

24 Prawo Gaussa

Wspaniale wyglądające błyskawice nad miastem podczas każdego uderzenia pioruna wysyłają około 10^{20} elektronów z chmury do ziemi.

Jak szeroka jest błyskawica? Skoro błyskawicę można obserwować nawet z odległości kilku kilometrów, to czy szerokość jej jest równa na przykład szerokości samochodu?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



24.1. Nowe spojrzenie na prawo Coulomba

Środek masy ziemniaka można wyznaczyć doświadczalnie lub wykonując żmudne obliczenia, zawierające numeryczne obliczenie całki potrójnej. Jeśli jednak ziemniak byłby jednorodną elipsoidą, to biorąc pod uwagę jej symetrię, bez żadnych obliczeń potrafimy określić dokładnie, gdzie jest środek masy. Takie korzyści wynikają z symetrii. Symetria pojawia się we wszystkich działach fizyki; gdy tylko jest to możliwe, warto przekształcić prawa fizyki do postaci, która w pełni pozwoli wykorzystać ten fakt.

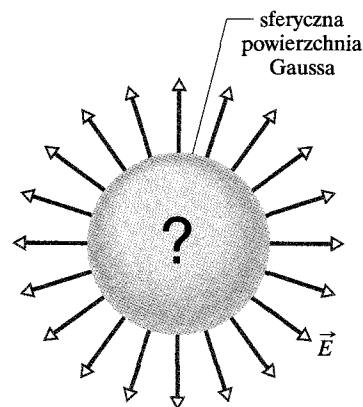
Prawo Coulomba jest podstawowym prawem elektrostatyki, ale nie jest wyrażone w postaci, która pozwalałaby w prostszy sposób wykonać obliczenia w przypadku występowania symetrii. W tym rozdziale poznasz nowe sformułowanie prawa Coulomba, wyprowadzone przez niemieckiego matematyka i fizyka Carla Friedricha Gaussa (1777–1855). Tego prawa, zwanego **prawem Gaussa**, można użyć do uwzględnienia szczególnej symetrii w rozważanym zagadnieniu. Dla zagadnień elektrostatyki jest ono w pełni równoważne prawu Coulomba; które z nich wybierzemy, zależy tylko od rozważanego zagadnienia.

Dla prawa Gaussa istotne jest wprowadzenie umownej zamkniętej powierzchni, zwanej **powierzchnią Gaussa**. Może mieć ona dowolny kształt, ale najbardziej użyteczny jest wybór powierzchni naśladującej symetrię rozważanego zagadnienia. Dlatego powierzchnia Gaussa będzie często sferą, powierzchnią walcową lub powierzchnią innej symetrycznej bryły. Musi być ona zawsze powierzchnią *zamkniętą*, tak aby można było wyraźnie rozróżnić punkty wewnątrz powierzchni, na powierzchni i na zewnątrz powierzchni.

Wyobraź sobie, że wybraliśmy powierzchnię Gaussa wokół rozkładu ładunków. Wtedy wkracza prawo Gaussa:

➤ Prawo Gaussa określa związek między natężeniem pola elektrycznego w punktach na (zamkniętej) powierzchni Gaussa i całkowitym ładunkiem objętym tą powierzchnią.

Na rysunku 24.1 przedstawiono prostą sytuację, w której powierzchnia Gaussa jest sferą. Załóżmy, że w każdym punkcie powierzchni jest określone natężenie pola elektrycznego i że wszystkie wektory natężenia mają taką samą wartość i są skierowane radialnie na zewnątrz. Nie wiedząc nic o prawie Gaussa, możemy się domyślać, że powierzchnia Gaussa musi wtedy obejmować pewien wypadkowy ładunek dodatni. Jeśli *znamy* prawo Gaussa, to możemy obliczyć wypadkowy ładunek dodatni, objęty przez powierzchnię Gaussa. Aby wykonać obliczenie, wystarczy tylko wiedzieć, „ile” pola elektrycznego przenika przez powierzchnię — miarą tego „ile” jest *strumień* pola elektrycznego, przenikający przez powierzchnię.

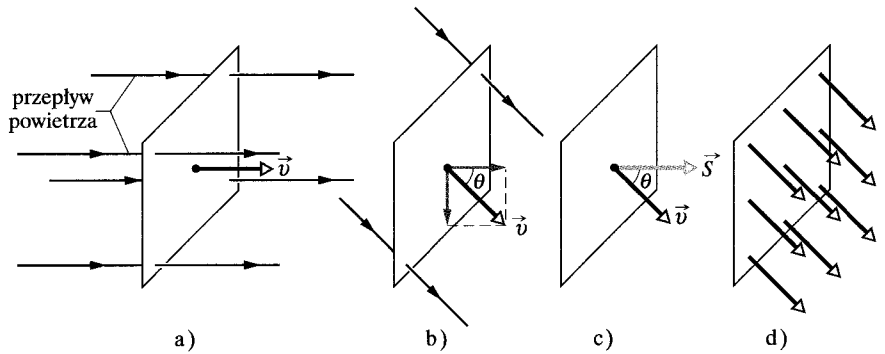


Rys. 24.1. Sferyczna powierzchnia Gaussa. Jeśli wektory natężenia pola elektrycznego mają jednakową wartość i są skierowane na zewnątrz we wszystkich punktach powierzchni, to można wnioskować, że wewnątrz powierzchni znajduje się wypadkowy dodatni rozkład ładunku, który ma symetrię sferyczną

24.2. Strumień

Założmy, że przez małą kwadratową ramkę o polu powierzchni S przepływa szeroki strumień powietrza o stałej prędkości $\vec{v}$ (rys. 24.2a). Oznaczmy przez Φ *szybkość przepływu przez powierzchnię*, czyli objętość powietrza, przepływającego

Rys. 24.2. a) Jednorodny strumień powietrza o prędkości $\vec{v}$ jest prostopadły do płaszczyzny kwadratowej ramki o polu powierzchni S . b) Składowa prędkości $\vec{v}$ prostopadła do płaszczyzny ramki jest równa $v \cos \theta$, gdzie θ jest kątem między $\vec{v}$ i normalną (prostopadłą) do płaszczyzny. c) Wektor powierzchni $\vec{S}$ jest prostopadły do płaszczyzny ramki i tworzy kąt θ z $\vec{v}$. d) Pole prędkości na powierzchni ramki.



przez ramkę w jednostce czasu. Szybkość przepływu zależy od kąta między wektorem $\vec{v}$ i płaszczyzną ramki. Jeśli prędkość $\vec{v}$ jest prostopadła do płaszczyzny, to szybkość przepływu Φ jest równa vS .

Jeśli prędkość $\vec{v}$ jest równoległa do płaszczyzny ramki, to powietrze wcale nie przechodzi przez ramkę i Φ jest równa zero. Dla pośredniego kąta θ szybkość Φ zależy od składowej prędkości $\vec{v}$, prostopadłej do płaszczyzny ramki (rys. 24.2b). Składowa ta jest równa $v \cos \theta$, a więc szybkość przepływu przez powierzchnię wynosi:

$$\Phi = (v \cos \theta)S. \quad (24.1)$$

Ta szybkość przepływu przez powierzchnię jest przykładem **strumienia** — tutaj *strumienia objętościowego*. Zanim przedyskutujemy strumień występujący w elektrostatyce, napiszemy wzór (24.1), korzystając z wektorów.

W tym celu zdefiniujemy najpierw *wektor powierzchni* $\vec{S}$ jako wektor, którego wartość jest równa polu powierzchni (tu polu powierzchni ograniczonej ramką) i który jest skierowany prostopadle do powierzchni (rys. 24.2c). Możemy wtedy napisać wzór (24.1) jako iloczyn skalarny wektora prędkości $\vec{v}$ strumienia powietrza i wektora powierzchni $\vec{S}$ ograniczonej ramką:

$$\Phi = vS \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{S}, \quad (24.2)$$

gdzie θ jest kątem między wektorami $\vec{v}$ i $\vec{S}$.

Nazwa „strumień”, kojarzy się z „płynięciem”. Takie określenie jest całkiem naturalne, gdy mówimy o przepływie objętości powietrza przez ramkę. Wzór (24.2) można jednak traktować bardziej abstrakcyjnie. Zauważ, że każdemu punktowi strumienia powietrza, przechodzącego przez ramkę, możemy przypisać wektor prędkości (rys. 24.2d). Zbiór wszystkich takich wektorów tworzy *pole prędkości* i wzór (24.2) możemy interpretować, jako określenie *strumienia pola prędkości przez ramkę*. Przy tej interpretacji strumień nie oznacza, że coś przechodzi przez tę powierzchnię — oznacza właściwie iloczyn pola powierzchni i pola pewnej wielkości, określonej na tej powierzchni.

24.3. Strumień pola elektrycznego

W celu zdefiniowania strumienia pola elektrycznego rozważmy rysunek 24.3, na którym przedstawiono pewną dowolną (asymetryczną) powierzchnię Gaussa

w niejednorodnym polu elektrycznym. Podzielmy powierzchnię na małe kwadraty o polu powierzchni ΔS , wybierając każdy kwadrat na tyle mały, aby można było zaniedbać jego krzywiznę i rozważać poszczególne kwadraty jako płaskie. Każdy taki element powierzchni będziemy opisywać wektorem powierzchni $\Delta \vec{S}$, którego wartość jest równa polu powierzchni ΔS i który jest skierowany prostopadłe do powierzchni Gaussa, na zewnątrz tej powierzchni.

