

## 25 Potencjał elektryczny

Oglądając z platformy widokowej Park Narodowy Sekwoi, kobieta poczuła, że podnoszą się jej włosy na głowie. Jej brat, rozbawiony tym widokiem, zrobił jej zdjęcie. Pięć minut po ich odejściu w platformę uderzył piorun, zabijając jedną osobę i raniąc siedem.

Co było przyczyną podniesienia się włosów na głowie kobiety?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 25.1. Elektryczna energia potencjalna

Prawo powszechnego ciężenia (Newtona) dla siły grawitacyjnej i prawo Coulomba dla siły elektrostatycznej są matematycznie identyczne. Stąd ogólne właściwości siły grawitacyjnej, jakie omawialiśmy wcześniej, powinny stosować się także do siły elektrostatycznej.

W szczególności uzasadniony jest wniosek, że siła elektrostatyczna jest *siłą zachowawczą*. Jeśli więc siła elektrostatyczna działa w jakimś układzie cząstek, między dwiema czy większą liczbą cząstek naładowanych, to układowi możemy przypisać **elektryczną energię potencjalną**  $E_p$ . Co więcej, jeśli układ zmienia swoją konfigurację ze stanu początkowego do innego stanu końcowego, to siła elektrostatyczna wykonuje pracę  $W$  nad cząstkami. Ze wzoru (8.1) wynika wtedy, że odpowiadająca temu procesowi zmiana  $\Delta E_p$  energii potencjalnej układu spełnia zależność:

$$\Delta E_p = E_{p \text{ końc}} - E_{p \text{ pocz}} = -W. \quad (25.1)$$

Podobnie, jak dla innych sił zachowawczych, praca wykonana przez siły elektrostatyczne jest *niezależna od toru cząstek*. Załóżmy, że cząstka naładowana, należąca do danego układu porusza się od punktu początkowego do punktu końcowego pod wpływem działającej na nią siły elektrostatycznej, wytworzonej przez resztę układu. Jeśli reszta układu jest nieruchoma, to praca  $W$  wykonana przez tę siłę jest taka sama dla *wszystkich* torów cząstki między punktami początkowym i końcowym.

Dla wygody, jako *konfigurację odniesienia* układu cząstek naładowanych wybieramy zwykle tę konfigurację, w której cząstki są nieskończenie od siebie oddalone. Przyjmujemy też zwykle, że *energia potencjalna odniesienia* jest równa zeru. Załóżmy, że kilka cząstek naładowanych, znajdujących się początkowo nieskończenie daleko od siebie (stan początkowy) zbliża się do siebie i tworzy układ cząstek, położonych w skończonych od siebie odległościach (stan końcowy). Niech początkowa energia potencjalna  $E_{p \text{ pocz}}$  będzie równa zeru i niech  $W_\infty$  reprezentuje pracę wykonaną przez siły elektrostatyczne przy ich zbliżaniu z nieskończoności. Na podstawie wzoru (25.1) końcowa energia potencjalna  $E_p$  układu jest więc równa:

$$E_p = -W_\infty. \quad (25.2)$$

Podobnie, jak inne rodzaje energii potencjalnej, elektryczną energię potencjalną uważa się za rodzaj energii mechanicznej. Przypomnij sobie z rozdziału 8, że jeśli w układzie izolowanym działają tylko siły zachowawcze, to energia mechaniczna układu jest zachowana. W dalszym ciągu tego rozdziału będziemy ten fakt często stosować.

### Sztuka rozwiązywania zadań

**Porada 1:** *Elektryczna energia potencjalna; praca wykonana przez pole elektryczne*

Elektryczna energia potencjalna jest związana z układem cząstek jako całością. Spotkamy się jednak (poczynając od przykładu 25.1) ze stwierdzeniami, które wiążą ją tylko z jedną cząstką

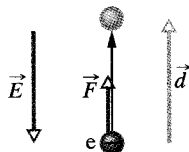
układu. Możemy na przykład przeczytać: „Elektron w polu elektrycznym ma energię potencjalną  $10^{-7} \text{ J}$ ”. Takie stwierdzenia są często możliwe do zaakceptowania, ale trzeba zawsze pamiętać, że energia potencjalna jest w rzeczywistości związana z układem — w tym przypadku z elektronem i cząstkami naładowanymi,

które wytwarzają pole elektryczne. Pamiętaj też, że ma sens przypisanie określonej wartości energii potencjalnej, jak  $10^{-7}$  J w tym przypadku, cząstce czy nawet układowi *tylko wtedy*, gdy znana jest energia potencjalna odniesienia.

Jeśli energia potencjalna związana jest tylko z jedną cząstką układu, to spotkasz się często ze sformułowaniem, że pracę nad cząstką wykonuje *pole elektryczne*. Oznacza to, że praca jest wykonywana przez siłę oddziaływania na cząstkę innych ładunków, które wytwarzają to pole.

## Przykład 25.1

Elektrony są bezustannie wybijane z cząsteczek powietrza w atmosferze przez cząstki promieniowania kosmicznego. Każdy elektron po uwolnieniu doznaje działania siły elektrostatycznej  $\vec{F}$ , wskutek istnienia pola elektrycznego, wytwarzanego w atmosferze przez naładowane cząstki, znajdujące się już na Ziemi. W pobliżu powierzchni Ziemi natężenie pola elektrycznego ma wartość  $E = 150$  N/C i jest skierowane w dół. Ile wynosi zmiana  $\Delta E_p$  elektrycznej energii potencjalnej uwolnionego elektronu, gdy siła elektrostatyczna powoduje, że przemieszcza się on pionowo do góry, na odległość  $d = 520$  m (rys. 25.1)?



**Rys. 25.1.** Przykład 25.1. Elektron w atmosferze doznaje przemieszczenia  $\vec{d}$ , skierowanego do góry, pod działaniem siły  $\vec{F}$ , związanej z polem elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$

### ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Zmiana  $\Delta E_p$  elektrycznej energii potencjalnej elektronu związana jest z pracą  $W$ , wykonaną przez pole elektryczne nad elektronem, zgodnie ze wzorem (25.1) ( $\Delta E_p = -W$ ).

➡ 2. Praca wykonana przez stałą siłę  $\vec{F}$  nad cząstką, przesuwaną się o  $\vec{d}$  wynosi:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}. \quad (25.3)$$

➡ 3. Siła elektrostatyczna i natężenie pola elektrycznego są powiązane wzorem  $\vec{F} = q\vec{E}$ , gdzie  $q$  jest ładunkiem elektronu ( $= -1,60 \cdot 10^{-19}$  C). Podstawiając wyrażenie na  $\vec{F}$  do wzoru (25.3) i obliczając iloczyn skalarny, otrzymujemy:

$$W = q\vec{E} \cdot \vec{d} = qEd \cos \theta, \quad (25.4)$$

gdzie  $\theta$  jest kątem między kierunkami  $\vec{E}$  i  $\vec{d}$ . Natężenie pola  $\vec{E}$  jest skierowane w dół, a przemieszczenie  $\vec{d}$  do góry, więc  $\theta = 180^\circ$ . Po podstawieniu tej i innych danych do wzoru (25.4) otrzymujemy:

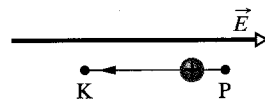
$$W = (-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(150 \text{ N/C})(520 \text{ m}) \cos 180^\circ = 1,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Ze wzoru 25.1 wynika, że:

$$\Delta E_p = -W = -1,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zgodnie z tym wynikiem elektryczna energia potencjalna elektronu po wzniesieniu się na wysokość 520 m *maleje* o  $1,2 \cdot 10^{-14}$  J.

✓ **SPRAWDZIAN 1:** Proton porusza się z punktu P do punktu K w jednorodnym polu elektrycznym skierowanym tak, jak pokazano na rysunku. a) Czy pole elektryczne wykonuje dodatnią, czy ujemną pracę nad protonem? b) Czy elektryczna energia potencjalna protonu wzrasta, czy maleje?



## 25.2. Potencjał elektryczny

Na podstawie przykładu 25.1 wnioskujemy, że energia potencjalna cząstki naładowanej w polu elektrycznym zależy od wartości ładunku cząstki. Jednak energia potencjalna przypadająca *na jednostkowy ładunek* w dowolnym punkcie pola elektrycznego ma już wartość niezależną od ładunku tej cząstki.

Założmy, że na przykład umieściliśmy cząstkę próbną o dodatnim ładunku  $1,60 \cdot 10^{-19}$  C w punkcie pola elektrycznego, w którym elektryczna energia potencjalna cząstki jest równa  $2,4 \cdot 10^{-17}$  J. Wtedy energia potencjalna przypadająca na jednostkowy ładunek wynosi:

$$\frac{2,4 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 150 \text{ J/C}.$$

Jeśli teraz zastąpimy cząstkę próbną cząstką o dwa razy większym ładunku dodatnim, czyli  $3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , to łatwo obliczyć, że druga cząstka ma elektryczną energię potencjalną  $4,8 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ , czyli dwa razy większą niż pierwsza. Energia potencjalna na jednostkowy ładunek będzie jednak nadal taka sama i równa  $150 \text{ J/C}$ .

Energia potencjalna na jednostkowy ładunek, czyli  $E_p/q$  jest więc niezależna od ładunku  $q$  zastosowanej cząstki i jest *cechą charakterystyczną tylko pola elektrycznego*, którym się zajmujemy. Energia potencjalna na jednostkowy ładunek w wybranym punkcie pola elektrycznego nosi nazwę **potencjału elektrycznego**  $V$  (lub po prostu **potencjału**) w tym punkcie. Stąd:

$$V = \frac{E_p}{q}. \quad (25.5)$$

*Zauważ, że potencjał elektryczny jest skalarem, a nie wektorem.*

Różnica potencjałów elektrycznych  $\Delta V$  między dwoma punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym jest równa różnicy energii potencjalnej na jednostkowy ładunek między tymi dwoma punktami:

$$\Delta V = V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = \frac{E_{p \text{ końc}}}{q} - \frac{E_{p \text{ pocz}}}{q} = \frac{\Delta E_p}{q}. \quad (25.6)$$

Po zastosowaniu wzoru (25.1) w celu zastąpienia  $\Delta E_p$  przez  $-W$  we wzorze (25.6) możemy zdefiniować różnicę potencjałów między punktami początkowym i końcowym jako:

$$\Delta V = V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -\frac{W}{q} \quad (\text{definicja różnicy potencjałów}). \quad (25.7)$$

Różnica potencjałów między dwoma punktami jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy wykonanej przez siłę elektrostatyczną, przy przesunięciu jednostkowego ładunku z jednego punktu do drugiego. Różnica potencjałów może być dodatnia, ujemna lub równa zero, zależnie od znaków i wartości wielkości  $q$  i  $W$ .

Jeśli przyjmiemy  $E_{p \text{ pocz}} = 0$  w nieskończoności jako naszą energię potencjalną odniesienia, to na podstawie wzoru (25.5) potencjał elektryczny musi tam być też równy zero. Wtedy ze względu na wzór (25.7) możemy zdefiniować potencjał elektryczny  $V$  w dowolnym punkcie pola elektrycznego wzorem:

$$V = -\frac{W_{\infty}}{q} \quad (\text{definicja potencjału}), \quad (25.8)$$

gdzie  $W_{\infty}$  jest pracą, wykonaną przez pole elektryczne nad cząstką naładowaną, gdy cząstka przesuwa się z nieskończoności do punktu końcowego. Potencjał  $V$  może być dodatni, ujemny lub równy zero, zależnie od znaków i wartości  $q$  i  $W_{\infty}$ .

Zgodnie ze wzorem (25.8) jednostką potencjału w układzie SI jest dżul na kulomb. Taka jednostka pojawia się tak często, że używa się specjalnej nazwy

wolt (w skrócie V) dla tej jednostki i stąd:

$$1 \text{ wolt} = 1 \text{ dżul na kulomb.} \quad (25.9)$$

Ta nowa jednostka pozwala nam przyjąć inną jednostkę natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , które dotąd mierzyliśmy w niutonach na kulomb. Po dwóch przekształceniach jednostek otrzymujemy:

$$1 \text{ N/C} = \left(1 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \left(\frac{1 \text{ V} \cdot \text{C}}{1 \text{ J}}\right) \left(\frac{1 \text{ J}}{1 \text{ N} \cdot \text{m}}\right) = 1 \text{ V/m.} \quad (25.10)$$

Czynnik przeliczeniowy w drugim nawiasie wynika ze wzoru (25.9), a w trzecim z definicji dżula. Odtąd będziemy wyrażali wartości natężenia pola elektrycznego w woltach na metr (V/m), a nie w niutonach na kulomb (N/C).

Na koniec możemy teraz zdefiniować jednostkę energii, która jest wygodna do pomiarów energii w obszarze atomowym i subatomowym: jeden *elektronowolt* (eV) jest energią równą pracy, potrzebnej do przesunięcia pojedynczego ładunku elementarnego  $e$ , na przykład elektronu czy protonu, między punktami o różnicy potencjałów równej jednemu woltowi. Ze wzoru (25.7) wynika, że wartość tej pracy wynosi  $q \Delta V$ , czyli:

$$1 \text{ eV} = e(1 \text{ V}) = (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J/C}) = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 2: Potencjał elektryczny i elektryczna energia potencjalna

Potencjał elektryczny  $V$  i elektryczna energia potencjalna  $E_p$  są różnymi wielkościami i nie należy ich mylić.

jest mierzony w dżulach na kulomb (J/C), czyli w woltach (V).

➤ *Elektryczna energia potencjalna* jest energią naładowanego ciała w zewnętrznym polu elektrycznym (lub bardziej precyzyjnie energią układu, składającego się z ciała i zewnętrznego pola elektrycznego); jest mierzona w dżulach (J).

➤ *Potencjał elektryczny* jest właściwością pola elektrycznego bez względu na obecność w nim naładowanego ciała;

## Praca wykonana przez siłę zewnętrzną

Załóżmy, że przesuujemy cząstkę o ładunku  $q$  od punktu początkowego do punktu końcowego w polu elektrycznym, działając na nią siłą. Podczas ruchu nasza siła wykonuje pracę  $W_p$  nad ładunkiem, a pole elektryczne wykonuje nad nim pracę  $W$ . Ze związku pracy i energii kinetycznej (7.10) wynika, że zmiana  $\Delta E_k$  energii kinetycznej cząstki wynosi:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W_p + W. \quad (25.11)$$

Założmy teraz, że cząstka spoczywa przed wprowadzeniem w ruch i po jej zatrzymaniu. Wtedy  $E_{k \text{ końc}}$  i  $E_{k \text{ pocz}}$  są równe zeru i wzór (25.11) redukuje się do:

$$W_p = -W. \quad (25.12)$$

Jednym słowem, praca  $W_p$ , wykonana przez przyłożoną siłę podczas ruchu jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy  $W$ , wykonanej przez pole elektryczne, jeśli nie nastąpiła zmiana energii kinetycznej.

Używając wzoru (25.12), w celu wprowadzenia  $W_p$  do wzoru (25.1), możemy powiązać pracę wykonaną przez przyłożoną przez nas siłę ze zmianą energii potencjalnej cząstki podczas ruchu. Otrzymujemy:

$$\Delta E_p = E_{p \text{ końc}} - E_{p \text{ pocz}} = W_p. \quad (25.13)$$

Podobnie, używając wzoru (25.12), w celu wprowadzenia  $W_p$  do wzoru (25.7), możemy powiązać pracę  $W_p$  z różnicą potencjałów elektrycznych  $\Delta V$  między początkowym i końcowym położeniem cząstki. Otrzymujemy wtedy:

$$W_p = q \Delta V. \quad (25.14)$$

Praca  $W_p$  może być dodatnia, ujemna lub równa zero, zależnie od znaków i wartości wielkości  $q$  i  $\Delta V$ . Jest to praca, jaką musimy wykonać przy przesuwaniu cząstki o ładunku  $q$ , między punktami o różnicy potencjałów  $\Delta V$ , bez spowodowania zmiany energii kinetycznej cząstki.

