? b) Jaką prędkość uzyska proton, jeśli pole będzie przyspieszało proton na drodze 1 cm ?

36. Elektron, którego prędkość jest równa $5 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$, wpada w pole elektryczne o natężeniu $1 \cdot 10^3 \text{ N/C}$, poruszając się wzdłuż linii pola w kierunku, w którym jego ruch jest opóźniony. a) Jaką drogę przebywa elektron w polu do chwili zatrzymania? b) Ile czasu upłynie do tego momentu? c) Jeśli obszar pola elektrycznego ma tylko 8 mm długości (za mało do zatrzymania w nim elektronu), to jaka część początkowej energii kinetycznej elektronu zostanie w tym obszarze stracona?

37. W doświadczeniu Millikana kropelka oleju o promieniu $1,64 \mu\text{m}$ i gęstości $0,851 \text{ g/cm}^3$ zawisała w komorze C (rys. 23.13), gdy włączono pole elektryczne o natężeniu $1,92 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, skierowane w dół. Znajdź ładunek kropelki jako wielokrotność e .

38. W jednym ze swych doświadczeń Millikan otrzymał między innymi następujące wartości ładunku, jaki w różnych chwilach znajdował się na pojedynczej kropelce:

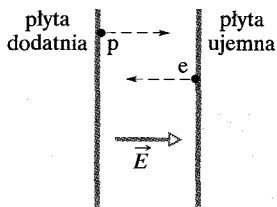
$6,563 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$13,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$19,71 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
$8,204 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$16,48 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$22,89 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
$11,50 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$18,08 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$26,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Jaką wartość ładunku elementarnego e można przyjąć na podstawie tych danych?

39. W obszarze między dwiema przeciwnie naładowanymi płytami istnieje jednorodne pole elektryczne. Elektron, początkowo spoczywający przy ujemnie naładowanej płycie uderzył po czasie $1,5 \cdot 10^{-8}$ s w przeciwnie naładowaną płytę, znajdującą się w odległości 2 cm. a) Ile wynosiła prędkość elektronu w momencie, gdy zderzył się z drugą płytą? b) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$?

40. W pewnej chwili składowe prędkości elektronu, poruszającego się między dwiema naładowanymi równoległymi płytami wynoszą $v_x = 1,5 \cdot 10^5$ m/s i $v_y = 3 \cdot 10^3$ m/s. Załóż, że pole elektryczne między płytami jest dane przez $\vec{E} = (120 \text{ N/C})\hat{j}$. a) Ile wynosi przyspieszenie elektronu? b) Ile wynosić będzie prędkość elektronu, gdy jego współrzędna x zmieni się o 2 cm?

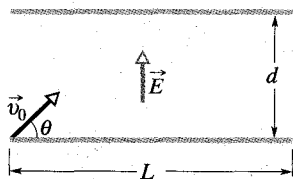
41. Dwie duże równoległe płyty miedziane znajdują się w odległości 5 cm od siebie, a między nimi wytworzone jest jednorodne pole elektryczne, przedstawione na rysunku 23.38. Spoczywający początkowo elektron opuszcza płytę ujemną w tej samej chwili, w której proton jest uwolniony z płyty dodatniej. Pomijając siłę oddziaływania wzajemnego cząstek, znajdź odległość cząstek od płyty dodatniej w chwili mijania się. (Czy nie jest dziwne, że przy rozwiązywaniu tego zadania nie musimy znać natężenia pola elektrycznego?)



Rys. 23.38. Zadanie 41

42. Kłoczek o masie 10 g i ładunku $+8 \cdot 10^{-5}$ C umieszczono w polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E} = (3 \cdot 10^3)\hat{i} - 600\hat{j}$, gdzie składowe $\vec{E}$ podano w niutonach na kulomb (N/C). a) Jaka jest wartość i kierunek siły, działającej na klocek? b) Jeśli klocek spoczywał (w chwili $t = 0$ s) w początku układu, to jakie będą jego współrzędne w chwili $t = 3$ s?