Wybraliśmy dowolnie małe kwadraty, więc natężenie pola elektrycznego możemy uważać za stałe na powierzchni danego kwadratu. Wektory $\Delta \vec{S}$ i $\vec{E}$ dla każdego kwadratu tworzą ze sobą pewien kąt θ . Na rysunku 24.3 pokazano w powiększeniu trzy kwadraty (1, 2 i 3) na powierzchni Gaussa i kąt θ dla każdego z nich.

Zacznijmy od wstępnej definicji strumienia pola elektrycznego dla powierzchni Gaussa z rysunku 24.3:

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}. \quad (24.3)$$

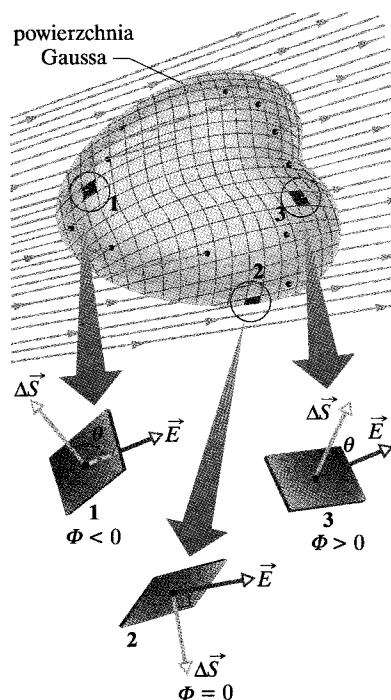
Ze wzoru tego wynika, że musimy wziąć pod uwagę każdy kwadrat na powierzchni Gaussa, obliczyć iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$ dwóch wektorów $\vec{E}$ i $\Delta \vec{S}$ tam określonych i zsumować wyniki algebraicznie (czyli z uwzględnieniem znaków) dla wszystkich kwadratów, tworzących powierzchnię. Znak, jaki otrzymujemy przy obliczaniu każdego iloczynu skalarnego określa, czy strumień, przenikający przez dany kwadrat jest dodatni, ujemny, czy zerowy. Kwadraty (jak np. 1), dla których natężenie $\vec{E}$ jest skierowane do wnętrza powierzchni, dają ujemny wkład do sumy ze wzoru (24.3). Kwadraty (jak 2), dla których wektor $\vec{E}$ leży w płaszczyźnie kwadratu, dają wkład zerowy. Kwadraty (jak 3), dla których natężenie $\vec{E}$ jest skierowane na zewnątrz powierzchni, dają wkład dodatni.

Dokładną definicję strumienia pola elektrycznego, przenikającego przez zamkniętą powierzchnię otrzymujemy przez przejście do coraz mniejszych pól powierzchni kwadratów (rys. 24.3), osiągając w granicy dS . Wektory powierzchni dążą wtedy do różniczek $d\vec{S}$. Suma ze wzoru (24.3) staje się całką i jako definicję strumienia elektrycznego otrzymujemy:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa}). \quad (24.4)$$

Całkę należy obliczyć po całej (zamkniętej) powierzchni (co zaznaczamy kółkiem na całce). Strumień pola elektrycznego jest skalarem i jego jednostką w układzie SI jest niuton razy metr kwadratowy na kulomb ($\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$).

Wzór (24.4) możemy zinterpretować następująco: przypomnij sobie, że gęstość linii pola elektrycznego przechodzących przez powierzchnię jest proporcjonalna do natężenia pola $\vec{E}$ na powierzchni. Oznacza to, że wartość E jest proporcjonalna do liczby linii pola elektrycznego na jednostkę powierzchni. Stąd iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ we wzorze (24.4) jest proporcjonalny do liczby linii pola elektrycznego, przechodzących przez powierzchnię $d\vec{S}$. Całkowanie we wzorze (24.4) odbywa się po powierzchni Gaussa, która jest zamknięta, a więc widzimy, że:

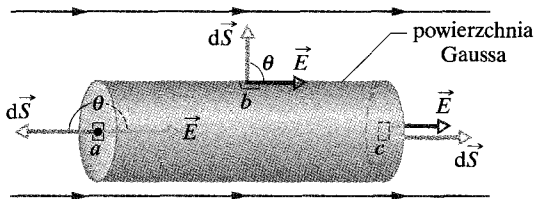


Rys. 24.3. Powierzchnia Gaussa dowolnego kształtu, znajdująca się w polu elektrycznym. Powierzchnia jest podzielona na małe kwadraty o polu powierzchni ΔS . Pokazano wektory natężenia pola $\vec{E}$ i wektory powierzchni $\Delta \vec{S}$ dla trzech przykładowych kwadratów, oznaczonych 1, 2 i 3

➤ Strumień elektryczny Φ przenikający przez powierzchnię Gaussa jest proporcjonalny do całkowitej liczby linii pola elektrycznego, przechodzących przez tę powierzchnię.

Przykład 24.1

Na rysunku 24.4 przedstawiono powierzchnię Gaussa w postaci powierzchni walca o promieniu R , umieszczonego w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$, przy czym oś walca jest równoległa do kierunku natężenia pola. Ile wynosi strumień Φ pola elektrycznego, przenikającego przez tę zamkniętą powierzchnię?



Rys. 24.4. Przykład 24.1. Walcowa powierzchnia Gaussa, zamknięta przez denka, znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym. Oś walca jest równoległa do kierunku natężenia pola

ROZWIĄZANIE:

Strumień elektryczny przez powierzchnię możemy znaleźć przez scałkowanie iloczynu skalarnego $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ po powierzchni Gaussa. Możemy to zrobić, przedstawiając strumień jako sumę trzech całek: po lewym denku a , po powierzchni bocznej walca b i po prawym denku c . Ze wzoru (24.4) mamy więc:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_a \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (24.5)$$

Dla wszystkich punktów na lewym denku kąt θ między $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ wynosi 180° i wartość E natężenia pola jest stała. Stąd:

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 180^\circ) dS = -E \int dS = -ES,$$

gdzie $\int dS$ daje pole powierzchni denka $S (= \pi R^2)$. Podobnie dla prawego denka, gdzie dla wszystkich punktów $\theta = 0^\circ$, mamy:

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 0^\circ) dS = ES.$$

Na koniec, dla powierzchni bocznej walca, gdzie we wszystkich punktach kąt $\theta = 90^\circ$, mamy:

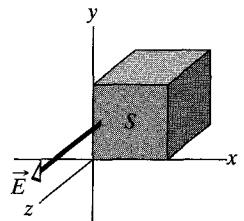
$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 90^\circ) dS = 0.$$

Podstawiając te wyniki do wzoru (24.5), otrzymujemy ostatecznie:

$$\Phi = -ES + 0 + ES = 0. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten raczej nie zaskakuje, gdyż wszystkie linie pola, które reprezentują pole elektryczne, całkowicie przechodzą przez powierzchnię Gaussa i dają wypadkowy strumień równy zero, bo wchodzą przez lewe denko i wychodzą przez prawe.

SPRAWDZIAN 1: Przedstawiona na rysunku powierzchnia Gaussa, w postaci powierzchni sześcianu o polu powierzchni ściany S , jest umieszczona w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$, które jest skierowane w dodatnim kierunku osi z . Wyraż przez E i S strumień pola elektrycznego przenikającego przez: a) przednią ścianę (leżącą w płaszczyźnie xy), b) tylną ścianę, c) górną ścianę, d) powierzchnię całego sześcianu.



Przykład 24.2

Niejednorodne pole elektryczne o natężeniu $\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$ przenika przez sześcienną powierzchnię Gaussa, przedstawioną na rys. 24.5 (E jest wyrażone w niutonach na kulomb, a x w metrach). Oblicz strumień elektryczny, przenikający przez prawą ścianę, lewą ścianę i górną ścianę sześcianu.

ROZWIĄZANIE:

Strumień elektryczny Φ przez powierzchnię możemy obliczyć, całkując iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ po każdej ze ścian.