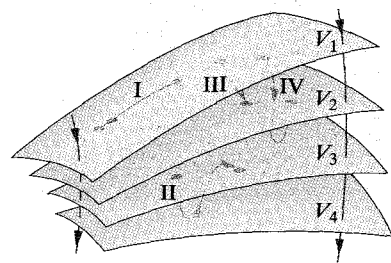
**SPRAWDZIAN 2:** W sprawdzianie 1 przesuwaliśmy proton z punktu początkowego do punktu końcowego w jednorodnym polu elektrycznym, skierowanym jak pokazano na rysunku. a) Czy nasza siła wykonuje przy tym dodatnią, czy ujemną pracę? b) Czy proton przesuwa się do punktu o większym, czy mniejszym potencjale?

## 25.3. Powierzchnie ekwipotencjalne

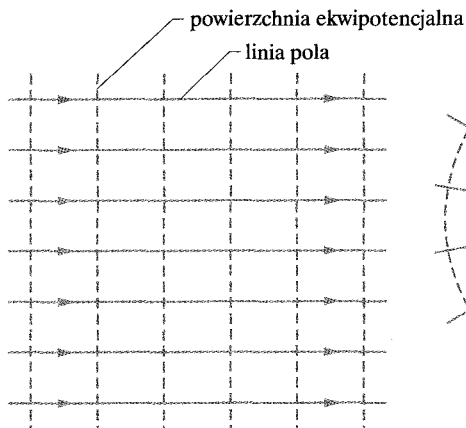
Sąsiadujące ze sobą punkty, które mają taki sam potencjał elektryczny, tworzą **powierzchnię ekwipotencjalną**, która może być albo wyobrażoną powierzchnią, albo rzeczywistą powierzchnią fizyczną. Jeśli cząstka porusza się między dwoma punktami początkowym i końcowym po tej samej powierzchni ekwipotencjalnej, to pole elektryczne nie wykonuje nad cząstką naładowaną żadnej pracy  $W$ . Wynika to ze wzoru (25.7), zgodnie z którym  $W = 0$ , jeśli  $V_{\text{końc}} = V_{\text{pocz}}$ . Z niezależności pracy (i stąd energii potencjalnej oraz potencjału) od drogi mamy  $W = 0$  dla *dowolnej* linii łączącej punkty początkowy i końcowy leżące na powierzchni ekwipotencjalnej, bez względu na to, czy tor cząstki leży całkowicie na powierzchni ekwipotencjalnej.

Na rysunku 25.2 przedstawiono *rodzinę* powierzchni ekwipotencjalnych związanych z polem elektrycznym, wytworzonym przez pewien rozkład ładunków. Praca wykonywana przez pole elektryczne nad cząstką naładowaną, gdy cząstka porusza się po torach I i II, jest równa zero, ponieważ każdy z tych torów zaczyna się i kończy na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej. Praca wykonywana podczas ruchu naładowanej cząstki po torach III i IV nie jest równa zero, ale ma taką samą wartość dla obydwu tych torów, ponieważ początkowe i końcowe potencjały są identyczne dla tych dwóch torów, czyli tory III i IV łączą tę samą parę powierzchni ekwipotencjalnych.

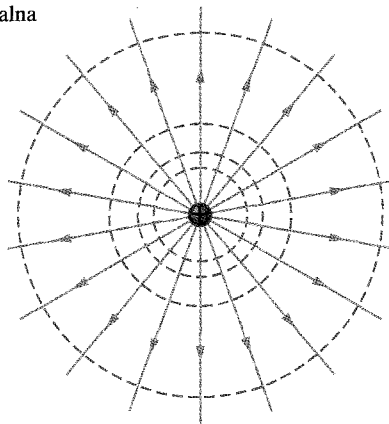
Ze względu na symetrię powierzchnie ekwipotencjalne pola wytworzonego przez ładunek punktowy lub sferycznie symetryczny rozkład ładunku są współśrodkowymi sferami. Dla jednorodnego pola elektrycznego powierzchnie ekwipotencjalne są płaszczyznami prostopadłymi do linii pola. Powierzchnie ekwipotencjalne są zawsze prostopadłe do linii pola elektrycznego i stąd do



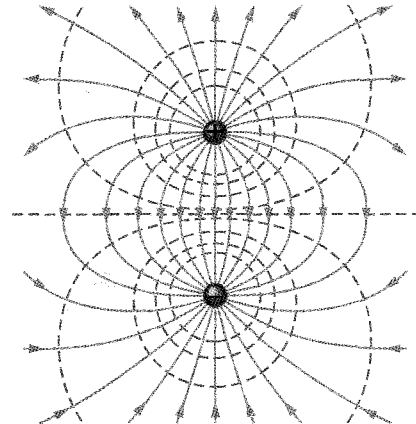
**Rys. 25.2.** Fragmenty czterech powierzchni ekwipotencjalnych, odpowiadających potencjałom elektrycznym  $V_1 = 100 \text{ V}$ ,  $V_2 = 80 \text{ V}$ ,  $V_3 = 60 \text{ V}$  i  $V_4 = 40 \text{ V}$ . Przedstawiono cztery tory, po których może się poruszać ładunek próbny. Zaznaczono też dwie linie pola elektrycznego



a)



b)



c)

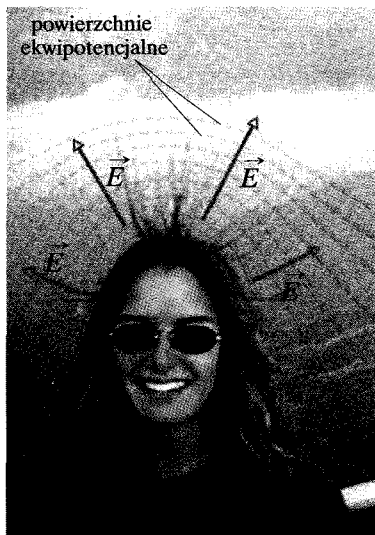
**25.3.** Linie pola elektrycznego (fioletowe) i przekroje powierzchni ekwipotencjalnych (żółte) dla: a) pola jednorodnego, b) pola ładunku punkowego, c) pola dipola elektrycznego

natężenia  $\vec{E}$ , które jest zawsze styczne do tych linii. Jeśli natężenie  $\vec{E}$  nie byłoby prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej, to miałoby składową leżącą wzdłuż tej powierzchni. Składowa ta wykonywałaby więc pracę nad cząstką naładowaną, przy jej ruchu po powierzchni. Jednak biorąc pod uwagę wzór (25.7), praca nie może być wykonywana, jeśli powierzchnia jest rzeczywiście ekwipotencjalna; wynika stąd jedyny możliwy wniosek, że natężenie  $\vec{E}$  musi być wszędzie prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej. Na rysunku 25.3 przedstawiono linie pola elektrycznego i przekroje powierzchni ekwipotencjalnych dla jednorodnego pola elektrycznego, dla pola ładunku punkowego i dla pola dipola elektrycznego.

Powróćmy teraz do kobiety przedstawionej na fotografii otwierającej ten rozdział. Kobieta stała na platformie połączonej ze zboczem góry, miała zatem prawie ten sam potencjał, jak zbocze góry. Nad jej głową przesunął się silnie naładowany układ chmur, który wytworzył wokół niej i wokół zbocza góry silne pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , skierowanym na zewnątrz od niej i od góry. Siły elektrostatyczne, związane z tym polem przesunęły pewne elektrony przewodnictwa w ciele kobiety w dół, pozostawiając kosmyki jej włosów naładowane dodatnio. Wartość natężenia  $\vec{E}$  była oczywiście duża, ale mniejsza od wartości  $3 \cdot 10^6$  V/m, która spowodowałaby przebicie elektryczne w powietrzu. (Wartość ta została przekroczona nieco później, gdy piorun uderzył w platformę).

Powierzchnie ekwipotencjalne otaczające kobietę na platformie można wyznaczyć z rozkładu jej włosów; kosmyki układają się wzdłuż kierunku natężenia  $\vec{E}$  i są stąd prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych — na rysunku 25.4 przedstawiono te powierzchnie ekwipotencjalne. Wartość natężenia  $E$  była oczywiście największa (powierzchnie ekwipotencjalne były wyraźnie najbliżej siebie) tuż nad jej głową, ponieważ włosy podniosły się tam bardziej, niż włosy po bokach.

Wynika stąd prosty wniosek. Jeśli pole elektryczne powoduje powstanie włosów na głowie, to lepiej się gdzieś schronić niż pozować do zdjęcia.



**Rys. 25.4.** Na zdjęciu otwierającym ten rozdział przedstawiono skutki działania chmur wytwarzających silne pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , w pobliżu głowy kobiety. Wiele włosów ułożyło się wzdłuż linii tego pola, które są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych; natężenie pola jest największe tam, gdzie te powierzchnie są najbliżej siebie, czyli tuż nad głową

## 25.4. Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola

Różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami początkowym  $P$  i końcowym  $K$  w polu elektrycznym możemy obliczyć, jeśli znamy wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  wzdłuż jakiegokolwiek drogi łączącej te punkty. W celu wykonania obliczeń wyznaczamy pracę, wykonaną przez pole nad dodatnim ładunkiem próbnym przy przesuwaniu ładunku od punktu początkowego do punktu końcowego i następnie stosujemy wzór (25.7).

Rozważmy dowolne pole elektryczne, przedstawione na rysunku 25.5 przy zastosowaniu linii pola i dodatni ładunek próbnny  $q_0$ , który porusza się wzdłuż przedstawionego toru, od punktu początkowego do punktu końcowego. Dla nieskończenie małego przesunięcia  $d\vec{s}$ , w dowolnym punkcie toru na ładunek działa siła elektrostatyczna  $q_0\vec{E}$ . Z rozdziału 7 wiemy, że praca  $dW$ , wykonana nad cząstką przez siłę  $\vec{F}$ , przy przesunięciu  $d\vec{s}$  wynosi:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (25.15)$$

Dla sytuacji z rysunku 25.5  $\vec{F} = q_0\vec{E}$  i wzór (25.15) przyjmuje postać:

$$dW = q_0\vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.16)$$

Aby znaleźć całkowitą pracę  $W$ , wykonaną nad cząstką przez pole, podczas jej ruchu od punktu początkowego do punktu końcowego, sumujemy przez całkowanie prace, wykonane nad ładunkiem przy wszystkich przesunięciach  $d\vec{s}$  wzdłuż toru:

$$W = q_0 \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.17)$$

Jeśli podstawimy całkowitą pracę  $W$  ze wzoru (25.17) do wzoru (25.4), to otrzymamy:

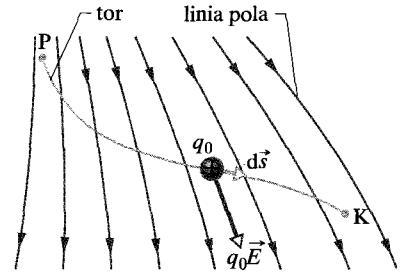
$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.18)$$

Stąd różnica potencjałów  $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$  między dowolnymi dwoma punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym jest równa взяtej ze znakiem minus całce krzywoliniowej (całce wzdłuż toru cząstki) z  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  od punktu początkowego do punktu końcowego. Siła elektrostatyczna jest zachowawcza, dlatego też dla każdego toru otrzymujemy ten sam wynik (niezależnie od tego, czy całkę łatwo, czy trudno obliczyć).

Jeśli natężenie pola elektrycznego jest znane w pewnym obszarze, to wzór (25.18) pozwala obliczyć różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami tego obszaru. Jeśli wybierzemy potencjał  $V_{\text{pocz}}$  w punkcie początkowym równy zeru, to wzór (25.18) przyjmuje postać:

$$V = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (25.19)$$

w której pominęliśmy wskaźnik przy  $V_{\text{końc}}$ . Wzór (25.19) daje nam potencjał  $V$  w dowolnym punkcie końcowym pola elektrycznego względem zerowego poten-



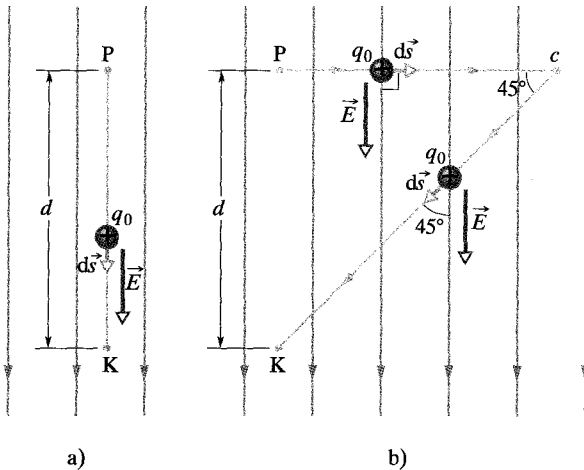
Rys. 25.5. Ładunek próbnny  $q_0$  porusza się od punktu początkowego  $P$  do punktu końcowego  $K$  wzdłuż przedstawionego toru w niejednorodnym polu elektrycznym. Na ładunek próbnny przy przemieszczeniu o  $d\vec{s}$  działa siła elektrostatyczna  $q_0\vec{E}$ . Siła ta jest skierowana stycznie do linii pola w miejscu, w którym znajduje się ładunek próbnny

cjału w punkcie początkowym. Jeśli punkt początkowy wybierzemy w nieskończoności, to wzór (25.19) określa potencjał w dowolnym punkcie końcowym względem zerowego potencjału w nieskończoności.

**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono przekrój zbioru równoległych powierzchni ekwipotencjalnych i pięć torów, wzdłuż których będziemy przesuwać elektron z jednej powierzchni na drugą. a) Jaki jest kierunek natężenia pola elektrycznego na tych powierzchniach? b) Określ dla każdego toru, czy wykonywana praca jest dodatnia, ujemna, czy równa zero. c) U szereguj torów według wykonanej pracy, zaczynając od największej.

## Przykład 25.2

a) Na rysunku 25.6a przedstawiono dwa punkty początkowy P i końcowy K w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ . Punkty te leżą na tej samej linii pola elektrycznego (nie pokazanej) i znajdują się w odległości  $d$ . Znajdź różnicę potencjałów  $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$  przez przesunięcie dodatniego ładunku próbnego  $q_0$  od punktu P do punktu K wzdłuż przedstawionego toru, który jest równoległy do kierunku natężenia pola.