43. Przez naładowanie dolnej płyty dodatnio i górnej płyty ujemnie wytworzono jednorodne pole elektryczne o natężeniu $2 \cdot 10^3$ N/C, skierowane do góry (rys. 23.39). Płyty mają długość $L = 10$ cm i znajdują się w odległości $d = 2$ cm. Z lewej krawędzi dolnej płyty wyrzuciono elektron w obszar między płytami. Początkowa prędkość $\vec{v}_0$ elektronu tworzy kąt $\theta = 45^\circ$ z dolną płytą i ma wartość $6 \cdot 10^6$ m/s. a) Czy elektron uderzy w którąś płytę? b) Jeśli tak, to w którą płytę i w jakiej odległości, patrząc w kierunku poziomym, od lewej krawędzi płyty?



Rys. 23.39. Zadanie 43

23.9. Dipol w polu elektrycznym

44. Dipol elektryczny, składający się z ładunków o wartościach 1,5 nC, znajdujących się w odległości $6,2 \mu\text{m}$ od siebie, umieszczony jest w polu elektrycznym o natężeniu 1100 N/C. a) Jaka jest wartość elektrycznego momentu dipolowego dipola? b) Jaka jest różnica między energiami potencjalnymi, odpowiadającymi równoległemu i antyrównoległemu ustawieniu dipola względem natężenia pola?

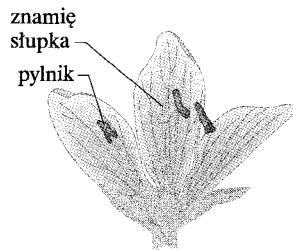
45. Dipol elektryczny, składający się z ładunków $+2e$ i $-2e$, umieszczonych w odległości 0,78 nm od siebie, znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu $3,4 \cdot 10^6$ N/C. Oblicz wartość momentu siły działającego na dipol, jeśli moment dipolowy jest: a) równoległy, b) prostopadły, c) antyrównoległy do natężenia pola elektrycznego.

46. Znajdź pracę potrzebną do obrócenia dipola elektrycznego o 180° w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ — wynik wyraż przez wartość p momentu dipolowego, wartość E natężenia pola i początkowy kąt θ_0 między wektorami $\vec{p}$ i $\vec{E}$.

47. Znajdź częstotść drgań dipola elektrycznego o momencie dipolowym $\vec{p}$ i momencie bezwładności I dla małych amplitud drgań wokół jego położenia równowagi, w jednorodnym polu elektrycznym o wartości natężenia E .

Zadanie dodatkowe

48. Zapyłanie kwiatów zależy od owadów, przenoszących ziarenka pyłku z kwiatu na kwiat. Jeden ze sposobów, w jaki pszczoły mogą to robić, polega na elektrycznym zbieraniu ziaren pyłku, gdyż pszczoły są zwykle dodatnio naładowane. Gdy pszczoła zawisa w pobliżu elektrycznie izolowanego pylnika kwiatu (rys. 23.40), ziarenka pyłku (umiarkowanie przewodzące) padają na pszczołę i są przez nią przenoszone do następnego kwiatu. Gdy pszczoła zbliży się do elektrycznie uziemionego (przez wnętrze kwiatu) znamienia słupka, ziarenka pyłku spadają z pszczoły na uziemione znamień i zapylają kwiat. a) Zakładając, że pszczoła z typowym ładunkiem 45 pC jest kulistym przewodnikiem, znajdź wartość natężenia pola elektrycznego pszczoły w obszarze pylnika, w odległości 2 cm od środka pszczoły. b) Czy pole to jest jednorodne, czy niejednorodne? c) Wyjaśnij, dlaczego ziarenka pyłku padają na pszczołę, przylegają do niej podczas lotu i potem spadają z pszczoły na uziemione znamień. (Wskazówka: Spójrz na rys. 22.5). Gdy ziarenko pyłku przylega się do pszczoły, to czy istnieje elektryczny kontakt pyłku z pszczołą, w wyniku czego ładunek ziarenka pyłku ulega zmianie?



Rys. 23.40. Zadanie 48