Prawa ściana: Wektor powierzchni $\vec{S}$ jest zawsze prostopadły do powierzchni i skierowany na zewnątrz powierzchni Gaussa. Stąd wektor $d\vec{S}$ dla prawej ściany sześcianu musi być skierowany w kierunku dodatniej osi x . Zapisując to za pomocą wektorów jednostkowych mamy więc:

$$d\vec{S} = dS\hat{i}.$$

Ze wzoru (24.4) strumień Φ_p , przenikający przez prawą ścianę wynosi więc:

$$\begin{aligned} \Phi_p &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int (3x\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (dS\hat{i}) \\ &= \int [(3x) \cdot (dS)\hat{i} \cdot \hat{i} + (4)(dS)\hat{j} \cdot \hat{i}] \\ &= \int (3xdS + 0) = 3 \int x dS. \end{aligned}$$

Aby obliczyć całkę po prawej ścianie, skorzystajmy z faktu, że x ma taką samą wartość $x = 3$ m na całej ścianie. Możemy więc podstawić tę stałą wartość za x i otrzymamy:

$$\Phi_p = 3 \int 3dS = 9 \int dS.$$

Teraz całka daje nam po prostu pole powierzchni $S = 4 \text{ m}^2$ dla prawej ściany i ostatecznie:

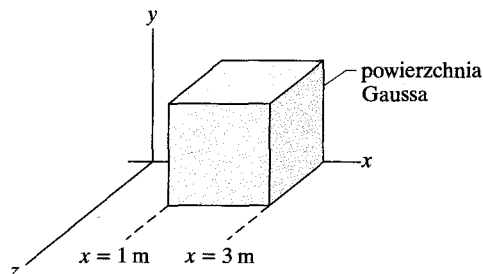
$$\Phi_p = (9 \text{ N/C})(4 \text{ m}^2) = 36 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Lewa ściana: Procedura obliczania strumienia, przenikającego przez lewą ścianę jest taka sama, jak dla prawej ściany. Jednak dwa czynniki ulegają zmianie. 1) Wektor powierzchni $d\vec{S}$ jest skierowany w kierunku ujemnym osi x i stąd $d\vec{S} = -dS\hat{i}$. 2) W naszej całce znów występuje czynnik x , który ponownie jest stały na rozważanej ścianie. Obecnie, na lewej ścianie mamy jednak $x = 1 \text{ m}$. Po uwzględnieniu tych dwóch zmian strumień Φ_l przez lewą ścianę wynosi

$$\Phi_l = -12 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Górna ściana: Wektor powierzchni $d\vec{S}$ jest skierowany w dodatnim kierunku osi y i stąd $d\vec{S} = dS\hat{j}$. Strumień Φ_g , przenikający przez górną ścianę wynosi więc:

$$\begin{aligned} \Phi_g &= \int (3x\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot dS\hat{j} = \int [(3x) \cdot (dS)\hat{i} \cdot \hat{j} + (4)(dS) \cdot \hat{j} \cdot \hat{j}] \\ &= \int (0 + 4dS) = 4 \int dS = 16 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$



Rys. 24.5. Przykład 24.2. Powierzchnia Gaussa w postaci powierzchni sześcianu o jednej krawędzi na osi x znajduje się w niejednorodnym polu elektrycznym

24.4. Prawo Gaussa

Prawo Gaussa opisuje związek między strumieniem Φ pola elektrycznego, przenikającym przez zamkniętą powierzchnię (powierzchnię Gaussa) i całkowitym ładunkiem q_{wewn} , zawartym *wewnątrz* tej powierzchni. Zgodnie z tym prawem:

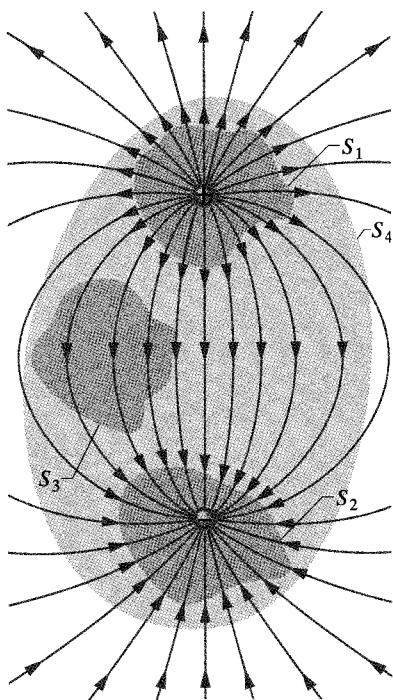
$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}} \quad (\text{prawo Gaussa}). \quad (24.6)$$

Po podstawieniu wzoru (24.4) definiującego strumień, prawo Gaussa możemy także zapisać w postaci:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{wewn}} \quad (\text{prawo Gaussa}). \quad (24.7)$$

Wzory (24.6) i (24.7) są słuszne tylko wtedy, gdy ładunek znajduje się w próżni lub (co jest praktycznie tym samym) w powietrzu. W paragrafie 26.8 zmodyfikujemy prawo Gaussa, aby uwzględnić sytuacje, gdy rozważamy takie materiały, jak: mika, olej czy szkło.

We wzorach (24.6) i (24.7) ładunek q_{wewn} jest algebraiczną sumą wszystkich dodatnich i ujemnych ładunków zawartych *wewnątrz* tej powierzchni i może być dodatni, ujemny lub zerowy. Uwzględniamy znak ładunku, zamiast używać tylko jego bezwzględnej wartości, ponieważ znak zawiera istotną informację o wypadkowym strumieniu przenikającym przez powierzchnię Gaussa. Jeśli ładunek q_{wewn} jest dodatni, to przeważa strumień *na zewnątrz*; jeśli ładunek q_{wewn} jest ujemny, to przeważa strumień *do wewnątrz*.



Rys. 24.6. Dwa ładunki punktowe o jednakowej wartości, ale o przeciwnym znaku i linie pola, reprezentujące wypadkowe natężenie wytworzonego przez nie pola elektrycznego. Pokazano przekrój czterech powierzchni Gaussa. Powierzchnia S_1 otacza ładunek dodatni. Powierzchnia S_2 otacza ładunek ujemny. Powierzchnia S_3 nie otacza żadnego ładunku. Powierzchnia S_4 otacza obydwa ładunki. Całkowity ładunek jest równy zero

Ładunek na zewnątrz powierzchni, bez względu na to, jak jest duży lub jak blisko się znajduje, nie jest włączony do członu q_{wewn} w prawie Gaussa. Dokładna postać rozkładu, czyli położenie ładunków wewnątrz powierzchni Gaussa także nie odgrywa roli; istotne po prawej stronie wzoru (24.7) są tylko wartość i znak wypadkowego ładunku, otoczonego powierzchnią Gaussa. Wielkość $\vec{E}$ po lewej stronie wzoru (24.7) jest jednak natężeniem pola elektrycznego, wytworzonego przez *wszystkie* ładunki zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz powierzchni Gaussa. Może się wydawać, że to jest niekonsekwencja, ale przypomnij sobie wynik z przykładu 24.1: pole elektryczne, wytworzone przez ładunki na zewnątrz powierzchni Gaussa daje zerowy wypadkowy strumień przenikający przez tę powierzchnię, bo tyle samo linii pola wytworzonego przez te ładunki pada na powierzchnię, co ją opuszcza.

Zastosujmy te idee do rysunku 24.6, na którym przedstawiono linie pola elektrycznego, wytworzonego przez dwa ładunki punktowe o jednakowych wartościach, ale o przeciwnych znakach. Przedstawiono także w przekroju cztery powierzchnie Gaussa. Rozważmy po kolei każdą z nich.

Powierzchnia S_1 . We wszystkich punktach na tej powierzchni linie pola elektrycznego wychodzą na zewnątrz. Stąd strumień pola elektrycznego przenikający przez tę powierzchnię jest dodatni, dodatni jest też całkowity ładunek wewnątrz powierzchni, jak wymaga tego prawo Gaussa. (Zgodnie ze wzorem (24.6), jeśli strumień Φ jest dodatni, to taki musi być też ładunek q_{wewn}).

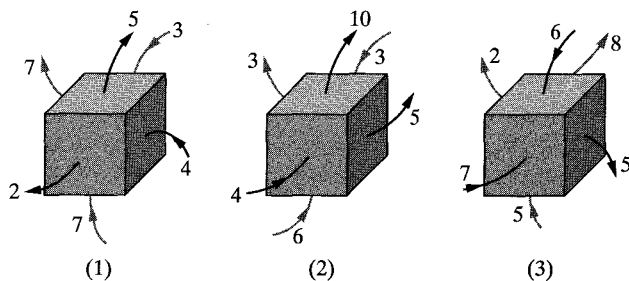
Powierzchnia S_2 . We wszystkich punktach na tej powierzchni linie pola elektrycznego wchodzą do wnętrza. Stąd strumień pola elektrycznego jest ujemny i taki jest też całkowity ładunek wewnątrz powierzchni, jak wymaga tego prawo Gaussa.

Powierzchnia S_3 . Ta powierzchnia nie otacza żadnego ładunku i stąd $q_{\text{wewn}} = 0$. Prawo Gaussa (wzór (24.6)) wymaga, aby wypadkowy strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię był równy zero. Jest tak rzeczywiście, bo wszystkie linie pola przechodzą całkowicie przez powierzchnię, wchodząc u góry i wychodząc na dole.

Powierzchnia S_4 . Całkowity ładunek wewnątrz tej powierzchni jest równy zero, bo otaczane ładunki, dodatni i ujemny, mają jednakowe wartości. Prawo Gaussa wymaga, aby wypadkowy strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię był równy zero. Jest tak rzeczywiście, bo tyle samo linii opuszcza powierzchnię S_4 , co na nią pada.

Co się stanie, gdy w pobliżu powierzchni S_4 z rysunku 24.6 umieścimy na zewnątrz niej ogromny ładunek Q ? Rozkład linii pola z pewnością się zmieni, ale wypadkowy strumień dla każdej z czterech powierzchni Gaussa nie ulegnie zmianie. Jest to zrozumiałe, bo linie pola związane z dodanym ładunkiem Q będą całkowicie przechodziły przez każdą z czterech powierzchni Gaussa, nie dając wkładu do wypadkowego strumienia przez każdą z nich. Wartość Q nie jest uwzględniona w prawie Gaussa, bo Q leży na zewnątrz wszystkich czterech rozważanych powierzchni Gaussa.