**Rys. 25.6.** Przykład 25.2. a) Ładunek próbny  $q_0$  porusza się po linii prostej od punktu P do punktu K, wzdłuż linii jednorodnego pola elektrycznego. b) Ładunek  $q_0$  porusza się wzdłuż toru  $P \rightarrow c \rightarrow K$  w tym samym polu elektrycznym

### ROZWIĄZANIE:

Możemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma dowolnymi punktami w polu elektrycznym przez obliczenie całki z  $\vec{E}$  po  $d\vec{s}$  wzdłuż linii łączącej te dwa punkty, zgodnie ze wzorem (25.18). Zrobimy to, przesuując w myśli ładunek próbny  $q_0$

wzdłuż tej linii od punktu początkowego P do punktu końcowego K. Przy przesuwanie ładunku próbnego wzdłuż toru na rysunku 25.6a przesunięcie  $d\vec{s}$  ma zawsze taki sam kierunek, jak  $\vec{E}$ . Stąd kąt  $\theta$  między  $\vec{E}$  i  $d\vec{s}$  jest równy zero i iloczyn skalarny we wzorze (25.18) wynosi:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds \cos \theta = E ds. \quad (25.20)$$

Wzory (25.18) i (25.20) dają nam wtedy:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} E ds. \quad (25.21)$$

Pole jest jednorodne, a więc natężenie  $E$  jest stałe wzdłuż toru i może zostać wyłączone przed całkę, co daje:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -E \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} ds = -Ed, \quad (\text{odpowiedź})$$

gdzie wartość całki jest po prostu długością  $d$  toru. Znak minus przy wyniku oznacza, że potencjał w punkcie końc na rysunku 25.6a jest mniejszy niż potencjał w punkcie pocz. Jest to wynik ogólny: potencjał zawsze maleje wzdłuż toru rozciągającego się w kierunku linii pola elektrycznego.

b) Znajdź teraz różnicę potencjałów  $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$  przez przesunięcie dodatniego ładunku próbnego  $q_0$  z punktu początkowego do punktu końcowego wzdłuż linii  $P \rightarrow c \rightarrow K$ , przedstawionej na rysunku 25.6b.

### ROZWIĄZANIE:

Ponownie zastosujemy podstawową ideę z punktu (a), ale teraz ładunek próbny porusza się wzdłuż toru, składającego się z dwóch linii  $P \rightarrow c$  i  $c \rightarrow K$ . We wszystkich punktach wzdłuż linii  $P \rightarrow c$  przesunięcie  $d\vec{s}$  ładunku próbnego jest prostopadłe do  $\vec{E}$ . Stąd kąt  $\theta$  między  $\vec{E}$  i  $d\vec{s}$  jest równy  $90^\circ$  i iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  wynosi zero. Ze wzoru (25.18) wynika wtedy, że punkty P i c mają ten sam potencjał:  $V_c - V_{\text{pocz}} = 0$ .

Dla linii  $c \rightarrow K$  mamy  $\theta = 45^\circ$  i ze wzoru (25.18):

$$\begin{aligned} V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} &= - \int_c^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= - \int_c^{\text{końc}} E(\cos 45^\circ) ds = -E \cdot \cos 45^\circ \int_c^{\text{końc}} ds. \end{aligned}$$

Całka w tym równaniu jest po prostu długością linii  $c \rightarrow K$  i z rysunku 25.6b wynika, że długość ta wynosi  $d/\sin 45^\circ$ . Stąd:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -E(\cos 45^\circ) \frac{d}{\sin 45^\circ} = -Ed. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zgodnie z oczekiwaniem otrzymaliśmy taki sam wynik, jak w punkcie (a) — różnica potencjałów między dwoma punktami nie zależy od drogi między nimi. Wniosek: gdy chcemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami, przez przesunięcie ładunku próbnego między nimi, możemy zaoszczędzić czas i pracę dzięki wyborowi drogi, który upraszcza zastosowanie wzoru (25.18).

## 25.5. Potencjał pola ładunku punktowego

Zastosujemy obecnie wzór (25.18) w celu wyprowadzenia wyrażenia na potencjał elektryczny  $V$  w przestrzeni wokół cząstki naładowanej, względem potencjału zerowego w nieskończoności. Rozważmy punkt  $P$  w odległości  $R$  od nieruchomej cząstki o dodatnim ładunku  $q$  (rys. 25.7). Aby skorzystać ze wzoru (25.18), wyobraźmy sobie, że przesuwamy dodatni ładunek próbnny  $q_0$  z punktu  $P$  do nieskończoności. Ponieważ nie jest istotny tor, jaki wybieramy, a więc wybierzmy najprostszy — wzdłuż prostej przechodzącej przez ładunek  $q$  i punkt  $P$ .

Aby zastosować wzór (25.18), musimy obliczyć iloczyn skalarny:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cos \theta ds. \quad (25.22)$$

Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  na rysunku 25.7 jest skierowane radialnie od wybranej cząstki. Stąd przesunięcie  $d\vec{s}$  cząstki próbnej wzdłuż jej toru ma ten sam kierunek co  $\vec{E}$ . Oznacza to, że we wzorze (25.22) kąt  $\theta = 0$  i  $\cos \theta = 1$ . Tor jest radialny, a więc możemy napisać  $ds = dr$ . Następnie podstawiając granice  $R$  i  $\infty$ , możemy zapisać wzór (25.18) w postaci:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_R^\infty E dr. \quad (25.23)$$

Przyjmijmy teraz  $V_{\text{końc}} = 0$  (w  $\infty$ ) i  $V_{\text{pocz}} = V$  (w odległości  $R$ ). Następnie do wzoru na wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek próbnny, podstawimy ze wzoru (23.3):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (25.24)$$

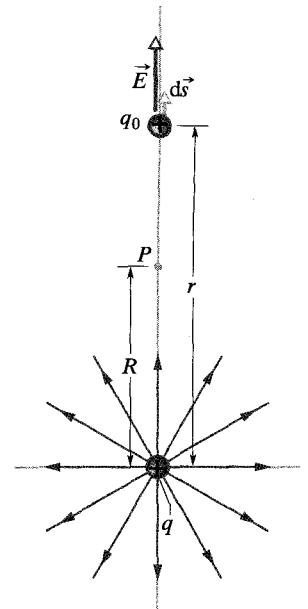
Po tych zmianach wzór (25.23) przyjmuje postać:

$$0 - V = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_R^\infty = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \quad (25.25)$$

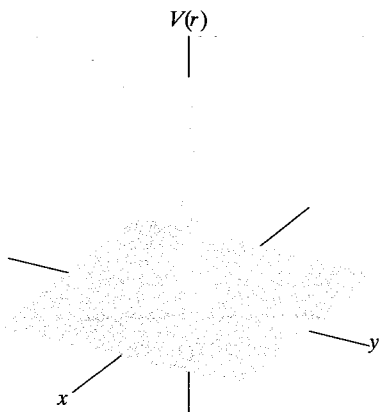
Wyznaczając  $V$  i zamieniając  $R$  na  $r$ , otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (25.26)$$

jako wyrażenie na potencjał  $V$  pola wytworzonego przez cząstkę o ładunku  $q$ , w dowolnej odległości  $r$  od cząstki.



**Rys. 25.7.** Dodatni ładunek punktowy  $q$  wytwarza pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$  i potencjale elektrycznym  $V$  w punkcie  $P$ . Potencjał obliczamy, przesuwając ładunek próbnny  $q_0$  z punktu  $P$  do nieskończoności. Ładunek próbnny jest przedstawiony w odległości  $r$  od ładunku punktowego; zaznaczono przemieszczenie  $d\vec{s}$



**25.8.** Komputerowy wykres potencjału elektrycznego  $V(r)$  pola dodatniego ładunku punkowego, znajdującego się w początku płaskiego układu współrzędnych  $xy$ . Potencjał w punktach tej płaszczyzny jest odłożony na osi pionowej. (Zakrzywione linie dodano dla uzyskania lepszej widoczności wykresu). Nieskończona wartość potencjału  $V$  przewidywana przez wzór (25.26) dla  $r = 0$  nie została tu zaznaczona

Chociaż wyprowadziliśmy wzór (25.26) dla cząstki naładowanej dodatnio, to wyprowadzenie jest słuszne także dla cząstki naładowanej ujemnie, tzn. gdy  $q$  jest wielkością ujemną. Zauważ, że znak  $V$  jest taki sam, jak znak  $q$ :

➤ Cząstka dodatnio naładowana wytwarza dodatni potencjał elektryczny. Cząstka ujemnie naładowana wytwarza ujemny potencjał elektryczny.

Na rysunku 25.8 przedstawiono przestrzenny wykres zależności (25.26) dla dodatnio naładowanej cząstki — wartość  $V$  jest na osi pionowej. Zauważ, że wartość potencjału wzrasta, gdy  $r$  maleje. W rzeczywistości zgodnie ze wzorem (25.26) potencjał  $V$  staje się nieskończony przy  $r = 0$ , chociaż na rysunku 25.8 mamy w tym punkcie skończoną dużą wartość.

Wzór (25.26) określa również potencjał elektryczny *poza lub na zewnętrznej powierzchni* sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku. Możemy to udowodnić, korzystając z jednego z twierdzeń o powłoce z paragrafów 22.4 i 24.9 do zastąpienia danego sferycznego rozkładu ładunku przez ładunek całkowity umieszczony w środku. Wtedy możemy powtórzyć wyprowadzenie, prowadzące do wzoru (25.26), jeśli tylko nie rozważamy punktu wewnątrz danego rozkładu.

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 3: Obliczanie różnicy potencjałów

W celu obliczenia różnicy potencjałów  $\Delta V$  między dowolnymi dwoma punktami, w polu izolowanego ładunku punkowego, na-

leży obliczyć ze wzoru (25.26) potencjał w każdym punkcie i następnie odjąć wyniki. Ze względu na to odejmowanie wartość  $\Delta V$  nie zależy od wyboru energii potencjalnej odniesienia.

## 25.6. Potencjał pola układu ładunków punktowych

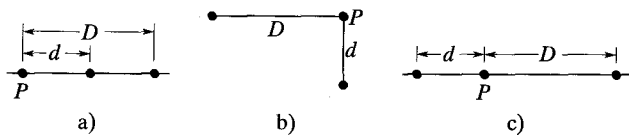
Wypadkowy potencjał układu ładunków punktowych w jakimś punkcie możemy obliczyć, korzystając z zasady superpozycji. Obliczamy oddzielnie potencjały, pochodzące od każdego ładunku w danym punkcie (przy zastosowaniu wzoru (25.26) z uwzględnieniem znaku ładunku) i następnie sumujemy te potencjały. Dla układu  $n$  ładunków wypadkowy potencjał wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (n \text{ ładunków punktowych}), \quad (25.27)$$

gdzie  $q_i$  jest wartością  $i$ -tego ładunku, a  $r_i$  jest odległością danego punktu od  $i$ -tego ładunku. Suma we wzorze (25.27) jest *sumą algebraiczną*, a nie sumą

wektorową, jak suma przy obliczaniu natężenia pola elektrycznego dla układu ładunków punktowych. Na tym polega przewaga rachunkowa potencjału nad natężeniem pola elektrycznego: łatwiej jest zsumować kilka wielkości skalnych niż zsumować kilka wielkości wektorowych, dla których trzeba uwzględniać kierunki i składowe.

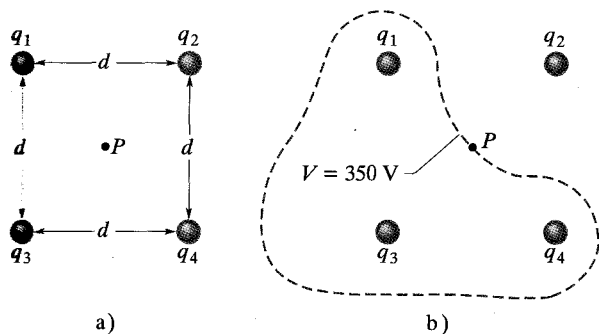
**SPRAWDZIAN 4:** Na rysunku przedstawiono trzy układy, zawierające po dwa protony. Uszereguj te układy według wypadkowego potencjału pola, wytworzonego przez protony w punkcie  $P$ , zaczynając od największego.



## Przykład 25.3

Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie  $P$ , znajdującym się w środku kwadratu, w którego wierzchołkach umieszczone są ładunki punktowe (rys. 25.9a)? Odległość  $d$  wynosi 1,3 m, a ładunki mają wartości:

$$\begin{aligned} q_1 &= +12 \text{ nC}, & q_3 &= +31 \text{ nC}, \\ q_2 &= -24 \text{ nC}, & q_4 &= +17 \text{ nC}. \end{aligned}$$



**Rys. 25.9.** Przykład 25.3. a) Cztery ładunki punktowe znajdują się w wierzchołkach kwadratu. b) Zamknięta krzywa jest przekrojem płaszczyzny rysunku i powierzchni ekwipotencjalnej, zawierającej punkt  $P$ . (Krzywa jest naszkicowana tylko orientacyjnie)

## ROZWIĄZANIE:

➡ Potencjał elektryczny  $V$  w punkcie  $P$  jest algebraiczną sumą potencjałów elektrycznych pochodzących od czterech ładunków punktowych. (Potencjał elektryczny jest skalar, zatem nie jest ważne, który z ładunków znajduje się w którym wierzchołku). Stąd ze wzoru (25.27) mamy:

$$V = \sum_{i=1}^4 V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r} + \frac{q_4}{r} \right).$$

Odległość  $r$  wynosi  $d/\sqrt{2}$ , czyli 0,919 m, a suma ładunków jest równa:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = (12 - 24 + 31 + 17) \cdot 10^{-9} \text{ C} = 36 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

zatem:

$$V = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(36 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{0,919 \text{ m}} \approx 350 \text{ V}.$$

(odpowiedź)

W pobliżu każdego z trzech dodatnich ładunków na rysunku 25.9a potencjał ma bardzo duże wartości dodatnie. W pobliżu pojedynczego ładunku ujemnego potencjał ma bardzo duże wartości ujemne. Dlatego w kwadracie powinny znajdować się punkty, które mają taki sam potencjał, jak w punkcie  $P$ . Krzywa na rysunku 25.9b ilustruje przekrój płaszczyzny rysunku z powierzchnią ekwipotencjalną zawierającą punkt  $P$ . Dowolny punkt na tej krzywej ma taki sam potencjał, jak punkt  $P$ .

## Przykład 25.4

a) Na rysunku 25.10a przedstawiono 12 elektronów (o ładunku  $-e$ ), rozmieszczonych w jednakowych odległościach na okręgu o promieniu  $R$ . Jaki jest potencjał elektryczny i natężenie pola elektrycznego elektronów w środku  $C$  okręgu (względem  $V = 0$  w nieskończoności)?

## ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Potencjał elektryczny  $V$  w punkcie  $C$  jest sumą algebraiczną potencjałów elektrycznych, pochodzących od każdego elektronu. (Potencjał elektryczny jest skalar, dlatego też miejsca elektronów nie odgrywają roli). Elektrony mają takie same ładunki  $-e$  i wszystkie są umieszczone w takiej samej odległości

$R$  od punktu  $C$ , a więc wzór (25.27) daje nam:

$$V = -12 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (25.28)$$

➡ 2. Natężenie pola elektrycznego jest wielkością wektorową, dlatego też w tym przypadku miejsca elektronów są ważne. Ze względu na symetrię ustawienia na rysunku 25.10a wektor natężenia pola elektrycznego w punkcie  $C$  od dowolnego danego elektronu znosi się z wektorem natężenia pola od elektronu, leżącego na przeciwnym końcu średnicy i dlatego w punkcie  $C$ :

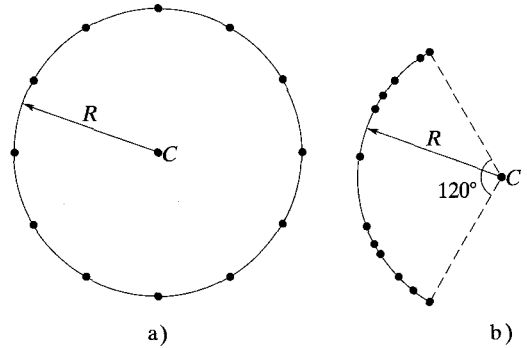
$$\vec{E} = 0. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jeśli elektrony przesuniemy wzdłuż okręgu tak, że są one rozłożone nierównomiernie na łuku okręgu o kącie środkowym  $120^\circ$  (rys. 25.10b), to jaki będzie wtedy potencjał w punkcie  $C$ ? Jak zmieni się natężenie pola elektrycznego w punkcie  $C$  (jeśli się w ogóle zmieni)?