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono trzy sytuacje, w których sześcienna powierzchnia Gaussa znajduje się w polu elektrycznym. Strzałki i liczby wskazują kierunki linii pola i wartości (w $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$) strumienia, przenikającego przez każdą ze ścian każdego sześciianu. (Jaśniejsze strzałki dotyczą ścian niewidocznych). W których sytuacjach sześcienn otacza: a) dodatni ładunek wypadkowy, b) ujemny ładunek wypadkowy, c) zerowy ładunek wypadkowy?



Przykład 24.3

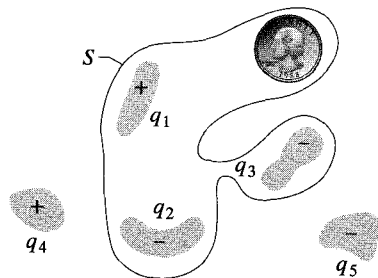
Na rysunku 24.7 przedstawiono pięć naładowanych kawałków plastiku i elektrycznie obojętną monetę oraz zaznaczono przekrój powierzchni Gaussa S . Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię, jeśli $q_1 = q_4 = +3,1 \text{ nC}$, $q_2 = q_5 = -5,9 \text{ nC}$ i $q_3 = -3,1 \text{ nC}$?

ROZWIĄZANIE:

Całkowity strumień Φ przenikający przez powierzchnię zależy od całkowitego ładunku q_{wewn} , objętego przez powierzchnię S . Oznacza to, że moneta oraz ładunki q_4 i q_5 nie dają wkładu do Φ . Moneta nie daje wkładu, ponieważ jest obojętna, czyli zawiera jednakowe ilości ładunku dodatniego i ujemnego. Ładunki q_4 i q_5 nie dają wkładu, ponieważ znajdują się na zewnątrz powierzchni S . Stąd $q_{\text{wewn}} = q_1 + q_2 + q_3$ i wzór (24.6) daje nam

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{q_{\text{wewn}}}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0} \\ &= \frac{+3,1 \cdot 10^{-9} \text{ C} - 5,9 \cdot 10^{-9} \text{ C} - 3,1 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)} \\ &= -670 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})\end{aligned}$$

Znak minus wskazuje, że przeważa strumień, przenikający przez powierzchnię do wewnątrz, bo wypadkowy ładunek objęty powierzchnią jest ujemny.

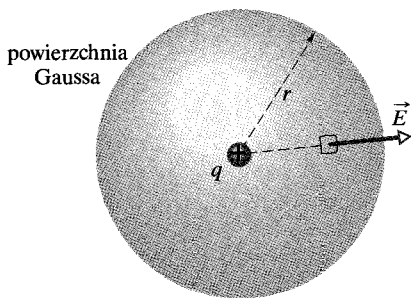


Rys. 24.7. Przykład 24.3. Pięć plastikowych naładowanych ciał i moneta o zerowym ładunku wypadkowym. Przedstawiono przekrój powierzchni Gaussa, która otacza trzy plastikowe ciała i monetę

24.5. Prawo Gaussa a prawo Coulomba

Jeśli prawo Gaussa i prawo Coulomba są sobie równoważne, to powinniśmy móc wyprowadzić jedno z drugiego. W tym paragrafie wyprowadzimy prawo Coulomba z prawa Gaussa. Skorzystamy przy tym z pewnych właściwości symetrii.

Na rysunku 24.8 przedstawiono dodatni ładunek punktowy q , wokół którego narysowano sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu r . Podzielmy tę powierzchnię na nieskończenie małe obszary o polu powierzchni dS . Z definicji,



Rys. 24.8. Sferyczna powierzchnia Gaussa, w której środku znajduje się w ładunek punktowy q

wektor powierzchni $d\vec{S}$ w dowolnym punkcie jest prostopadły do powierzchni i skierowany na zewnątrz. Z właściwości symetrii wynika, że w każdym punkcie natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ również jest prostopadłe do powierzchni i skierowane na zewnątrz. Kąt θ między $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ jest równy zero, więc wzór (24.7) możemy zapisać w postaci:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint E dS = q_{\text{wewn}}, \quad (24.8)$$

gdzie $q_{\text{wewn}} = q$. Chociaż E zmienia się radialnie wraz z odległością od q , to ma taką samą wartość na całej powierzchni sferycznej. Całkę we wzorze (24.8) trzeba obliczyć po tej powierzchni, a więc natężenie E ma stałą wartość przy całkowaniu i można je wyłączyć przed znak całki:

$$\varepsilon_0 E \oint dS = q. \quad (24.9)$$

Całka jest teraz tylko sumą po polach powierzchni dS elementów sfery i jest równa polu powierzchni $4\pi r^2$. Po podstawieniu tej wartości otrzymujemy:

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q,$$

czyli

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (24.10)$$

Jest to dokładnie natężenie pola elektrycznego ładunku punktowego, znane nam ze wzoru (23.3), który otrzymaliśmy, używając prawa Coulomba. Prawo Gaussa jest więc równoważne prawu Coulomba.

✓ SPRAWDZIAN 3: Wypadkowy strumień elektryczny, przenikający przez sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu r , otaczającą odosobnioną cząstkę naładowaną wynosi Φ_0 . Załóżmy, że zamieniliśmy otaczającą powierzchnię Gaussa na: a) większą sferę, b) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej r , c) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej $2r$. Czy wypadkowy strumień elektryczny, przenikający przez nową powierzchnię Gaussa będzie większy, mniejszy, czy równy Φ_0 w każdym z tych przypadków?

Sztuka rozwiązywania zadań

Porada 1: Wybór powierzchni Gaussa

Wyprowadzenie wzoru (24.10) przy zastosowaniu prawa Gaussa jest tylko ćwiczeniem przed wyprowadzeniami natężeń pól elektrycznych, wytwarzanych przez inne rozkłady ładunku i dlatego spróbujmy powtórzyć poszczególne kroki. Zaczęliśmy od dodatniego ładunku punktowego q ; wiemy, że linie pola elektrycznego wychodzą radialnie z q w sposób sferycznie symetryczny.

W celu wyznaczenia z prawa Gaussa (24.7) wartości E natężenia pola elektrycznego w odległości r , musimy umieścić wybraną zamkniętą powierzchnię Gaussa wokół q tak, aby przechodziła przez punkt, znajdujący się w odległości r od ładunku q . Następnie należy zsumować przez całkowanie wartości $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ po całej powierzchni Gaussa. Aby uczynić tę całkę możliwie najprostszą, wybieramy sferyczną powierzchnię Gaussa (aby uwzględnić sferyczną symetrię pola elektrycznego). Wybór ten pozwala na następujące uproszczenia: 1) Iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ staje się

prosty do obliczenia, ponieważ we wszystkich punktach na powierzchni Gaussa kąt między $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ jest równy zero, czyli we wszystkich punktach mamy $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$. 2) Wartość natężenia pola elektrycznego E jest taka sama we wszystkich punktach sferycznej powierzchni Gaussa i dlatego wartość E jest stała, czyli przy całkowaniu można ją wynieść przed znak całki. 3) W wyniku otrzymujemy bardzo prostą całkę — sumę pól powierzchni elementów sfery, którą możemy zapisać jako $4\pi r^2$.

Warto podkreślić, że prawo Gaussa jest spełnione bez względu na kształt powierzchni Gaussa, jaką wybieramy wokół ładunku q_{wewn} . Jeśli jednak wybralibyśmy, powiedzmy, sześcienną powierzchnię Gaussa, to nie moglibyśmy skorzystać z żadnego z tych trzech uproszczeń i całka z $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ po tej powierzchni byłaby bardzo trudna do obliczenia. Wniosek jest taki, że należy wybierać powierzchnię Gaussa tak, aby całkowanie w prawie Gaussa najbardziej się upraszczało.

24.6. Izolowany przewodnik naładowany

Prawo Gaussa pozwala udowodnić ważne twierdzenie o izolowanych (odosobnionych) przewodnikach:

➤ Jeśli nadmiarowy ładunek zostaje umieszczony na izolowanym przewodniku, to ten ładunek przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika. We wnętrzu przewodnika nie ma żadnego nadmiarowego ładunku.

Fakt ten może wydawać się naturalny, bo ładunki o tym samym znaku odpychają się wzajemnie. Można stąd wywnioskować, że przesuając się do powierzchni nadmiarowe ładunki oddalają się od siebie tak daleko, jak to jest tylko możliwe. Odwołamy się do prawa Gaussa, aby sprawdzić poprawność tego rozumowania.

Na rysunku 24.9a przedstawiono w przekroju izolowany kawałek miedzi, naładowany ładunkiem q i zawieszony na izolującej nici. Powierzchnię Gaussa umieszczamy wewnątrz powierzchni przewodnika.

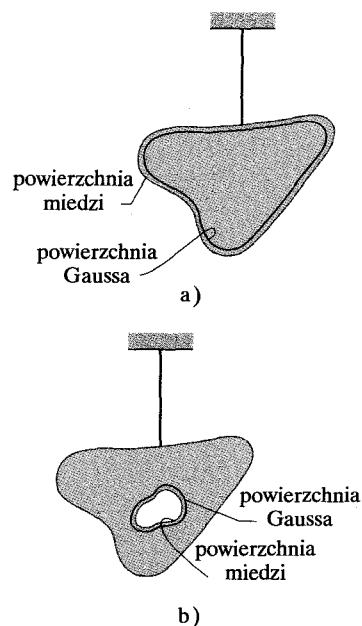
Natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika musi być równe zero. Gdyby tak nie było, to na (swobodne) elektrony przewodnictwa, które zawsze występują w przewodniku, działałyby siły i stąd w przewodniku istniałby prąd elektryczny, czyli ładunek przepływałby w przewodniku z miejsca na miejsce. W izolowanym przewodniku nie ma oczywiście takich ciągle płynących prądów i dlatego natężenie pól elektrycznych jest wewnątrz przewodnika zerowe.