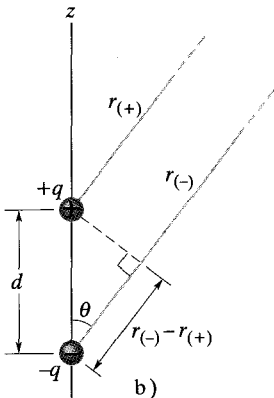
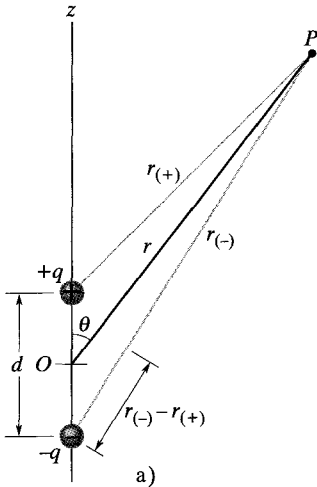
### ROZWIĄZANIE:

Potencjał jest nadal opisany wzorem (25.28), ponieważ odległość od punktu  $C$  żadnego z elektronów nie uległa zmianie, a ich usta-

wienie jest nieistotne. Natężenie pola elektrycznego przestaje być równe zero, ponieważ ustawienie elektronów nie jest już symetryczne. Niezerowe wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest teraz skierowane w stronę ładunków.



Rys. 25.10. Przykład 25.4. a) Dwanaście elektronów rozłożono równomiernie na okręgu. b) Tutaj elektrony są rozmieszczone nierównomiernie na łuku tego samego okręgu



## 25.7. Potencjał pola dipola elektrycznego

Zastosujemy obecnie wzór (25.27) w celu obliczenia potencjału dipola elektrycznego w dowolnym punkcie  $P$  (rys. 25.11a). W punkcie  $P$  dodatni ładunek punktowy (znajdujący się w odległości  $r_{(+)}$ ) wytwarza potencjał  $V_{(+)}$  i ujemny ładunek punktowy (w odległości  $r_{(-)}$ ) wytwarza potencjał  $V_{(-)}$ . Wypadkowy potencjał w punkcie  $P$  zgodnie ze wzorem (25.27) wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^2 V_i = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}. \quad (25.29)$$

Dipole występujące w przyrodzie, na przykład odpowiadające wielu cząsteczkom, są całkiem małe i jesteśmy zwykle zainteresowani tylko punktami znajdującymi się w dużych odległościach od dipola,  $r \gg d$ , gdzie  $d$  jest odległością między ładunkami. Przy tych warunkach z rysunku 25.11b wynikają następujące przybliżenia:

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d \cos \theta \quad \text{ i } \quad r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2.$$

Jeśli podstawimy te wielkości do wzoru (25.29), to przybliżona wartość  $V$  będzie wynosić:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2},$$

Rys. 25.11. a) Punkt  $P$  znajduje się w odległości  $r$  od środka  $O$  dipola. Prosta  $OP$  tworzy kąt  $\theta$  z osią dipola. b) Jeśli punkt  $P$  znajduje się daleko od dipola, to odcinki o długościach  $r_{(+)}$  i  $r_{(-)}$  są w przybliżeniu równoległe do odcinka o długości  $r$  i odcinek czarnej linii przerywanej jest w przybliżeniu prostopadły do odcinka o długości  $r_{(-)}$

gdzie kąt  $\theta$  jest mierzony od osi dipola jak na rysunku 25.11a. Wzór ten możemy teraz zapisać w postaci:

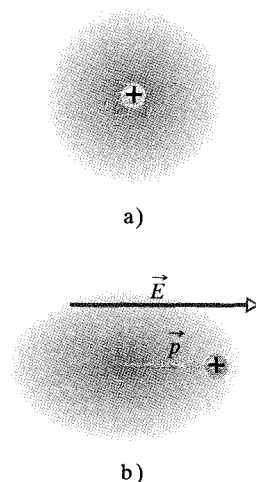
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (\text{dipol elektryczny}), \quad (25.30)$$

gdzie  $p (= qd)$  jest wartością elektrycznego momentu dipolowego  $\vec{p}$ , zdefiniowanego w paragrafie 23.5. Wektor  $\vec{p}$  jest skierowany wzdłuż osi dipola, od ujemnego do dodatniego ładunku (dlatego też kąt  $\theta$  jest mierzony od kierunku wektora  $\vec{p}$ ).

**SPRAWDZIAN 5:** Załóżmy, że wybraliśmy trzy punkty w równych (dużych) odległościach  $r$  od środka dipola z rysunku 25.11: punkt  $a$  znajduje się na osi dipola, powyżej ładunku dodatniego, punkt  $b$  znajduje się na osi dipola, poniżej ładunku ujemnego i punkt  $c$  znajduje się w płaszczyźnie prostopadłej do dipola, przechodzącej przez środek dipola. Uszereguj punkty według odpowiadających im wartości potencjału elektrycznego dipola, zaczynając od największej dodatniej.

## Indukowany moment dipolowy

Wiele cząsteczek, na przykład cząsteczka wody, ma *trwały* elektryczny moment dipolowy. Dla innych cząsteczek (zwanymi *cząsteczkami niepolarnymi*) i dla każdego odoosobnionego atomu środki ładunku dodatniego i ujemnego pokrywają się (rys. 25.12a) i stąd nie powstaje żaden moment dipolowy. Jeśli jednak umieścimy atom lub cząsteczkę niepolarną w zewnętrznym polu elektrycznym, to pole odkształca orbity elektronu i rozsuwa środki ładunku dodatniego i ujemnego (rys. 25.12b). Elektrony są naładowane ujemnie, a więc ulegają przesunięciu w kierunku przeciwnym do kierunku natężenia pola. To przesunięcie prowadzi do powstania momentu dipolowego  $\vec{p}$ , skierowanego w kierunku natężenia pola. Taki moment dipolowy nazywamy *indukowanym przez pole*, a o atomie lub cząsteczce mówimy, że są *spolaryzowane przez pole* (jedna część jest naładowana dodatnio, a druga ujemnie). Gdy usuniemy pole, indukowany moment dipolowy i polaryzacja znikną.



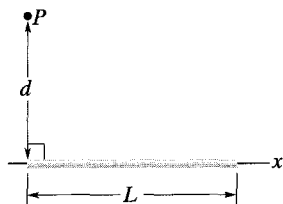
**Rys. 25.12.** a) Atom z dodatnio naładowanym jądrem (kolor zielony) i ujemnie naładowanymi elektronami (kolor złoty cieniowany). Środki ładunku dodatniego i ujemnego się pokrywają. b) Jeśli atom znajdzie się w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , to orbity elektronów ulegną takiemu odkształceniu, że środki ładunku dodatniego i ujemnego przestaną się pokrywać. Pojawi się indukowany moment dipolowy  $\vec{p}$ . Odkształcenie zostało tu wyolbrzymione

## 25.8. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

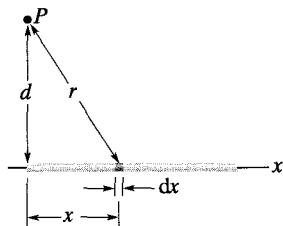
Jeśli rozkład ładunku  $q$  jest ciągły (jak np. dla jednorodnie naładowanego cienkiego pręta czy tarczy), to nie możemy zastosować sumowania ze wzoru (25.27) w celu obliczenia potencjału  $V$  w punkcie  $P$ . Zamiast tego musimy wybrać nieskończenie mały element ładunku  $dq$ , określić potencjał  $dV$ , wytworzony przez  $dq$  w punkcie  $P$  i potem scałkować go po całym rozkładzie ładunku.

Przyjmijmy ponownie, że potencjał jest równy zeru w nieskończoności. Jeśli potraktujemy element ładunku  $dq$  jako ładunek punktowy, to możemy skorzystać ze wzoru (25.26), w celu wyrażenia potencjału  $dV$ , wytworzonego przez  $dq$  w punkcie  $P$ :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad (\text{dodatnie lub ujemne } dq), \quad (25.31)$$



a)



b)

Rys. 25.13. a) Cienki, jednorodnie naładowany pręt wytwarza potencjał elektryczny  $V$  w punkcie  $P$ . b) Element ładunku wytwarza potencjał  $dV$  w punkcie  $P$

gdzie  $r$  jest odległością między  $P$  i  $dq$ . W celu znalezienia całkowitego potencjału  $V$  w punkcie  $P$ , obliczamy całkę, aby zsumować potencjały wytworzone przez wszystkie elementy ładunku

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}. \quad (25.32)$$

Całkę należy obliczyć po całym rozkładzie ładunku. Zauważ, że nie ma potrzeby rozważania we wzorze (25.32) *żadnych składowych wektora*, gdyż potencjał elektryczny jest skalarem.

Zbadamy teraz dwa ciągle rozkłady ładunku: naładowaną linię i naładowaną tarczę.

### Naładowana linia

Na rysunku 25.13a przedstawiono cienki, nieprzewodzący pręt o długości  $L$ , naładowany jednorodnie dodatnio z gęstością liniową  $\lambda$ . Określimy potencjał elektryczny  $V$ , wytworzony przez pręt w punkcie  $P$ , leżącym na prostej prostopadłej do pręta przechodzącej przez jego lewy koniec i odległym od lewego końca o  $d$ .

Rozważmy element  $dx$  pręta (rys. 25.13b). Ten (i każdy inny) element pręta ma ładunek:

$$dq = \lambda dx \quad (25.33)$$

i wytwarza potencjał elektryczny  $dV$  w punkcie  $P$ , który znajduje się w odległości  $r = (x^2 + d^2)^{1/2}$  od elementu. Traktując element jak ładunek punktowy, możemy skorzystać ze wzoru (25.31) do napisania potencjału  $dV$  w postaci:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}}. \quad (25.34)$$

Ładunek w pręcie jest dodatni i wybraliśmy  $V = 0$  w nieskończoności; z paragrafu 25.5 wnioskujemy zatem, że potencjał  $dV$  we wzorze (25.34) musi być dodatni.

Znajdziemy teraz całkowity potencjał  $V$ , wytworzony przez pręt w punkcie  $P$ , przez scałkowanie wzoru (25.34) wzdłuż pręta, od  $x = 0$  do  $x = L$ , z zastosowaniem całki 17 z dodatku E. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{(x^2 + d^2)^{1/2}} dx \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(x + (x^2 + d^2)^{1/2}) \right]_0^L \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(L + (L^2 + d^2)^{1/2}) - \ln d \right]. \end{aligned}$$

Wynik ten możemy uprościć, stosując związek  $\ln A - \ln B = \ln A/B$ . Ostatecznie otrzymujemy:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{L + (L^2 + d^2)^{1/2}}{d} \right]. \quad (25.35)$$

Potencjał  $V$  jest sumą dodatnich wartości  $dV$ , a więc powinien być dodatni, ale czy wzór (25.35) daje dodatnie wartości  $V$ ? Argument logarytmu jest większy od jedności, więc logarytm jest liczbą dodatnią, zatem i potencjał  $V$  jest dodatni.

## Naładowana tarcza

W paragrafie 23.7 obliczyliśmy wartość natężenia pola elektrycznego w punktach leżących na osi symetrii, prostopadłej do plastikowej tarczy o promieniu  $R$ , naładowanej jednorodnie powierzchniowo, z gęstością  $\sigma$  na jednej (np. górnej) powierzchni. Wyprowadzimy teraz wyrażenie na potencjał elektryczny  $V(z)$  w dowolnym punkcie leżącym na osi symetrii.

Rozważmy nieskończenie mały element składający się z płaskiego pierścienia o promieniu  $R'$  i szerokości radialnej  $dR'$  (rys. 25.14). Ładunek pierścienia wynosi:

$$dq = \sigma(2\pi R')(dR'),$$

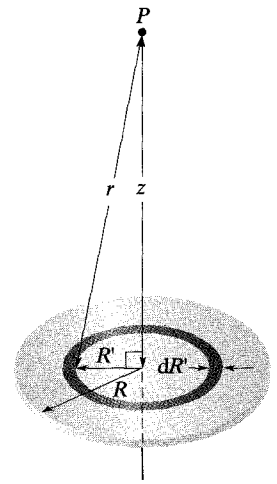
gdzie  $2\pi R'dR'$  jest polem górnej powierzchni pierścienia. Wszystkie części tego naładowanego elementu znajdują się w takiej samej odległości  $r$  od punktu  $P$  na osi tarczy. Korzystając z rysunku 25.14, możemy zastosować wzór (25.31) w celu napisania przyczynku do potencjału elektrycznego w punkcie  $P$ , pochodzącego od tego pierścienia:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}}. \quad (25.36)$$

Wypadkowy potencjał w punkcie  $P$  znajdujemy przez dodanie (scałkowanie) przyczynków od wszystkich pierścieni, od  $R' = 0$  do  $R' = R$ :

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R'dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z). \quad (25.37)$$

Zauważ, że zmienną w drugiej całce we wzorze (25.37) jest  $R'$ , a nie współrzędna  $z$ , która pozostaje stała przy całkowaniu po powierzchni tarczy. (Przy obliczaniu całki założyliśmy dodatkowo, że  $z \geq 0$ ).



Rys. 25.14. Plastikowa tarcza o promieniu  $R$  jest jednorodnie naładowana na górnej powierzchni z gęstością powierzchniową ładunku  $\sigma$ . Chcemy znaleźć potencjał  $V$  w punkcie  $P$  na osi tarczy

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porada 4: Kłopoty ze znakami potencjału elektrycznego

Gdy obliczamy potencjał  $V$  od naładowanej linii czy dowolnego innego ciągłego rozkładu ładunku w pewnym punkcie  $P$ , mogą zdarzyć się kłopoty ze znakiem. Oto przepis, pozwalający właściwie ustalić znak.

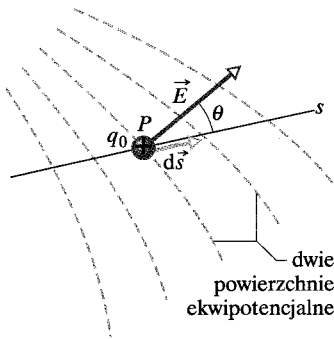
Jeśli ładunek jest ujemny, to czy symbole  $dq$  i  $\lambda$  powinny reprezentować wielkości ujemne, czy też powinniśmy wyraźnie wskazać znaki, pisząc  $-dq$  i  $-\lambda$ ? Można stosować obie metody, ale trzeba pamiętać znaczenie wybranej postaci zapisu, aby móc w wyniku końcowym poprawnie interpretować znak  $V$ .

Gdy cały rozkład ładunku ma jednakowy znak, można przyjąć, że symbole  $dq$  i  $\lambda$  reprezentują tylko wartości bezwzględne. Wynik obliczeń daje tylko wartość bezwzględną potencjału  $V$

w punkcie  $P$  i trzeba dodać znak przy  $V$ , zależnie od znaku ładunku. (Jeśli potencjał jest równy zero w nieskończoności, to dodatni ładunek daje potencjał dodatni, a ładunek ujemny daje potencjał ujemny).

Jeśli przypadkowo zamienimy granice całkowania przy obliczaniu potencjału, to otrzymamy przeciwną wartość  $V$ . Wartość będzie poprawna po odrzuceniu znaku minus, a właściwy znak  $V$  należy ustalić, znając znak ładunku. Na przykład, otrzymalibyśmy znak minus we wzorze (25.35), jeśli zamienilibyśmy granice całkowania. Powinniśmy wtedy pominąć znak i zauważyć, że potencjał jest dodatni, ponieważ wytwarzający go ładunek jest dodatni.

## 25.9. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału



**Rys. 25.15.** Ładunek próbny  $q_0$  przesuwa się o  $d\vec{s}$  z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na drugą. (Odległość między powierzchniami została powiększona dla lepszego efektu). Przesunięcie  $d\vec{s}$  tworzy kąt  $\theta$  z kierunkiem natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$

W paragrafie 25.4 opisywaliśmy, jak znaleźć potencjał w punkcie końcowym, jeśli znamy natężenie pola elektrycznego wzdłuż toru od punktu odniesienia do punktu końcowego. W tym paragrafie postąpimy odwrotnie, będziemy obliczać natężenie pola elektrycznego, gdy znamy potencjał elektryczny. Jak pokazano na rysunku 25.3, rozwiązanie graficzne tego problemu jest proste. Jeśli znamy potencjał  $V$  we wszystkich punktach w pobliżu układu ładunków, to możemy narysować zbiór powierzchni ekwipotencjalnych. Linie pola elektrycznego, narysowane prostopadle do tych powierzchni ujawniają zmienność natężenia  $\vec{E}$ . Chcemy teraz znaleźć matematyczny równoważnik tej procedury graficznej.

Na rysunku 25.15 przedstawiono przekrój zbioru leżących blisko siebie powierzchni ekwipotencjalnych o różnicy potencjałów  $dV$  między każdą parą sąsiednich powierzchni. Zgodnie z rysunkiem natężenie pola  $\vec{E}$  w dowolnym punkcie  $P$  jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej, przechodzącej przez punkt  $P$ .

Założmy, że dodatni ładunek próbny  $q_0$  przesuwa się o  $d\vec{s}$  z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na sąsiednią. Ze wzoru (25.7) wynika, że praca pola elektrycznego nad ładunkiem próbnym podczas tego przemieszczenia wynosi  $-q_0 dV$ . Ze wzoru (25.16) i rysunku 25.15 wynika, że praca ta może być także zapisana w postaci iloczynu skalarnego  $q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ , czyli  $q_0 E \cos \theta ds$ . Przyrównując te dwa wyrażenia dla pracy, otrzymujemy:

$$-q_0 dV = q_0 E \cos \theta ds, \quad (25.38)$$

czyli:

$$E \cos \theta = -\frac{dV}{ds}. \quad (25.39)$$

Ponieważ  $E \cos \theta$  jest składową natężenia  $\vec{E}$  w kierunku przemieszczenia  $d\vec{s}$ , to wzór (25.39) można zapisać w postaci:

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \quad (25.40)$$

Dodaliśmy tu wskaźnik przy  $E$  i przeszliśmy do symboli pochodnej cząstkowej, aby podkreślić, że wzór (25.40) zawiera tylko zmianę potencjału  $V$  wzdłuż szczególnej osi (tu osi  $s$ ) i tylko składową natężenia  $\vec{E}$  wzdłuż tej osi. Wzór (25.40) (który jest w istocie odwrotnością wzoru (25.18)) można wyrazić słowami w następujący sposób:

➤ Składowa natężenia  $\vec{E}$  w dowolnym kierunku jest wziętym ze znakiem minus stosunkiem zmiany potencjału elektrycznego przy przemieszczeniu w tym kierunku, do wartości tego przemieszczenia.

Jeśli wybierzemy jako oś  $s$  kolejno osie  $x$ ,  $y$  i  $z$ , to znajdziemy, że odpowiadające im składowe natężenia  $\vec{E}$  wynoszą:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (25.41)$$

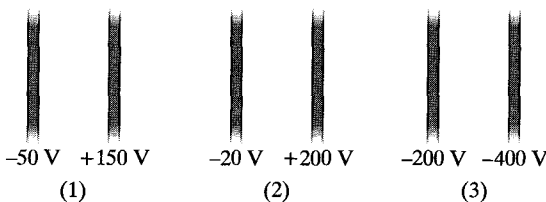
Jeśli więc znamy  $V$  dla wszystkich punktów w obszarze wokół rozkładu ładunku, czyli jeśli znamy funkcję  $V(x, y, z)$ , to możemy znaleźć składowe natężenia  $\vec{E}$  (i stąd samo  $\vec{E}$ ) w dowolnym punkcie, przez obliczenie pochodnych cząstkowych potencjału.

W prostym przypadku, gdy pole elektryczne jest jednorodne, wzór (25.40) przyjmuje postać:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}, \quad (25.42)$$

gdzie oś  $s$  jest prostopadła do powierzchni ekwipotencjalnych. Składowa natężenia pola elektrycznego jest równa zero w dowolnym kierunku równoległym do powierzchni ekwipotencjalnych.

**SPRAWDZIAN 6:** Na rysunku przedstawiono trzy pary równoległych płyt w jednakowej odległości i potencjał każdej płyty. Pole elektryczne między płytami jest jednorodne i jego natężenie jest do nich prostopadłe. a) Uszereguj pary według wartości natężenia pola między płytami, zaczynając od największej. b) Dla której pary natężenie pola elektrycznego jest skierowane w prawo? c) Jeśli w połowie odległości między trzecią parą płyt zostanie uwolniony elektron, to czy tam pozostanie, będzie poruszał się w prawo ze stałą prędkością, będzie poruszał się w lewo ze stałą prędkością, będzie przyspieszał w prawo, czy będzie przyspieszał w lewo?



## Przykład 25.5

Potencjał elektryczny w dowolnym punkcie na osi symetrii prostopadłej do jednorodnie naładowanej tarczy jest określony wzorem (25.37):

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

Wychodząc z tego wzoru, wyprowadź wzór na natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie na osi tarczy.

### ROZWIĄZANIE:

Chcemy obliczyć natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , w zależności od odległości  $z$  wzdłuż osi tarczy. Dla dowolnej wartości  $z$  natężenie

$\vec{E}$  musi być skierowane wzdłuż tej osi, ponieważ tarcza ma symetrię obrotową względem niej. Wobec tego potrzebujemy obliczyć składową  $E_z$  natężenia  $\vec{E}$  w kierunku osi  $z$ . Ta składowa jest wzięta ze znakiem minus pochodną cząstkową potencjału elektrycznego względem odległości  $z$ . Korzystając z ostatniego równania we wzorze (25.41), możemy napisać:

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} (\sqrt{z^2 + R^2} - z) \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to identyczne wyrażenie, jak wyprowadzone przez całkowanie w paragrafie 23.7, przy zastosowaniu prawa Coulomba.

## 25.10. Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych

W paragrafie 25.1 przedyskutowaliśmy elektryczną energię potencjalną naładowanej cząstki, gdy działa na nią siła elektrostatyczna. Założyliśmy wtedy, że ładunki wytwarzające pole znajdują się w ustalonych punktach, tak że ani siła,

ani odpowiadające jej natężenie pola elektrycznego nie mogą zostać zmienione przez obecność ładunku punkowego. W tym paragrafie znajdziemy elektryczną energię potencjalną *układu* ładunków, odpowiadającą polu elektrycznemu wytworzonemu przez te ładunki.

Dla prostego przykładu założmy, że zbliżamy do siebie dwa ciała, które mają ładunki o tym samym znaku. Praca, jaką musimy wykonać, jest zmagazynowana w postaci elektrycznej energii potencjalnej w układzie dwóch ciał (zakładając, że energia kinetyczna ciał nie ulega zmianie). Jeśli następnie uwolnimy ładunki, to możemy odzyskać tę zmagazynowaną energię, w całości lub w części, w postaci energii kinetycznej naładowanych ciał, gdyż będą się one od siebie oddalały.

Elektryczną energię potencjalną *układu ładunków punkowych*, utrzymywanych w ustalonych miejscach przez jakieś siły, definiujemy następująco:

► Elektryczna energia potencjalna układu unieruchomionych ładunków punkowych jest równa pracy, jaką musi wykonać siła zewnętrzna, aby utworzyć ten układ, przenosząc każdy ładunek z nieskończonej odległości.

Zakładamy, że ładunki są nieruchome zarówno w początkowej konfiguracji, gdy znajdują się w nieskończonej odległości, jak i w końcowej, gdy są skupione w układzie.

Na rysunku 25.16 przedstawiono dwa ładunki punkowe  $q_1$  i  $q_2$ , znajdujące się w odległości  $r$ . Aby znaleźć elektryczną energię potencjalną układu dwóch ładunków, musimy w myśli zbudować ten układ, rozpoczynając od obydwu ładunków, znajdujących się początkowo w nieskończoności. Gdy przeniesiemy ładunek  $q_1$  z nieskończoności do odpowiadającego mu miejsca, nie wykonamy żadnej pracy, bo na ładunek  $q_1$  nie działa żadna siła elektrostatyczna. Jeśli jednak przesuniemy następnie ładunek  $q_2$  z nieskończoności do odpowiadającego mu miejsca, to musimy wykonać pracę, ponieważ ładunek  $q_1$  oddziałuje siłą elektrostatyczną na ładunek  $q_2$  podczas przesuwania.

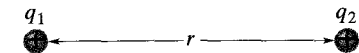
Pracę tę możemy obliczyć, korzystając ze wzoru (25.8), opuszczając znak minus (tak, że wzór określa pracę, jaką *my* wykonujemy, a nie pracę pola) i podstawiając  $q_2$  zamiast  $q$ . Wtedy nasza praca jest równa  $q_2 V$ , gdzie  $V$  jest potencjałem, wytworzonym przez ładunek  $q_1$  w punkcie, w którym umieszczamy ładunek  $q_2$ . Ze wzoru (25.26) ten potencjał jest równy:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}.$$

Stąd z naszej definicji elektryczna energia potencjalna pary ładunków punkowych z rysunku 25.16 wynosi:

$$E_p = W = q_2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (25.43)$$

Jeśli ładunki mają ten sam znak, to musimy wykonać dodatnią pracę przy ich zbliżaniu do siebie, ze względu na ich wzajemne odpychanie. Stąd zgodnie ze wzorem (25.43) energia potencjalna układu jest wtedy dodatnia. Jeśli ładunki mają przeciwne znaki, to musimy wykonać ujemną pracę przy ich zbliżaniu,



Rys. 25.16. Dwa ładunki, znajdujące się w odległości  $r$  od siebie

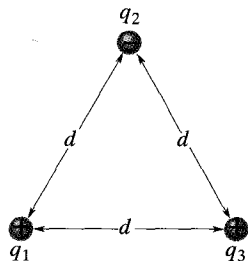
ze względu na ich przyciąganie się, jeśli w końcu mają być one nieruchome. Energia potencjalna układu jest wtedy ujemna. Z przykładu 25.6 wynika sposób rozszerzania tego rozumowania na więcej niż dwa ładunki.

## Przykład 25.6

Na rysunku 25.17 przedstawiono trzy ładunki punktowe, utrzymywane w swych położeniach przez nie pokazane siły. Jaka jest elektryczna energia potencjalna  $E_p$  tego układu ładunków? Przyjmijmy, że  $d = 12$  cm i że:

$$q_1 = +q, \quad q_2 = -4q \quad \text{i} \quad q_3 = 2q,$$

gdzie  $q = 150$  nC.



Rys. 25.17. Przykład 25.6. Trzy ładunki znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego

### ROZWIĄZANIE:

➡ Energia potencjalna  $E_p$  układu jest równa pracy, jaką musimy wykonać przy tworzeniu układu, przesuując każdy ładunek z nieskończoności. Spróbujmy więc w myśli zbudować układ z rysunku 25.17, zaczynając od jednego z ładunków punktowych, powiedzmy  $q_1$ , na właściwym miejscu i pozostałych w nieskończoności. Następnie przesuujemy inny ładunek, powiedzmy  $q_2$ , z nieskończoności na odpowiadające mu miejsce. Ze wzoru (25.43),

po podstawieniu  $d$  zamiast  $r$ , energia potencjalna  $E_{p12}$ , związana z parą ładunków punktowych  $q_1$  i  $q_2$  wynosi:

$$E_{p12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d}.$$

Następnie przenosimy ostatni ładunek punktowy  $q_3$  z nieskończoności na jego miejsce. Praca, jaką musimy wykonać w tym ostatnim kroku, jest równa sumie pracy przy zbliżaniu  $q_3$  do  $q_1$  i pracy przy zbliżaniu  $q_3$  do  $q_2$ . Ze wzoru (25.43), po podstawieniu  $d$  zamiast  $r$ , suma ta wynosi:

$$W_{13} + W_{23} = E_{p13} + E_{p23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d}.$$

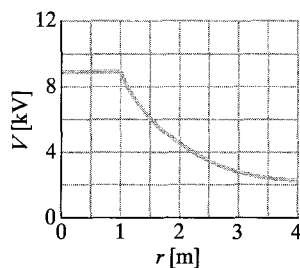
Całkowita energia potencjalna  $E_p$  układu trzech ładunków jest sumą energii potencjalnych, związanych z trzema parami ładunków. Ta suma (która jest niezależna od kolejności skupiania ładunków) wynosi:

$$\begin{aligned} E_p &= E_{p12} + E_{p13} + E_{p23} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d} \right) \\ &= -\frac{10q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = -\frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(10)(150 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{0,12 \text{ m}} \\ &= -1,7 \cdot 10^{-2} \text{ J} = -17 \text{ mJ}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

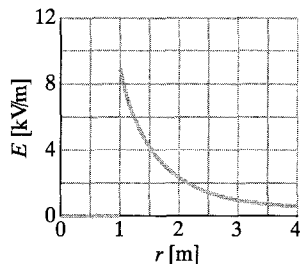
Ujemna energia potencjalna oznacza, że utworzenie układu wymaga wykonania ujemnej pracy, rozpoczynając od trzech ładunków w nieskończoności od siebie odległościach. Mówiąc inaczej, siła zewnętrzna musi wykonać 17 mJ pracy, aby rozdzielić całkowicie układ, kończąc na trzech ładunkach w nieskończoności od siebie odległościach.

## 25.11. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika

W paragrafie 24.6 doszliśmy do wniosku, że we wszystkich punktach wewnątrz izolowanego przewodnika natężenie  $\vec{E} = 0$ . Zastosowaliśmy następnie prawo Gaussa, aby udowodnić, że ładunek nadmiarowy na odizolowanym przewodniku leży całkowicie na jego powierzchni. (Jest to prawdą nawet wtedy, gdy przewodnik ma pustą wnękę). Teraz zastosujemy pierwszy z tych faktów, aby udowodnić ogólniejszą postać drugiego:



a)



b)

**Rys. 25.18.** a) Wykres potencjału  $V(r)$  wewnątrz i na zewnątrz naładowanej sferycznej powłoki o promieniu 1 m. b) Wykres natężenia  $E(r)$  dla tej samej powłoki

➤ Nadmiar ładunku umieszczony na izolowanym przewodniku rozkłada się na powierzchni tego przewodnika tak, że wszystkie punkty przewodnika — zarówno wewnątrz, jak i na powierzchni — uzyskują ten sam potencjał. Jest to prawda nawet wtedy, gdy przewodnik ma wnękę i nawet, jeśli ta wnęka zawiera niezerowy ładunek wypadkowy.