(Wewnętrzne pole elektryczne występuje w przewodniku, gdy przewodnik jest ładowany. Jednak dodawany ładunek szybko rozmieszcza się w ten sposób, że wypadkowe natężenie pola elektrycznego — wektorowa suma natężeń pól elektrycznych, wytworzonych przez wszystkie ładunki, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz przewodnika — jest równe zero. Wówczas ruch ładunków ustaje, ponieważ siła wypadkowa działająca na każdy ładunek jest równa zero — ładunki są wtedy w równowadze elektrostatycznej).

Jeśli natężenie $\vec{E}$ jest równe zero w każdym punkcie wewnątrz miedzianego przewodnika, to musi być zerowe we wszystkich punktach powierzchni Gaussa, ponieważ ta powierzchnia, chociaż może znajdować się blisko powierzchni przewodnika, jest z pewnością wewnątrz przewodnika. Oznacza to, że strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa musi być zerowy. Z prawa Gaussa wynika wtedy, że ładunek wypadkowy wewnątrz powierzchni Gaussa musi być także równy zero. Nadmiarowego ładunku nie ma wewnątrz powierzchni Gaussa, dlatego też musi być na zewnątrz tej powierzchni, co oznacza, że znajduje się on na powierzchni przewodnika.

Izolowany przewodnik z wnęką

Na rysunku 24.9b przedstawiono ten sam wiszący na nici przewodnik, ale tym razem z wnęką, znajdującą się całkowicie w przewodniku. Uzasadnione wydaje się założenie, że gdy wycinamy elektrycznie obojętny materiał, aby utworzyć



Rys. 24.9. a) Kawałek miedzi o ładunku q jest zawieszony na izolującej nici. Powierzchnia Gaussa została wybrana wewnątrz metalu, w pobliżu powierzchni przewodnika. b) Kawałek miedzi ma teraz wewnątrz wnękę. Powierzchnia Gaussa leży wewnątrz metalu, w pobliżu powierzchni wnęki

wnękę, nie zmieniamy rozkładu ani ładunku, ani pola elektrycznego, istniejącego na rysunku 24.9a. Znów zastosujemy prawo Gaussa, aby przeprowadzić dowód ilościowy.

Narysujmy powierzchnię Gaussa otaczającą wnękę, bliską jej powierzchni, ale znajdującą się wewnątrz przewodzącego ciała. Wewnątrz przewodnika $\vec{E} = 0$, a więc strumień elektryczny przez tę nową powierzchnię Gaussa musi być równy zeru. Z prawa Gaussa wynika więc, że wnęka nie może zawierać wypadkowego ładunku. Wnioskujemy, że na ścianach wnęki nie ma wypadkowego ładunku — cały nadmiarowy ładunek pozostaje na zewnętrznej powierzchni przewodnika, jak na rysunku 24.9a.

Usunięcie przewodnika

Załóżmy, że w jakiś magiczny sposób nadmiarowe ładunki mogą zostać „zamrożone” na powierzchni przewodnika, na przykład przez pokrycie ich plastikową powłoką, tak że przewodnik można całkowicie usunąć. Jest to równoważne powiększeniu wnęki z rysunku 24.9b tak, aby wypełniała w całości przewodnik, pozostawiając tylko ładunki. Pole elektryczne nie ulegnie wtedy żadnej zmianie — pozostanie zerowe we wnętrzu cienkiej naładowanej powłoki i nie zmieni się w punktach na zewnątrz powłoki. Wynika stąd, że pole elektryczne jest wytworzone przez ładunki, a nie przez przewodnik. Przewodnik po prostu umożliwia tylko ładunkom zajęcie odpowiedniego położenia.

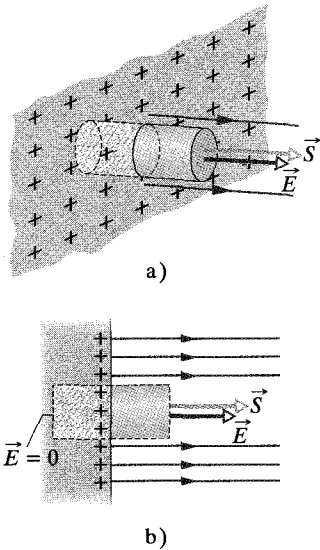
Zewnętrzne pole elektryczne

Wiesz już, że nadmiar ładunku na izolowanym przewodniku przesuwają się całkowicie na powierzchnię przewodnika. Jeśli jednak powierzchnia przewodnika nie jest sferyczna, to ładunek nie rozkłada się równomiernie. Innymi słowy, powierzchniowa gęstość ładunku σ (ładunek na jednostkę powierzchni) nie jest stała na powierzchni dowolnego przewodnika niesferycznego. Ta zmienność powoduje, że na ogół bardzo trudno jest wyznaczyć natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunki powierzchniowe.

Korzystając z prawa Gaussa, można jednak łatwo określić natężenie pola elektrycznego tuż przy powierzchni przewodnika. Rozważmy w tym celu wycinek powierzchni na tyle mały, aby można było zaniedbać jakąkolwiek jego krzywiznę, czyli aby można było uważać go za płaski. Wyobraźmy sobie następnie małą walcową powierzchnię Gaussa, zawierającą ten wycinek (rys. 24.10): jedno denko powierzchni znajduje się całkowicie wewnątrz przewodnika, drugie całkowicie na zewnątrz przewodnika, a powierzchnia boczna walca jest prostopadła do powierzchni przewodnika.

Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ na powierzchni przewodnika i tuż nad nią musi być także prostopadłe do tej powierzchni. Gdyby nie było, to miałyby składową wzdłuż powierzchni przewodnika, która prowadziłaby do działania sił na ładunki powierzchniowe, powodujących ruch ładunków. Taki ruch naruszałby jednak nasze milczące założenie, że mamy do czynienia z równowagą elektrostatyczną. Stąd natężenie $\vec{E}$ jest prostopadłe do powierzchni przewodnika.

Zsumujemy obecnie strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa. Strumień przez wewnętrzne denko jest zerowy, bo natężenie pola elektrycznego



Rys. 24.10. Widok z ukosa (a) i z boku (b) drobnej części dużego odosobnionego przewodnika z nadmiarowym ładunkiem dodatnim na jego powierzchni. Zamknięta walcowa powierzchnia Gaussa wnika do przewodnika i jest do niego prostopadła, obejmując pewien ładunek. Linie pola elektrycznego przechodzą przez zewnętrzne denko walca, ale nie przez wewnętrzne denko. Zewnętrzne denko ma pole powierzchni S i wektor powierzchni $\vec{S}$

w przewodniku wynosi zero. Strumień przez boczną powierzchnię walca także znika, bo w części znajdującej się wewnątrz przewodnika nie ma pola elektrycznego, a w części znajdującej się na zewnątrz natężenie pola elektrycznego jest równoległe do elementu powierzchni Gaussa. Nie znika jedynie strumień przenikający przez zewnętrzne denko powierzchni Gaussa, gdzie natężenie $\vec{E}$ jest prostopadłe do płaszczyzny denka. Zakładamy, że pole powierzchni S denka jest wystarczająco małe, aby wartość natężenia E była na denku stała. Strumień przenikający przez denko wynosi wtedy ES i taki jest wypadkowy strumień Φ przez powierzchnię Gaussa.

Ładunek q_{wewn} , objęty powierzchnią Gaussa znajduje się na powierzchni przewodnika o polu powierzchni S . Jeśli σ jest ładunkiem na jednostkę powierzchni, to q_{wewn} wynosi σS . Po podstawieniu σS za q_{wewn} i ES za Φ prawo Gaussa (24.6) przyjmuje postać:

$$\epsilon_0 ES = \sigma S,$$

z której otrzymujemy:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{powierzchnia przewodnika}). \quad (24.11)$$

Wartość natężenia pola elektrycznego tuż przy powierzchni przewodnika jest więc proporcjonalna do gęstości powierzchniowej ładunku w tym miejscu przewodnika. Jeśli ładunek na przewodniku jest dodatni, to natężenie pola elektrycznego jest skierowane na zewnątrz przewodnika, jak na rysunku 24.10. Jeśli ładunek jest ujemny, to natężenie pola elektrycznego jest skierowane do przewodnika.

Linie pola na rysunku 24.10 muszą się kończyć na ładunkach ujemnych, gdzieś w otoczeniu. Jeśli przesuniemy te ładunki w pobliże przewodnika, to gęstość ładunku w dowolnym miejscu na powierzchni przewodnika ulegnie zmianie. Zmieni się także natężenie pola elektrycznego. Związek między E i σ będzie jednak nadal określony wzorem (24.11).