Nasz dowód wynika natychmiast ze wzoru (25.18), który ma postać:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Ponieważ  $\vec{E} = 0$  dla wszystkich punktów w przewodniku, to otrzymujemy bezpośrednio  $V_{\text{końc}} = V_{\text{pocz}}$  dla wszystkich możliwych par punktów początkowego i końcowego w przewodniku.

Na rysunku 25.18a przedstawiono wykres potencjału, w zależności od odległości od środka izolowanej, sferycznej, przewodzącej powłoki o promieniu 1 m i ładunku 1  $\mu\text{C}$ . Dla punktów poza powłoką możemy obliczyć  $V(r)$  ze wzoru (25.26), ponieważ ładunek  $q$  zachowuje się dla zewnętrznych punktów tak, jakby był skupiony w środku powłoki. Ten wzór jest słuszny aż do powierzchni powłoki. Teraz przesunmy mały ładunek próbny przez powłokę — zakładając, że istnieje mały otworek — do jej środka. Nie jest potrzebna do tego żadna praca, ponieważ wewnątrz powłoki na ładunek próbny nie działa żadna wypadkowa siła elektrostatyczna. Stąd potencjał we wszystkich punktach wewnątrz powłoki ma taką samą wartość, jak na powierzchni, co przedstawiono na rysunku 25.18a.

Na rysunku 25.18b przedstawiono wykres natężenia pola elektrycznego, w zależności od odległości dla tej samej powłoki. Zauważ, że  $E = 0$  w każdym punkcie wewnątrz powłoki. Krzywe z rysunku 25.18b można narysować na podstawie krzywej, przedstawionej na rysunku 25.18a, różniczkując ją względem  $r$  i stosując wzór (25.40) (dla przypomnienia, pochodna dowolnej stałej jest równa zero). Krzywą z rysunku 25.18a można narysować na podstawie krzywych, przedstawionych na rysunku 25.18b, wykonując całkowanie względem  $r$ , i stosując wzór (25.19).

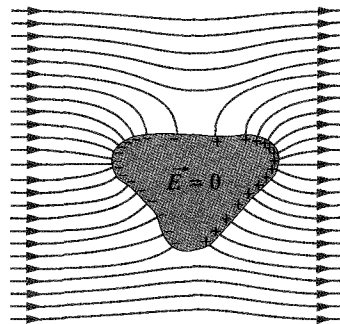
Na przewodnikach niesferycznych ładunek powierzchniowy nie rozkłada się jednorodnie na powierzchni przewodnika. Na ostrzach lub krawędziach gęstość powierzchniowa ładunku — i stąd natężenie pola elektrycznego w ich pobliżu, które jest do niej proporcjonalne — może osiągać bardzo duże wartości. Powietrze wokół takich ostrzy może zostać zjonizowane, tworząc wyładowanie koronowe, które golfiści i alpinieści widują na końcach gałęzi krzewów, końcach kijów golfowych i szczytach skał, gdy zbliża się burza z piorunami. Takie wyładowania koronowe, podobnie jak podnoszenie się włosów, są często zwiastunami uderzeń piorunów. W takich okolicznościach rozsądnie jest zamknąć się we wnęcie wewnątrz przewodzącej powłoki, gdzie zagwarantowane jest zerowe natężenie pola elektrycznego. Samochód (jeśli tylko nie ma plastikowej karoserii lub składanego dachu) jest do tego celu prawie idealny (rys. 25.19).

Jeśli izolowany przewodnik umieścimy w *zewnętrznym polu elektrycznym*, jak na rysunku 25.20, to wszystkie punkty przewodnika nadal mają jednakowy potencjał, bez względu na to, czy przewodnik ma nadmiarowy ładunek. Swo-

obodne elektrony przewodnictwa rozkładają się na powierzchni w ten sposób, że wytwarzane przez nie pole elektryczne w punktach wewnątrz przewodnika znosi zewnętrzne pole elektryczne, które w przeciwnym przypadku tam by się wytworzyło. Co więcej, rozkład elektronów powoduje, że wypadkowe natężenie pola elektrycznego we wszystkich punktach na powierzchni jest do niej prostopadłe. Jeśli przewodnik z rysunku 25.20 zostałby w jakiś sposób usunięty, lecz pozostałyby ładunki powierzchniowe, to rozkład natężenia pola elektrycznego pozostałby całkowicie bez zmian, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz.



Rys. 25.19. Duża iskra uderza w karoserię samochodu i przechodzi do ziemi przez izolującą lewą przednią oponę (można tam dostrzec błysk). Osoba w samochodzie pozostaje nietknięta



Rys. 25.20. Nienaładowany przewodnik umieszczono w zewnętrznym polu elektrycznym. Swobodne elektrony w przewodniku rozkładają się na powierzchni tak, aby zredukować do zera wypadkowe natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika i wytworzyć wypadkowe natężenie pola na powierzchni, prostopadłe do niej

## Podsumowanie

**Elektryczna energia potencjalna** Zmiana  $\Delta E_p$  elektrycznej energii potencjalnej  $E_p$  ładunku punkowego, przy jego przesunięciu z punktu początkowego do punktu końcowego w polu elektrycznym wynosi:

$$\Delta E_p = E_{p \text{ końc}} - E_{p \text{ pocz}} = -W, \quad (25.1)$$

gdzie  $W$  jest pracą, wykonaną przez siłę elektrostatyczną (związaną z polem elektrycznym) nad ładunkiem punktowym, przy przesunięciu z punktu początkowego do punktu końcowego. Jeśli energia potencjalna jest zdefiniowana tak, że jest równa zeru dla ładunku w nieskończoności, to **elektryczna energia potencjalna**  $E_p$  ładunku punkowego w danym punkcie wynosi:

$$E_p = -W_\infty, \quad (25.2)$$

gdzie  $W_\infty$  jest pracą, wykonaną przez siłę elektrostatyczną nad ładunkiem punktowym, przy przesunięciu go z nieskończoności do rozważanego punktu.

**Różnica potencjałów elektrycznych i potencjał elektryczny** Różnicę potencjałów  $\Delta V$  między punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym definiujemy wzorem:

$$\Delta V = V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -\frac{W}{q}, \quad (25.7)$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem cząstki, nad którą przez pole jest wykonywana praca. **Potencjał** w punkcie wynosi:

$$V = -\frac{W_\infty}{q}. \quad (25.8)$$

Jednostką potencjału w układzie SI jest *wolt*: 1 wolt = 1 dżul na kulomb ( $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ ).

Potencjał i różnicę potencjałów można także zapisać, korzystając z elektrycznej energii potencjalnej  $E_p$  cząstki o ładunku  $q$  w polu elektrycznym:

$$V = \frac{E_p}{q}, \quad (25.5)$$

$$\Delta V = V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = \frac{E_p \text{ końc}}{q} - \frac{E_p \text{ pocz}}{q} = \frac{\Delta E_p}{q}. \quad (25.6)$$

**Powierzchnie ekwipotencjalne** Wszystkie punkty na **powierzchni ekwipotencjalnej** mają taki sam potencjał elektryczny. Praca wykonana nad ładunkiem próbnym przy przesuwaniu go z jednej takiej powierzchni na drugą jest niezależna od położenia punktów początkowego i końcowego na tych powierzchniach i drogi, po jakiej przesunięto ładunek. Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  jest zawsze skierowane prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych.

**Obliczanie  $V$  na podstawie  $\vec{E}$ .** Różnica potencjałów elektrycznych między dwoma punktami początkowym i końcowym wynosi:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (25.18)$$

gdzie całkę obliczamy po dowolnym torze łączącym te punkty. Jeśli wybierzemy  $V_{\text{pocz}} = 0$ , to dla potencjału w danym punkcie mamy:

$$V = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.19)$$

**Potencjał pola ładunków punktowych** Potencjał elektryczny pola pojedynczego ładunku punktowego, w odległości  $r$  od tego ładunku wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (25.26)$$

Potencjał  $V$  ma taki sam znak, jak ładunek  $q$ . Potencjał pola, wytworzonego przez układ ładunków punktowych wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (25.27)$$

**Potencjał pola dipola elektrycznego** W odległości  $r$  od dipola elektrycznego o wartości elektrycznego momentu dipolowego  $p = qd$ , potencjał elektryczny dipola wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (25.30)$$

dla  $r \gg d$ , kąt  $\theta$  jest zdefiniowany na rysunku 25.11.

**Potencjał pola wytworzonego przez ładunek o ciągłym rozkładzie** Dla ciągłego rozkładu ładunku wzór (25.27) przyjmuje postać:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad (25.32)$$

gdzie całkę obliczamy po całym rozkładzie.

**Obliczanie  $\vec{E}$  na podstawie  $V$**  Składowa natężenia  $\vec{E}$  w dowolnym kierunku, jest wzięta z ujemnym znakiem pochodną potencjału względem przemieszczenia w tym kierunku:

$$E_s = - \frac{\partial V}{\partial s}. \quad (25.40)$$

Składowe  $E_x$ ,  $E_y$  i  $E_z$  natężenia  $\vec{E}$  można wyznaczyć ze wzorów:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (25.41)$$

Dla pola jednorodnego o natężeniu  $\vec{E}$  wzór (25.40) upraszcza się do postaci:

$$E = - \frac{\Delta V}{\Delta s}, \quad (25.42)$$

gdzie przesunięcie  $s$  jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych. Natężenie pola elektrycznego w kierunku równoległym do powierzchni ekwipotencjalnej jest równe zero.

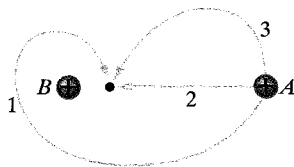
**Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych** Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych jest równa pracy, potrzebnej do utworzenia układu ładunków, będących początkowo w spoczynku i w nieskończonej odległości od siebie. Dla dwóch ładunków w odległości  $r$  mamy:

$$E_p = W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (25.43)$$

**Potencjał naładowanego przewodnika** Nadmiarowy ładunek, znajdujący się na przewodniku, będzie w stanie równowagi rozłożony w całości na zewnętrznej powierzchni przewodnika. Ładunek rozłoży się w taki sposób, że cały przewodnik, włącznie z punktami, które znajdują się wewnątrz niego, ma taki sam potencjał.

## Pytania

1. Na rysunku 25.21 przedstawiono trzy tory, wzdłuż których możemy zbliżyć dodatnio naładowaną kulę  $A$  do dodatnio naładowanej kuli  $B$ , która jest nieruchoma. a) Czy kula  $A$  jest przesuwana w stronę większego, czy mniejszego potencjału elektrycznego? Czy praca wykonana: b) przez nas, c) przez pole elektryczne (wytwarzane przez

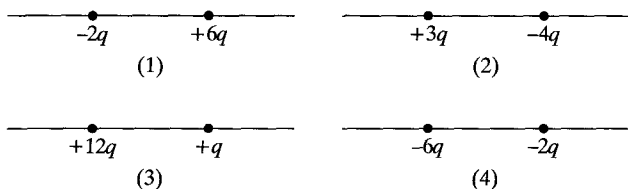


Rys. 25.21. Pytanie 1

drugą kulę) jest dodatnia, ujemna, czy równa zero? d) Uszereguj tory według pracy, wykonanej przez nas, zaczynając od największej.

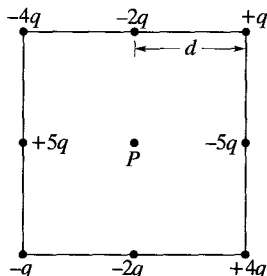
2. Na rysunku 25.22 przedstawiono cztery pary naładowanych cząstek. Załóż, że potencjał  $V = 0$  w nieskończoności. Dla których par istnieje inny punkt o zerowym wypadkowym potencjale elektrycznym *na narysowanej osi*: a) między cząstkami, b) na prawo od nich? c) Jeśli taki punkt zerowego potencjału istnieje, to czy natężenie wypadkowego pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytwarzanego przez cząstki w tym punkcie jest równe zero? d) Czy dla

poszczególnych par istnieją punkty poza osią (oczywiście inne niż w nieskończoności), gdzie  $V = 0$ ?



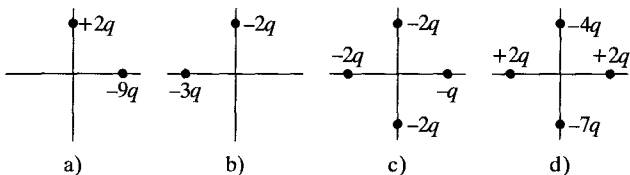
Rys. 25.22. Pytania 2 i 8

3. Na rysunku 25.23 przedstawiono kwadrat, na którego bokach znajdują się naładowane cząstki, przy czym odległość między sąsiednimi cząstkami wynosi  $d$ . Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie  $P$  w środku kwadratu, jeśli potencjał elektryczny w nieskończoności wynosi zero?



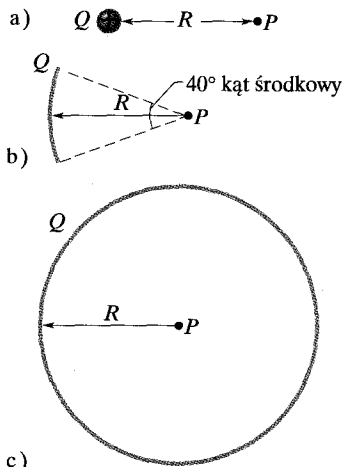
Rys. 25.23. Pytanie 3

4. Na rysunku 25.24 przedstawiono cztery układy naładowanych cząstek, znajdujących się w takiej samej odległości od początku układu współrzędnych. Uszereguj układy według wartości wypadkowego potencjału elektrycznego w początku układu współrzędnych, zaczynając od największego dodatniego. Przyjmij, że w nieskończoności potencjał jest równy zeru.



Rys. 25.24. Pytanie 4

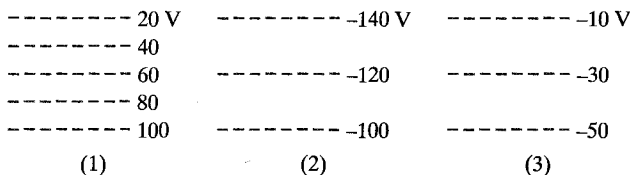
5. a) Jaki jest potencjał w punkcie  $P$ , pochodzący od ładunku  $Q$  znajdującego się w odległości  $R$  od punktu  $P$  (rys. 25.25a)? Przyjmij  $V = 0$  w nieskończoności. b) Na rysunku 25.25b ten sam ładunek  $Q$  jest rozłożony jednorodnie na łuku okręgu o promieniu  $R$  i kącie środkowym  $40^\circ$ . Jaki jest potencjał w środku  $P$  krzywizny łuku? c) Na rysunku 25.25c ten sam ładunek  $Q$  został rozłożony jednorodnie na okręgu o promie-



Rys. 25.25. Pytanie 5

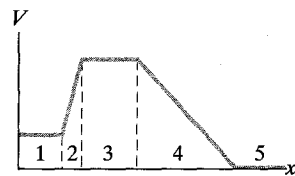
niu  $R$ . Jaki jest potencjał w środku  $P$  okręgu? d) Uszereguj te trzy rozkłady według wartości natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$ , zaczynając od największego.

6. Na rysunku 25.26 przedstawiono trzy układy przekrojów powierzchni ekwipotencjalnych w obszarze przestrzeni o tych samych rozmiarach. a) Uszereguj te układy względem wartości natężenia pola elektrycznego w tym obszarze, zaczynając od największej. b) W którym układzie natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dół strony?