Przykład 24.4

Na rysunku 24.11a przedstawiono przekrój sferycznej powłoki metalowej o wewnętrznym promieniu R . Ładunek punktowy $-5 \mu\text{C}$ umieszczono w odległości $R/2$ od środka powłoki. Jeśli powłoka jest elektrycznie obojętna, to jakie (indukowane) ładunki są na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki? Czy te ładunki są rozłożone równomiernie? Jaki jest rozkład pola wewnątrz i na zewnątrz powłoki?

ROZWIĄZANIE:

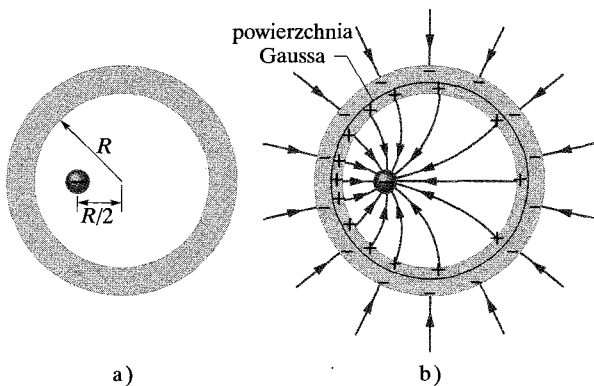
Na rysunku 24.11b przedstawiono przekrój sferycznej powierzchni Gaussa wewnątrz metalu, tuż poza wewnętrzną powierzchnią powłoki.

➤ 1. Natężenie pola elektrycznego musi być równe zeru wewnątrz metalu (i stąd na powierzchni Gaussa wewnątrz metalu).

Oznacza to, że strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa musi być także równy zeru. Z prawa Gaussa wynika, że całkowity ładunek otoczony przez powierzchnię Gaussa musi być zerowy. Przy punktowym ładunku $-5 \mu\text{C}$ wewnątrz powłoki, na wewnętrznej powierzchni powłoki musi znajdować się ładunek $+5 \mu\text{C}$.

Jeśli ładunek punktowy byłby w środku powłoki, to ten dodatni ładunek byłby rozłożony jednorodnie na powierzchni wewnętrznej. Jeśli jednak ładunek punktowy znajduje się poza środkiem, to rozkład ładunku dodatniego jest niejednorodny, jak przedstawiono na rysunku 24.11b, gdyż ładunek dodatni ma tendencję gromadzenia się na wycinkach wewnętrznej powierzchni, najbliższych (ujemnemu) ładunkowi punktowemu.

➤ 2. Ze względu na to, że powłoka jest elektrycznie obojętna, jej wewnętrzna powierzchnia może mieć ładunek $+5 \mu\text{C}$ tylko wtedy, gdy elektrony o całkowitym ładunku $-5 \mu\text{C}$ opuszczają wewnętrzną powierzchnię i przesuną się na zewnętrzną. Elektrony



Rys. 24.11. Przykład 24.4. a) Ujemny ładunek punktowy umieszczono wewnątrz sferycznej powłoki metalowej, która jest elektrycznie obojętna. b) Na wewnętrznej powierzchni powłoki pojawił się wtedy niejednorodny rozkład ładunku dodatniego, a na zewnętrznej powierzchni — jednorodny rozkład ładunku ujemnego

rozkładają się tu jednorodnie, co zaznaczono na rysunku 24.11b. Ten rozkład ładunku ujemnego jest jednorodny, ponieważ powłoka jest sferyczna. Niejednorodny rozkład ładunku dodatniego na wewnętrznej powierzchni nie może wytworzyć takiego pola elektrycznego, które mogłoby wpłynąć na rozkład ładunku na zewnętrznej powierzchni.

Na rysunku 24.11b przedstawiono w przybliżeniu linie pola wewnątrz i na zewnątrz powłoki. Wszystkie linie pola przecinają powłokę prostopadle. Wewnątrz powłoki rozkład linii pola jest nierównomierny wskutek niejednorodności rozkładu ładunku dodatniego. Poza powłoką rozkład pola jest taki, jakby było wytworzone przez ładunek punktowy, umieszczony w środku powłoki i jakby powłoki nie było. Jest tak niezależnie od tego, gdzie wewnątrz powłoki umieszczono ładunek punktowy.

✓ **SPRAWDZIAN 4:** Kulka o ładunku $-50e$ znajduje się w środku sferycznej powłoki metalowej o ładunku wypadkowym $-100e$. Jaki jest ładunek na: a) wewnętrznej, b) zewnętrznej powierzchni powłoki?

24.7. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa

Na rysunku 24.12 przedstawiono fragment nieskończenie długiego walcowego pręta plastikowego, naładowanego jednorodnie dodatnio z gęstością liniową λ . Znajdziemy teraz wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w odległości r od osi pręta.

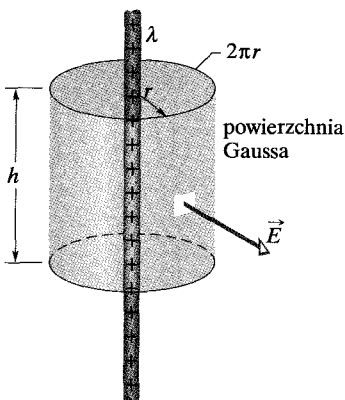
Powierzchnia Gaussa powinna w tym przypadku odpowiadać walcowej symetrii zagadnienia. Wybieramy więc powierzchnię walca o promieniu r i wysokości h , współosiowego z prętem. Powierzchnia Gaussa musi być zamknięta i dlatego włączamy do niej dwa denka.

Wyobraź sobie teraz, że gdy nie patrzyliśmy, ktoś obrócił pręt plastikowy wokół jego osi podłużnej lub go odwrócił. Jeśli spojrzymy ponownie na pręt, to nie potrafimy dostrzec tej zmiany. Wnioskujemy więc, że jedynym jednoznacznie wyróżnionym kierunkiem w tym zagadnieniu jest kierunek radialny. Dlatego w każdym punkcie powierzchni bocznej walca natężenie $\vec{E}$ musi mieć taką samą wartość E i (dla dodatnio naładowanego pręta) musi być skierowane na zewnątrz.

Pole powierzchni bocznej walca wynosi $2\pi rh$, ponieważ długość obwodu podstawy jest równa $2\pi r$, a wysokość jest równa h . Strumień natężenia $\vec{E}$ przez powierzchnię walca wynosi:

$$\Phi = ES \cos \theta = E \cdot 2\pi rh \cdot \cos 0 = E \cdot 2\pi rh.$$

Strumień elektryczny, przenikający przez denka jest równy zeru, ponieważ natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$, skierowane radialnie, jest równoległe do powierzchni denka w każdym jego punkcie.



Rys. 24.12. Powierzchnia Gaussa w postaci zamkniętej powierzchni walcowej otacza odcinek bardzo długiego, jednorodnie naładowanego, walcowego pręta plastikowego

Ładunek objęty rozważaną powierzchnią wynosi λh i prawo Gaussa:

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}}$$

sprowadza się do postaci:

$$\varepsilon_0 E \cdot 2\pi r h = \lambda h,$$

stąd otrzymujemy:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (\text{naładowana linia prosta}). \quad (24.12)$$

Wzór ten określa wartość natężenia pola elektrycznego pochodzącego od nieskończonej, jednorodnie naładowanej linii prostej, w punkcie znajdującym się w odległości r od linii. Natężenie $\vec{E}$ jest skierowane radialnie od linii, jeśli ładunek jest dodatni i do linii, jeśli ładunek jest ujemny. Wzór (24.12) określa także w przybliżeniu pole naładowanej nici o skończonej długości w punktach, które nie znajdują się zbyt blisko jej końców (w porównaniu z odległością od nici).

Przykład 24.5

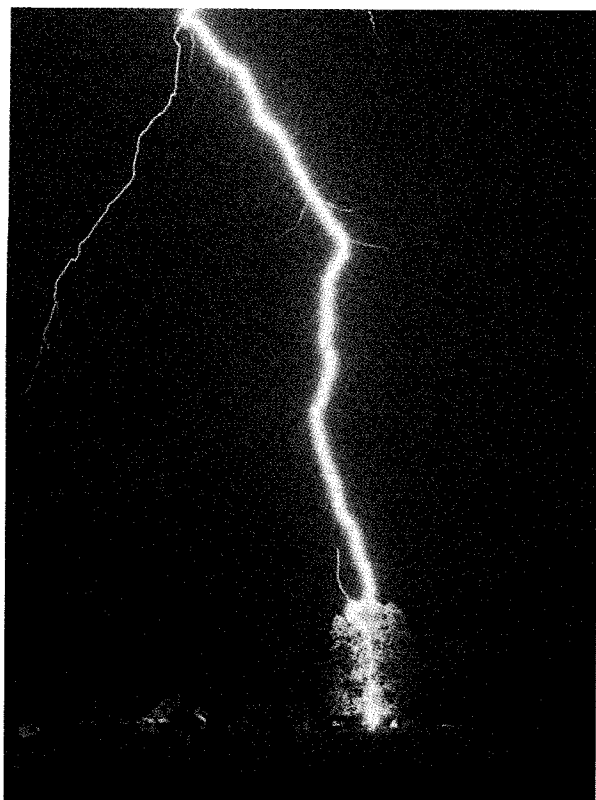
Każda błyskawica poprzedzona jest niewidzialnym procesem, podczas którego strumień elektronów rozchodzi się w dół, od chmury do ziemi. Elektrony te pochodzą z chmury i cząsteczek powietrza, które ulegają jonizacji w obszarze strumienia. Liniowa gęstość ładunku λ wzdłuż strumienia jest zwykle równa $-1 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}$. Gdy strumień dociera do ziemi, elektrony zaczynają szybko na nią spływać. Podczas tego przepływu zderzenia między poruszającymi się elektronami i cząsteczkami powietrza dają bardzo jasny błysk światła (czyli samą błyskawicę). Jaki jest promień strumienia, jeśli cząsteczki powietrza ulegają jonizacji w polu elektrycznym o natężeniu większym od $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$?