Rys. 25.26. Pytanie 6

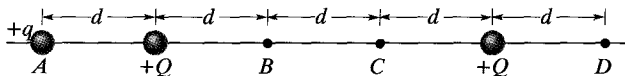
7. Na rysunku 25.27 przedstawiono wykres potencjału elektrycznego  $V$  w zależności od  $x$ . a) Uszereguj pięć obszarów według wartości składowej natężenia pola elektrycznego wzdłuż osi  $x$ , zaczynając od największej. Jaki jest kierunek natężenia pola wzdłuż osi  $x$  w: b) obszarze 2, c) obszarze 4?



Rys. 25.27. Pytanie 7

8. Na rysunku 25.22 przedstawiono cztery pary naładowanych cząstek znajdujących się w jednakowej odległości od siebie. a) Uporządkuj pary według ich elektrycznej energii potencjalnej, zaczynając od największej (dodatniej). b) Czy jeśli zwiększy się odległość między cząstkami w każdej z par, to energia potencjalna pary wzrośnie, czy zmaleje?

9. Na rysunku 25.28 przedstawiono układ trzech naładowanych cząstek. Jeśli przesuniemy cząstkę o ładunku  $+q$  z punktu  $A$  do punktu  $D$ , to czy następujące wielkości są dodatnie, ujemne czy zerowe: a) zmiana elektrycznej energii potencjalnej układu trzech cząstek, b) praca wykonana przez wypadkową siłę elektrostatyczną nad przesuwaną cząstką, c) praca wykonana przez nas? d) Jakie są odpowiedzi dla wielkości od (a) do (c) dla cząstki o ładunku  $+q$  przesuwanej z punktu  $B$  do punktu  $C$ ?



Rys. 25.28. Pytania 9 i 10

10. Czy praca wykonana przez nas w sytuacji z pytania 9 jest dodatnia, ujemna, czy równa zero, jeśli cząstka o ładunku  $+q$  porusza się: a) od  $A$  do  $B$ , b) od  $A$  do  $C$ , c) od  $B$  do  $D$ ? d) Uszereguj przemieszczenia (a), (b), (c) według wartości pracy wykonanej przez nas, zaczynając od największej.

www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-  
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>  
ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,  
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-  
Ware (na tej samej stronie)

## 25.2. Potencjał elektryczny

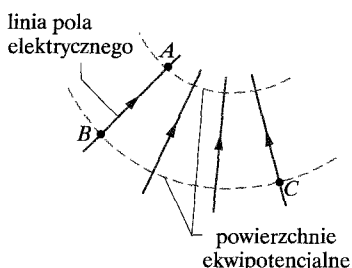
1. Rozważmy akumulator samochodowy o różnicy potencjałów 12 V, który może przesłać całkowity ładunek 84 Ah (amperogodzin) przez obwód z jednego bieguna do drugiego. a) Ilu kulombom jest równy ten ładunek? (Wskazówka: Zastosuj wzór (22.3)). b) Jeśli różnica potencjałów jest cały czas równa 12 V, to jak duża energia jest związana z przejściem tego ładunku?

2. Różnica potencjałów elektrycznych między ziemią i chmurą podczas pewnej burzy wynosiła  $1,2 \cdot 10^9$  V. Jaka jest wartość zmiany elektrycznej energii potencjalnej (w elektronowoltach) elektronu poruszającego się między ziemią i chmurą?

3. Dla pewnej błyskawicy różnica potencjałów między ziemią i chmurą wynosiła  $1 \cdot 10^9$  V, a wartość przepływającego ładunku była równa 30 C. a) O ile zmalała energia tego ładunku? b) Jeśli można byłoby wykorzystać całą tę energię do przyspieszenia spoczywającego początkowo samochodu o masie 1000 kg, to jaka byłaby końcowa prędkość samochodu? c) Jeśli cała ta energia mogłaby zostać wykorzystana do stopienia lodu, to ile lodu mogłoby zostać stopione przy  $0^\circ\text{C}$ ? Ciepło topnienia lodu wynosi  $3,33 \cdot 10^5$  J/kg.

## 25.4. Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola

4. Gdy elektron porusza się od punktu A do punktu B, wzdłuż linii pola elektrycznego na rysunku 25.29, pole elektryczne wykonuje nad nim pracę  $3,94 \cdot 10^{-19}$  J. Jakie są różnice potencjałów elektrycznych: a)  $V_B - V_A$ , b)  $V_C - V_A$ , c)  $V_C - V_B$ ?



Rys. 25.29. Zadanie 4

5. Nieprzewodząca nieskończona płyta jest naładowana z jednej strony z gęstością powierzchniową  $\sigma = 0,1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . W jakiej odległości znajdują się powierzchnie ekwipotencjalne, których potencjały różnią się o 50 V?

6. Dwie duże, równoległe, przewodzące płyty są odległe od siebie o 12 cm i mają na powierzchniach wewnętrznych jednakowe ładunki o przeciwnych znakach. Na elektron umieszczony gdziekolwiek między tymi płytami działa siła elektrostatyczna

$3,9 \cdot 10^{-15}$  N. a) Znajdź natężenie pola elektrycznego w miejscu, w którym znajduje się elektron. b) Jaka jest różnica potencjałów między płytami? (Zaniedbaj efekty brzegowe).

7. W liczniku Geigera-Müllera na osi metalowej rury o średnicy 2 cm napięty jest drut o średnicy  $1,3 \cdot 10^{-4}$  cm. Jeśli różnica potencjałów między drutem i rurą wynosi 850 V, to jakie jest natężenie pola elektrycznego na powierzchni: a) drutu, b) rury? (Wskazówka: Skorzystaj z wyniku zadania 23 z rozdziału 24).

8. Natężenie pola elektrycznego wewnątrz nieprzewodzącej, jednorodnie naładowanej objętościowo kuli o promieniu  $R$  jest skierowane radialnie i ma wartość:

$$E(r) = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

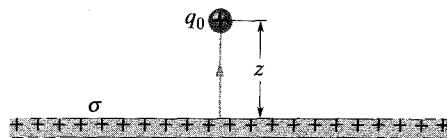
gdzie  $q$  jest całkowitym (dodatnim lub ujemnym) ładunkiem kuli, a  $r$  jest odległością od środka kuli. a) Przyjmując  $V = 0$  w środku kuli, znajdź potencjał elektryczny  $V(r)$  wewnątrz kuli. b) Jaka jest różnica potencjałów elektrycznych między punktem na powierzchni kuli i środkiem kuli? c) Jeśli ładunek  $q$  jest dodatni, to któremu z tych punktów odpowiada większy potencjał?

9\*. Ładunek  $q$  jest rozłożony jednorodnie objętościowo w kuli o promieniu  $R$ . a) Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, pokaż, że potencjał w odległości  $r$  od środka kuli ( $r < R$ ) jest dany wzorem:

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

(Wskazówka: Zob. paragraf 24.9). b) Dlaczego wynik ten różni się od wyniku z punktu (a) w zadaniu 8? c) Jaka jest różnica potencjałów między punktem na powierzchni kuli i środkiem kuli? d) Dlaczego ten wynik nie różni się od wyniku z punktu (b) z zadania 8?

10. Na rysunku 25.30 przedstawiono z boku nieskończoną, nieprzewodzącą płytę, naładowaną dodatnio z jednej strony z gęstością powierzchniową  $\sigma$ . a) Korzystając ze wzorów (25.18) i (24.13), pokaż, że potencjał elektryczny pola tej nieskończonej płyty można zapisać wzorem  $V = V_0 - (\sigma/(2\epsilon_0))z$ , gdzie  $V_0$  jest potencjałem elektrycznym powierzchni płyty, a  $z$  jest odległością od płyty. b) Jaką pracę wykona pole elektryczne płyty przy przesuwaniu małego, dodatniego ładunku próbnego  $q_0$ , z początkowego położenia na płycie, do końcowego położenia w odległości  $z$  od płyty?



Rys. 25.30. Zadanie 10

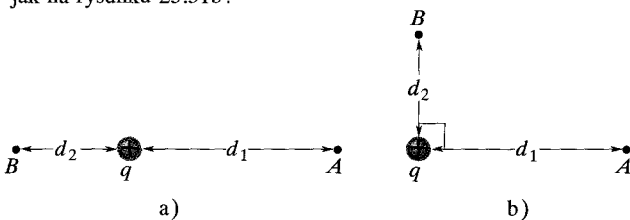
11\*. Gruba powłoka sferyczna o promieniach  $r_1$  i  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) i ładunku  $Q$  jest naładowana jednorodnie objętościowo. Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny  $V$  w za-

leżności od odległości  $r$  od środka powłoki, rozważając obszary: a)  $r > r_2$ , b)  $r_2 > r > r_1$ , c)  $r < r_1$ ? d) Czy te rozwiązania są ze sobą zgodne przy  $r = r_2$  i  $r = r_1$ ? (Wskazówka: Zob. paragraf 24.9).

## 25.6. Potencjał pola układu ładunków punktowych

12. Podczas ruchu statku kosmicznego przez rozrzedzony zjonizowany gaz jonosfery ziemskiej potencjał statku zmienia się o  $-1$  V w czasie jednego okrążenia Ziemi. Zakładając, że statek jest sferą o promieniu 10 m, oszacuj ładunek zbierany przez statek.

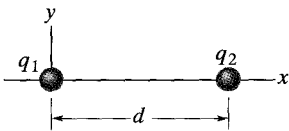
13. Rozważmy ładunek punktowy  $q = 1 \mu\text{C}$ , punkt A w odległości  $d_1 = 2$  m od  $q$  i punkt B w odległości  $d_2 = 1$  m. a) Jeśli te punkty są po przeciwnych stronach ładunku (rys. 25.31a), to jaka jest różnica potencjałów elektrycznych  $V_A - V_B$ ? b) Jaka jest różnica potencjałów elektrycznych, jeśli punkty A i B są położone jak na rysunku 25.31b?



Rys. 25.31. Zadanie 13

14. Na rysunku 25.32 przedstawiono dwie naładowane cząstki umieszczone na osi  $x$ . Naskicuj linie pola elektrycznego i powierzchnie ekwipotencjalne w płaszczyźnie strony dla: a)  $q_1 = +q$  i  $q_2 = +2q$ , b)  $q_1 = +q$  i  $q_2 = -3q$ .

15. Cząstki na rys. 25.32 mają ładunki  $q_1 = +q$  i  $q_2 = -3q$ . Przyjmijmy, że  $V = 0$  w nieskończoności. Wyznacz położenie (wyrażając je przez odległość  $d$  między ładunkami) punktu na osi  $x$  (w skończonej odległości od cząstek), w którym potencjał elektryczny pola tych dwóch cząstek jest równy zeru.



Rys. 25.32. Zadania 14, 15 i 16

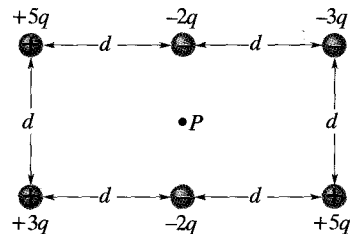
16. Dwie cząstki o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  znajdują się w odległości  $d$  (rys. 25.32). Wypadkowe natężenie pola elektrycznego cząstek jest równe zeru przy  $x = d/4$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź położenie (wyrażając je przez  $d$ ) punktu na osi  $x$  (w skończonej odległości od cząstek), w którym potencjał elektryczny pola tych dwóch cząstek jest równy zeru.

17. Kulista kropla wody, obdarzona ładunkiem 30 pC, ma potencjał 500 V na swej powierzchni (przy  $V = 0$  w nieskończoności). a) Jaki jest promień kropli? b) Jeśli dwie takie krople, o takim samym ładunku i promieniu połączą się, tworząc jedną kulistą kroplę, to jaki będzie potencjał na powierzchni nowej kropli?

18. Jakie są: a) ładunek, b) gęstość ładunku na powierzchni przewodzącej kuli o promieniu 0,15 m, jeśli jej potencjał wynosi 200 V (przy  $V = 0$  w nieskończoności)?

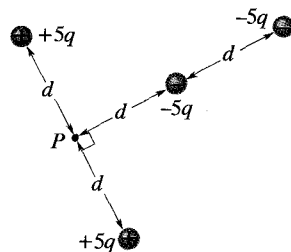
19. W pobliżu powierzchni Ziemi natężenie pola elektrycznego ma często wartość około 100 V/m. Jeśli takie byłoby natężenie na całej powierzchni, to jaki byłby potencjał elektryczny punktu na powierzchni (przy  $V = 0$  w nieskończoności)?

20. Na rysunku 25.33 punkt P leży w środku prostokąta. Jaki jest wypadkowy potencjał elektryczny pola sześciu naładowanych cząstek, w punkcie P (przy  $V = 0$  w nieskończoności)?



Rys. 25.33. Zadanie 20

21. Jaki jest wypadkowy potencjał w punkcie P pola układu czterech ładunków z rysunku 25.34, jeśli  $V = 0$  w nieskończoności?



Rys. 25.34. Zadanie 21

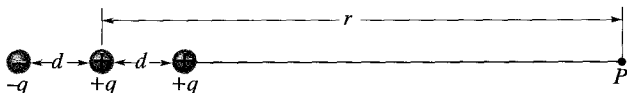
## 25.7. Potencjał pola dipola elektrycznego

22. Cząsteczka amoniaku  $\text{NH}_3$  ma trwały elektryczny moment dipolowy równy 1,47 D, gdzie 1 D = 1 debaj =  $3,34 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ . Oblicz potencjał elektryczny cząsteczki amoniaku na osi dipola, w punkcie oddalonym o 52 nm (przy  $V = 0$  w nieskończoności).

23. Na rys. 25.35 przedstawiono trzy naładowane cząstki na osi poziomej. Dla punktów (jak np. punktu P) na osi, dla których  $r \gg d$  wykaż, że potencjał elektryczny  $V(r)$  jest dany wzorem:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left( 1 + \frac{2d}{r} \right).$$

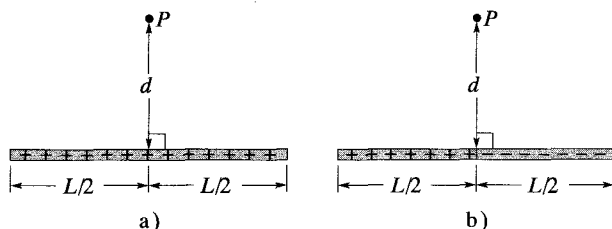
(Wskazówka: Układ ładunków potraktuj jako sumę odizolowanego ładunku i dipola.)



Rys. 25.35. Zadanie 23

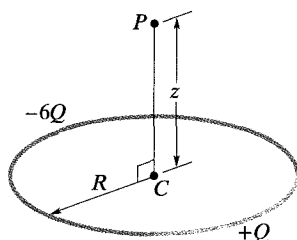
## 25.8. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

24. a) Na rysunku 25.36a przedstawiono dodatnio naładowany pręt plastikowy o długości  $L$ , naładowany jednorodnie z gęstością liniową  $\lambda$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności i korzystając z rysunku 25.13 i wzoru (25.35), znajdź potencjał elektryczny w punkcie  $P$ , bez obliczeń na papierze. b) Na rysunku 25.36b przedstawiono identyczny pręt, ale z prawą połową naładowaną ujemnie i lewą — dodatnio; obie połowy mają taką samą wartość jednorodnej liniowej gęstości ładunku  $\lambda$ . Ile wynosi potencjał elektryczny w punkcie  $P$ , jeśli  $V = 0$  w nieskończoności?