ROZWIĄZANIE:

❶ 1. Chociaż strumień nie jest ani prosty, ani nieskończenie długi, to można go przybliżyć przez naładowaną linię z rysunku 24.12. (Linia jest naładowana ujemnie, a więc natężenie $\vec{E}$ jej pola jest skierowane radialnie do wnętrza). Zgodnie ze wzorem (24.12) wartość natężenia E maleje wraz z odległością od osi strumienia ładunku.

❷ 2. Powierzchnia strumienia ładunku musi znajdować się w takiej odległości r od jej osi, w której wartość natężenia $\vec{E}$ wynosi $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$, ponieważ cząsteczki powietrza wewnątrz obszaru o tym promieniu ulegają jonizacji, a znajdujące się dalej nie. Ze wzoru (24.12) wyznaczamy r i po podstawieniu znanych wielkości obliczamy promień strumienia:

Rys. 24.13. Piorun uderza w jawor o wysokości 20 m. Drzewo jest mokre, więc większość ładunku przepływa przez znajdującą się na nim wodę i drzewo pozostaje nieuszkodzone





Rys. 24.14. Prądy uziemienia od uderzenia pioruna wypaliły trawę na tym polu golfowym, odkrywając glebę

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 E} \\
 &= \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}}{(2\pi) \cdot (8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) \cdot (3 \cdot 10^6 \text{ N/C})} \\
 &= 6 \text{ m.} \quad (\text{odpowiedź})
 \end{aligned}$$

(Promień świecącego obszaru błyskawicy jest mniejszy, prawdopodobnie wynosi tylko 0,5 m. Szerokość tę można ocenić na podstawie rysunku 24.13). Chociaż promień strumienia wynosi tylko 6 m, to nie należy sądzić, że jesteśmy bezpieczni w większych odległościach od punktu uderzenia pioruna, bowiem elektrony spływające do ziemi rozchodzą się po jej powierzchni. Na rysunku 24.14 przedstawiono dowód istnienia takich *prądów uziemienia*. Prądy uziemienia są śmiertelnie groźne.

24.8. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa

Płyta nieprzewodząca

Na rysunku 24.15 przedstawiono fragment cienkiej nieskończonej nieprzewodzącej płaskiej płyty, naładowanej jednorodnie dodatnio z gęstością powierzchniową σ . Arkusz cienkiej plastikowej folii, jednorodnie naładowany z jednej strony, może służyć jako prosty model takiej płyty. Znajdźmy natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w odległości r od płyty.

W tym zagadnieniu przydatną powierzchnią Gaussa jest przedstawiona na rysunku powierzchnia walcowa, zamknięta denkami o polu powierzchni S , przecinająca prostopadłe płytę. Z symetrii zagadnienia wynika, że natężenie $\vec{E}$ musi być prostopadłe do płyty i stąd do denek. Ponadto, ponieważ ładunek jest dodatni, to natężenie $\vec{E}$ jest skierowane *od* płyty i stąd linie pola elektrycznego przecinają denka powierzchni Gaussa, wychodząc na zewnątrz. Linie pola nie przecinają powierzchni bocznej, dlatego też strumień elektryczny przez tę część powierzchni Gaussa jest równy zero. Na powierzchni denek $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ wynosi po prostu $E dS$ i prawo Gaussa:

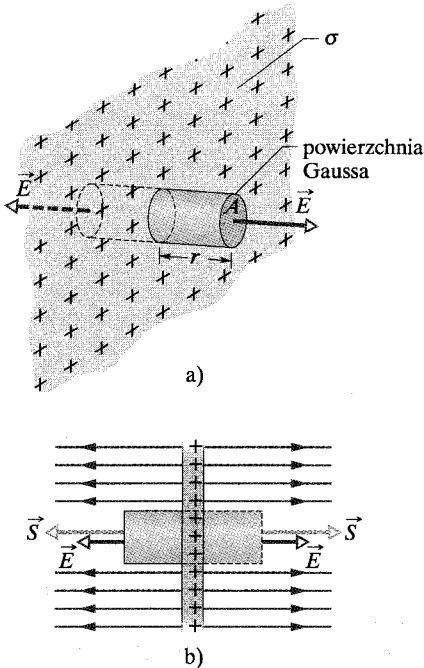
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{wewn}}$$

przyjmuje postać:

$$\epsilon_0 (ES + ES) = \sigma S,$$

gdzie σS jest ładunkiem objętym przez powierzchnią Gaussa. Mamy zatem:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{naładowana płaszczyzna}). \quad (24.13)$$



Rys. 24.15. Widok a) z ukosa, b) z boku fragmentu bardzo dużej, cienkiej płyty plastikowej, naładowanej jednorodnie z jednej strony z gęstością powierzchniową ładunku σ . Zamknięta walcowa powierzchnia Gaussa przenika przez płytę i jest prostopadła do niej

Rozważamy tutaj nieskończoną płytę o jednorodnej gęstości ładunku, a więc wynik ten obowiązuje dla każdego punktu w skończonej odległości od płyty. Wzór (24.13) jest zgodny ze wzorem (23.27), który znaleźliśmy przez całkowanie składowych natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez poszczególne ładunki. (Warto powrócić do tego czasochłonnego i złożonego całkowania i zauważyć, o ile łatwiej otrzymuje się ten wynik z prawa Gaussa. Jest to jeden z powodów poświęcenia całego rozdziału temu prawu: dla pewnych symetrycznych rozkładów ładunku łatwiej jest skorzystać z prawa Gaussa, niż całkować składowe natężenia pola).

Dwie przewodzące płyty

Na rysunku 24.16a przedstawiono przekrój cienkiej nieskończonej płyty przewodzącej, na której znajduje się nadmiar ładunku dodatniego. Z paragrafu 24.6 wiemy, że ten nadmiarowy ładunek znajduje się tylko na powierzchni płyty. Płyta jest bardzo cienka i bardzo duża, a więc możemy założyć, że cały nadmiarowy ładunek umieszczony jest w zasadzie na dwóch dużych ścianach płyty.

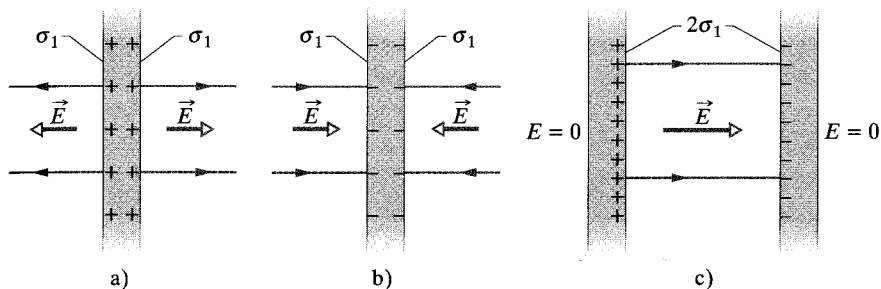
Jeśli nie ma zewnętrznego pola elektrycznego, które mogłoby spowodować szczególny rozkład ładunku, to ładunek rozłoży się na dwóch płaszczyznach, z jednorodną gęstością powierzchniową σ_1 . Ze wzoru (24.11) wiemy, że poza płytą taki ładunek wytwarza pole elektryczne o natężeniu równym $E = \sigma_1/\epsilon_0$. Nadmiarowy ładunek jest dodatni, a więc natężenie pola jest skierowane od płyty.

Na rysunku 24.16b przedstawiono identyczną płytę z nadmiarowym ładunkiem ujemnym, o takiej samej wartości gęstości powierzchniowej ładunku σ_1 . Wytworzone pole różni się jedynie tym, że jego natężenie jest teraz skierowane do płyty.

Żałóżmy, że ustawiliśmy płyty z rysunku 24.16a i b blisko siebie i równolegle (rys. 24.16c). Płyty są przewodnikami, dlatego też po takim ich ustawieniu ładunek nadmiarowy na jednej płycie przyciąga ładunek nadmiarowy na drugiej i cały nadmiarowy ładunek przesunie się na wewnętrzne powierzchnie płyt, jak pokazano na rysunku 24.16c. Przy dwukrotnie większym ładunku nowa gęstość powierzchniowa ładunku σ na każdej wewnętrznej powierzchni jest równa $2\sigma_1$. Stąd natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie między płytami ma wartość:

$$E = \frac{2\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (24.14)$$

Natężenie pola elektrycznego jest skierowane od płyty naładowanej dodatnio do płyty naładowanej ujemnie. Na zewnętrznych powierzchniach nie pozostał żaden nadmiarowy ładunek, więc natężenie na lewo i na prawo od płyt jest równe zero.