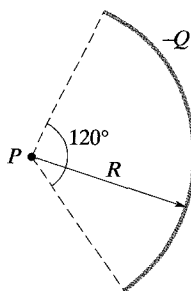
Rys. 25.36. Zadanie 24

25. Pręt plastikowy został wygięty w kształcie okręgu o promieniu  $R$ . Jest on jednorodnie naładowany ładunkiem dodatnim  $+Q$  na jednej czwartej obwodu i ładunkiem ujemnym  $-6Q$  na reszcie obwodu (rys. 25.37). Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny: a) w środku  $C$  okręgu, b) w punkcie  $P$  na osi symetrii okręgu, w odległości  $z$  od środka.



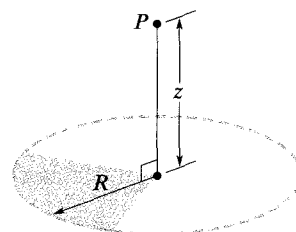
Rys. 25.37. Zadanie 25

26. Na rysunku 25.38 plastikowy pręt jednorodnie naładowany ładunkiem  $-Q$  został wygięty w łuk okręgu o promieniu  $R$  i kącie środkowym  $120^\circ$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny w środku krzywiny  $P$  łuku.



Rys. 25.38. Zadanie 26

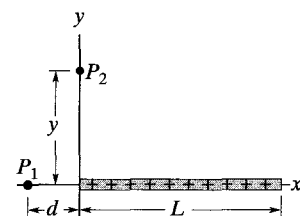
27. Po jednorodnym naładowaniu plastikowej tarczy z jednej strony z gęstością powierzchniową  $\sigma$  usunięto trzy czwarte tarczy. Pozostała ćwiartka jest przedstawiona na rysunku 25.39. Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz potencjał pola wytworzonego przez tę ćwiartkę w punkcie  $P$  na osi symetrii tarczy, w odległości  $z$  od jej środka.



Rys. 25.39. Zadanie 27

28. Na rysunku 25.40 przedstawiono plastikowy pręt o długości  $L$ , umieszczony na osi  $x$ , naładowany jednorodnie dodatnim ładunkiem  $Q$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny na osi  $x$  w punkcie  $P_1$ , odległym o  $d$  od jednego z końców pręta.

29. Plastikowy pręt, przedstawiony na rysunku 25.40 ma długość  $L$  i jest naładowany niejednorodnie z gęstością liniową  $\lambda = cx$ , gdzie  $c$  jest dodatnią stałą. Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny na osi  $x$  w punkcie  $P_1$ , odległym o  $d$  od jednego z końców pręta.



Rys. 25.40. Zadania 28, 29, 34 i 35

## 25.9. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału

30. Dwie duże, równoległe, metalowe płyty znajdują się w odległości 1,5 cm od siebie i mają równe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwne ładunki na wewnętrznych powierzchniach. Przyjmijmy potencjał ujemnej płyty za równy zero. Jeśli potencjał w połowie odległości między płytami wynosi  $+5$  V, to ile wynosi natężenie pola elektrycznego w obszarze między płytami?

31. Potencjał elektryczny w punktach płaszczyzny  $xy$  wynosi  $V = (2 \text{ V/m}^2)x^2 - (3 \text{ V/m}^2)y^2$ . Jaka jest wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie (3 m, 2 m)?

32. Potencjał elektryczny  $V$  w przestrzeni między dwiema płaskimi, równoległymi płytami wynosi  $V = 1500x^2$ , gdzie  $V$  jest wyrażone w woltach, jeśli odległość  $x$  od jednej z płyt jest wyrażona w metrach. Oblicz wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie, dla którego  $x = 1,3$  cm.

33. a) Korzystając ze wzoru (25.32) pokaż, że potencjał elektryczny na osi symetrii cienkiego pierścienia o promieniu  $R$  i ładunku  $q$ , w punkcie odległym o  $z$  od środka pierścienia wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

b) Korzystając z otrzymanego wyniku, wyprowadź wyrażenie na  $E$  w punktach na osi pierścienia i porównaj wynik z natężeniem  $E$ , obliczonym w paragrafie 23.6.

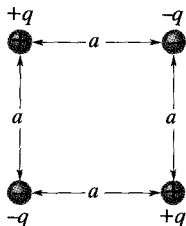
34. Pręt plastikowy o długości  $L$ , pokazany na rysunku 25.40, jest naładowany niejednorodnie, z gęstością liniową  $\lambda = cx$ , gdzie  $c$  jest stałą dodatnią. a) Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny w punkcie  $P_2$  na osi  $y$ , w odległości  $y$  od jednego z końców pręta. b) Korzystając z otrzymanego wyniku, znajdź składową  $E_y$  natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_2$ . c) Dlaczego nie można znaleźć składowej  $E_x$  natężenia w punkcie  $P_2$ , korzystając z wyniku otrzymanego w punkcie (a)?

35. a) Korzystając z wyniku, otrzymanego w zadaniu 28, znajdź składową  $E_x$  natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_1$  na rys. 25.40. (Wskazówka: Najpierw za odległość  $d$  w wyniku podstaw zmienną  $x$ ). b) Korzystając z symetrii określ składową  $E_y$  natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_1$ .

## 25.10. Elektryczna energia potencjalna pola układu ładunków punktowych

36. a) Jaka jest elektryczna energia potencjalna dwóch elektronów, znajdujących się w odległości 2 nm? b) Czy energia potencjalna wzrasta, czy maleje, jeśli odległość wzrasta?

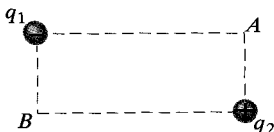
37. Wyprowadź wyrażenie na pracę, potrzebną do utworzenia konfiguracji czterech ładunków z rysunku 25.41 przy założeniu, że początkowo ładunki są od siebie nieskończenie oddległe.



Rys. 25.41. Zadanie 37

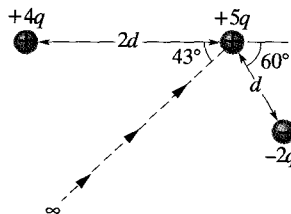
38. Jaka jest elektryczna energia potencjalna układu ładunków z rysunku 25.9a? Skorzystaj z wartości liczbowych z przykładu 25.3.

39. W dwóch wierzchołkach prostokąta na rysunku 25.42, o długościach boków 5 cm i 15 cm znajdują się ładunki  $q_1 = -5 \mu\text{C}$  i  $q_2 = +2 \mu\text{C}$ . Przyjmując  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny: a) w wierzchołku A, b) w wierzchołku B. c) Jaka praca jest potrzebna do przesunięcia trzeciego ładunku  $q_3 = +3 \mu\text{C}$  z punktu B do punktu A, wzdłuż przekątnej prostokąta? d) Czy ta praca zwiększa, czy zmniejsza elektryczną energię potencjalną układu trzech ładunków? Czy praca przy przesunięciu ładunku  $q_3$  wzdłuż toru: e) wewnątrz prostokąta, ale nie wzdłuż przekątnej, f) poza prostokątem jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak wzdłuż przekątnej?



Rys. 25.42. Zadanie 39

40. Oblicz pracę, potrzebną do przesunięcia ładunku  $+5q$  z nieskończoności, wzdłuż przedstawionej na rysunku 25.43 linii przerywanej, w pobliżu dwóch nieruchomych ładunków  $+4q$  i  $-2q$ . Podstaw wartości: odległości  $d = 1,4 \text{ cm}$  i ładunku  $q = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .



Rys. 25.43. Zadanie 40

41. Częstka o ładunku dodatnim  $Q$  znajduje się w punkcie  $P$ . Druga cząstka o masie  $m$  i ujemnym ładunku  $-q$  porusza się ze stałą prędkością po okręgu o promieniu  $r_1$ , o środku w punkcie  $P$ . Wyprowadź wyrażenie na pracę  $W$ , jaką musi wykonać siła zewnętrzna nad drugą cząstką, aby zwiększyć promień okręgu do  $r_2$ .

42. Oblicz: a) potencjał elektryczny pola wytworzonego przez jądro atomu wodoru w średniej odległości ( $r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ ) elektronu od jądra w atomie (przyjmij  $V = 0$  w nieskończonej odległości), b) elektryczną energię potencjalną atomu, z elektronem w tej odległości, c) energię kinetyczną elektronu, jeśli porusza się on po orbicie kołowej o tym promieniu wokół jądra atomu. d) Jaka energia jest potrzebna do zjonizowania atomu wodoru (czyli usunięcia elektronu przez oddalenie go na nieskończoną odległość)? Wyraż wszystkie energie w elektronowoltach.

43. Częstka o ładunku  $q$  znajduje się w punkcie  $P$ . Druga cząstka o masie  $m$  i tym samym ładunku  $q$  znajduje się początkowo w odległości  $r_1$  od punktu  $P$ , a następnie zostaje uwolniona. Określ jej prędkość, gdy znajdzie się ona w odległości  $r_2$  od punktu  $P$ . Przyjmij wartości:  $q = 3,1 \mu\text{C}$ ,  $m = 20 \text{ mg}$ ,  $r_1 = 0,9 \text{ mm}$  i  $r_2 = 2,5 \text{ mm}$ .

44. W płaszczyźnie  $yz$  leży cienki plastikowy pierścień o promieniu 1,5 m, o środku w początku układu, naładowany ładunkiem  $-9 \text{ nC}$ . Na osi  $x$ , w odległości 3 m od początku układu umieszczono ładunek  $-6 \text{ pC}$ . Oblicz pracę, jaka musi być wykonana nad ładunkiem punktowym przez zewnętrzną siłę przy przesuwaniu ładunku punkowego do początku układu.

45. Dwie cienkie sfery metalowe A i B o masach  $m_A = 5 \text{ g}$  i  $m_B = 10 \text{ g}$  mają takie same dodatnie ładunki  $q = 5 \mu\text{C}$ . Sfery są połączone nieprzewodzącym sznurkiem o znikomym masie, o długości  $d = 1 \text{ m}$ , znacznie większej od promieni sfer. a) Oblicz elektryczną energię potencjalną układu. b) Jakie jest przyspieszenie każdej ze sfer w momencie tuż po przecięciu sznurka? c) Jaka jest prędkość każdej ze sfer po długim czasie od przecięcia sznurka?

46. Cienka przewodząca powłoka sferyczna o promieniu  $R$  znajduje się na izolującej podkładce i jest naładowana do potencjału  $-V$ . Z punktu  $P$ , w odległości  $r$  od środka sfery ( $r \gg R$ )

wystrzelono elektron z początkową prędkością  $v_0$ , w kierunku środka powłoki. Jaka musi być wartość  $v_0$ , aby elektron dotarł do powłoki?

47. Dwa elektrony znajdują się w odległości 2 cm od siebie. Trzeci elektron, wystrzelony z nieskończoności, zatrzymał się w połowie odległości między nimi. Jaka była początkowa prędkość tego elektronu?

48. Dwie naładowane, równoległe, płaskie, przewodzące powierzchnie znajdują się w odległości  $d = 1$  cm od siebie i wytwarzają różnicę potencjałów  $\Delta V = 625$  V między sobą. Z jednej powierzchni wystrzelono elektron, prostopadle w kierunku drugiej. Jaka jest początkowa prędkość elektronu, jeśli zatrzymuje się on tuż przy drugiej powierzchni?

49. Z początkową prędkością  $3,2 \cdot 10^5$  m/s wystrzelono elektron w kierunku nieruchomego protonu. Jeśli początkowo elektron znajdował się w dużej odległości od protonu, to w jakiej odległości od protonu chwilowa prędkość elektronu będzie dwukrotnie większa od początkowej wartości?

## 25.11. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika

50. Pusta sferyczna wnęka metalowa ma potencjał  $+400$  V względem ziemi (o potencjale  $V = 0$ ) i ładunek  $5 \cdot 10^{-9}$  C. Znajdź potencjał elektryczny w środku sfery.

51. Jaki jest nadmiarowy ładunek na przewodzącej kuli o promieniu  $r = 0,15$  m, jeśli potencjał kuli wynosi  $1500$  V dla  $V = 0$  w nieskończoności?

52. Rozważ dwie przewodzące kule 1 i 2, znajdujące się w dużej odległości od siebie. Średnica drugiej kuli jest dwa razy większa niż pierwszej. Mniejsza kula miała początkowo ładunek dodatni  $q$ , a większa była nienaładowana. Następnie połączono kule długim cienkim przewodnikiem. a) Jaki jest związek między końcowymi potencjałami  $V_1$  i  $V_2$  kul? b) Jakie są końcowe ładunki  $q_1$  i  $q_2$  na kulach, wyrażone przez  $q$ ? c) Jaki jest stosunek końcowej gęstości powierzchniowej ładunku na kuli 1, do gęstości na kuli 2?

53. Dwie metalowe kule, każda o promieniu 3 cm, mają środki oddalone o 2 m. Na jednej kuli jest ładunek  $+1 \cdot 10^{-8}$  C, a na drugiej ładunek  $-3 \cdot 10^{-8}$  C. Przyjmij, że duża odległość kul w stosunku do ich rozmiarów uzasadnia przyjęcie założenia o jednorodnym rozkładzie ładunku na każdej kuli (kule nie oddziałują na siebie nawzajem). Przy  $V = 0$  w nieskończoności, oblicz: a) potencjał w punkcie, znajdującym się w połowie odległości między środkami kul, b) potencjał każdej kuli.

54. Naładowana kula metalowa o promieniu 15 cm ma całkowity ładunek  $3 \cdot 10^{-8}$  C. a) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli? b) Jeśli  $V = 0$  w nieskończoności, to ile wynosi potencjał elektryczny na powierzchni kuli? c) W jakiej odległości od powierzchni kuli potencjał elektryczny jest o  $500$  V mniejszy?

55. a) Jeśli Ziemia miałaby gęstość powierzchniową ładunku równą ładunkowi elektronu na metr kwadratowy (bardzo sztuczne założenie), to ile wynosiłby jej potencjał, jeśli przyjmiemy  $V = 0$  w nieskończoności? b) Ile wynosiłoby natężenie pola elektrycznego Ziemi tuż nad jej powierzchnią?

56. Dwie cienkie, izolowane, współśrodkowe, przewodzące sfery o promieniach  $R_1$  i  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) mają ładunki  $q_1$  i  $q_2$ . Przy  $V = 0$  w nieskończoności, wyprowadź wyrażenia na  $E(r)$  i  $V(r)$ , gdzie  $r$  jest odległością od środka sfer. Wykreśl zależność  $E(r)$  i  $V(r)$  od  $r = 0$  do  $r = 4$  m, przyjmując  $R_1 = 0,5$  m,  $R_2 = 1$  m,  $q_1 = +2 \mu\text{C}$  i  $q_2 = +1 \mu\text{C}$ .

## Zadanie dodatkowe

57. *Tajemnica proszku czekoladowego.* Historię rozpoczęliśmy w zadaniu 48 w rozdziale 24. a) Korzystając z odpowiedzi (a) z tego zadania, znajdź wyrażenie na potencjał elektryczny, w zależności od odległości  $r$  od osi rury. (Potencjał elektryczny jest równy zeru na uziemionej ścianie rury). b) Ile wynosi różnica potencjałów elektrycznych między osią rury i jej wewnętrzną ścianką dla typowej objętościowej gęstości ładunku  $\rho = -1,1 \cdot 10^{-3}$  C/m<sup>3</sup>? (Dalszy ciąg tej historii poznasz w zadaniu 48 w rozdziale 26).