Rys. 24.16. a) Cienka, bardzo duża płyta przewodząca z nadmiarowym ładunkiem dodatnim. b) Identyczna płyta z nadmiarowym ładunkiem ujemnym. c) Obie płyty ustawione równolegle i blisko siebie

Ładunki na płytach przesunęły się, gdy zbliżaliśmy płyty do siebie, a więc rysunek 24.16c *nie jest* złożeniem rysunków 24.16a i b: rozkład ładunku dla układu dwóch płyt nie jest sumą rozkładów ładunku dla pojedynczych płyt.

Może cię zastanawiać, dlaczego omawiamy szczegółowo tak nierealistyczne zagadnienia, jak pole wytworzone przez nieskończoną naładowaną linię, nieskończoną naładowaną płytę lub parę nieskończonych naładowanych płyt. Jednym z powodów jest to, że analiza takich sytuacji przy zastosowaniu prawa Gaussa jest łatwa. Ważniejszym powodem jest to, że analizy dla „nieskończonych” sytuacji stanowią dobre przybliżenie wielu zagadnień rzeczywistego świata. Wzór (24.13) opisuje więc dobrze pole dla skończonej nieprzewodzącej płyty, jeśli rozważamy punkty znajdujące się blisko niej i niezbyt blisko jej krawędzi. Wzór (24.14) obowiązuje dla pary skończonych przewodzących płyt, znajdujących się w niewielkiej odległości od siebie, jeśli rozważamy punkty niezbyt bliskie krawędzi płyt.

Nie zajmujemy się krawędziami płyt, ponieważ blisko krawędzi nie możemy już korzystać z symetrii płaszczyznowej, aby znaleźć wyrażenia dla natężeń pól. Linie pola są tu w rzeczywistości zakrzywione (mówimy zwykle o *zjawisku krawędziowym* lub *brzegowym*) i może być bardzo trudno podać wzory opisujące natężenia pól.

Przykład 24.6

Na rysunku 24.17a przedstawiono fragmenty dwóch dużych równoległych nieprzewodzących płyt, z których każda jest jednorodnie naładowana z jednej strony. Wartości gęstości powierzchniowej ładunku są równe $\sigma_{(+)} = 6,8 \mu\text{C}/\text{m}^2$ dla płyty naładowanej dodatnio i $\sigma_{(-)} = 4,3 \mu\text{C}/\text{m}^2$ dla płyty naładowanej ujemnie. Oblicz natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$: a) na lewo od płyt, b) między płytami, c) na prawo od płyt.

ROZWIĄZANIE:

🔑 Przy danych ładunkach pole elektryczne płyt na rysunku 24.17a można znaleźć przez: a) znalezienie natężenia pola, pochodzącego od każdej płyty, jak gdyby tej drugiej nie było, b) algebraiczne dodanie natężeń pól tych płyt, przez zastosowanie zasady superpozycji. (Natężenia te możemy dodać algebraicznie, ponieważ są one równoległe do siebie). Zastosowanie wzoru (24.13) daje wartość $E_{(+)}$ natężenia pola elektrycznego dodatniej płyty w dowolnym punkcie przestrzeni

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{2\epsilon_0} = \frac{6,8 \cdot 10^{-6} \text{ C}/\text{m}^2}{(2)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N/C}.$$

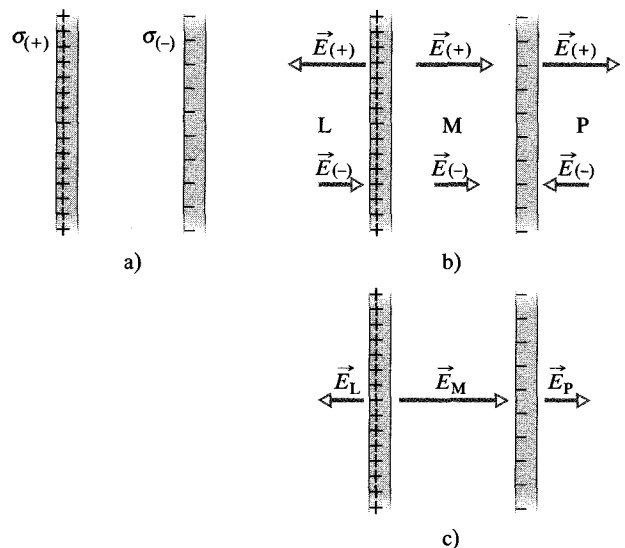
Podobnie wartość $E_{(-)}$ natężenia pola elektrycznego płyty ujemnej w dowolnym punkcie wynosi:

$$\begin{aligned} E_{(-)} &= \frac{\sigma_{(-)}}{2\epsilon_0} = \frac{4,3 \cdot 10^{-6} \text{ C}/\text{m}^2}{(2)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))} \\ &= 2,43 \cdot 10^5 \text{ N/C}. \end{aligned}$$

Na rysunku 24.17b przedstawiono natężenia pól, wytworzonych przez płyty na lewo od płyt (L), między nimi (M) i na prawo od nich (P).

Wypadkowe natężenia pola w tych trzech obszarach wynikają z zasady superpozycji. Na lewo wartość natężenia wynosi:

$$\begin{aligned} E_L &= E_{(+)} - E_{(-)} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N/C} - 2,43 \cdot 10^5 \text{ N/C} \\ &= 1,4 \cdot 10^5 \text{ N/C}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 24.17. Przykład 24.6. a) Dwie duże równoległe płyty, jednorodnie naładowane z jednej strony. b) Natężenia pól elektrycznych wytworzonych przez każdą z płyt z osobna. c) Wypadkowe natężenie pola od obydwu naładowanych płyt, obliczone w wyniku zastosowania zasady superpozycji

Ponieważ $E_{(+)}$ jest większe od $E_{(-)}$, więc wypadkowe natężenie pola $\vec{E}_L$ w tym obszarze jest skierowane w lewo, jak przedstawiono na rysunku 24.17c. Na prawo od płyt natężenie pola $\vec{E}_P$ ma taką samą wartość, ale jest skierowane w prawo (rys. 24.17c).

Między płytami natężenia dwóch pól dodają się i mamy:

$$E_M = E_{(+)} + E_{(-)} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N/C} + 2,43 \cdot 10^5 \text{ N/C} = 6,3 \cdot 10^5 \text{ N/C.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Natężenie pola $\vec{E}_M$ jest skierowane w prawo.

24.9. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna

Zastosujemy teraz prawo Gaussa do udowodnienia dwóch twierdzeń o powłoce, przedstawionych bez dowodu w paragrafie 22.4:

- Powłoka sferyczna naładowana jednorodnie przyciąga lub odpycha cząstkę naładowaną, znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek powłoki był skupiony w środku powłoki.
- Powłoka sferyczna naładowana jednorodnie nie działa siłą elektrostatyczną na cząstkę naładowaną znajdującą się wewnątrz powłoki.

Na rysunku 24.18 przedstawiono naładowaną powłokę sferyczną o całkowitym ładunku q i promieniu R oraz dwie współśrodkowe sferyczne powierzchnie Gaussa S_1 i S_2 . Postępując według procedury opisanej w paragrafie 24.5 przy stosowaniu prawa Gaussa do powierzchni S_2 , dla której $r \geq R$, otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{powłoka sferyczna, pole dla } r \geq R). \quad (24.15)$$

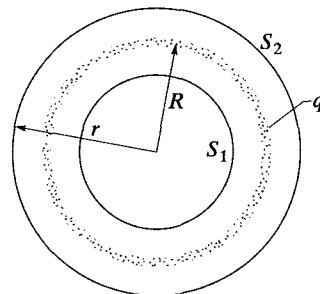
Jest to takie samo natężenie pola, jakie wytworzyłby ładunek punktowy q , umieszczony w środku naładowanej powłoki. Stąd powłoka o ładunku q oddziałuje taką samą siłą na naładowaną cząstkę na zewnątrz powłoki, jak ładunek punktowy q , umieszczony w środku powłoki. Jest to dowód pierwszego twierdzenia o powłoce.

Stosując prawo Gaussa do powierzchni S_1 , dla której $r < R$, otrzymujemy:

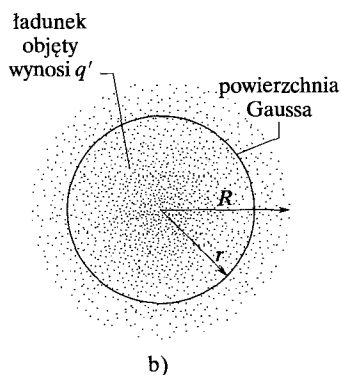
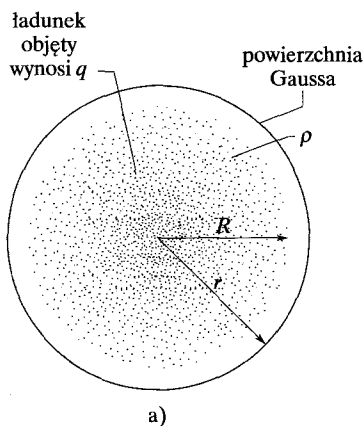
$$E = 0 \quad (\text{powłoka sferyczna, pole dla } r < R), \quad (24.16)$$

ponieważ powierzchnia Gaussa nie obejmuje żadnego ładunku. Jeśli więc cząstka naładowana znajdowałaby się wewnątrz powłoki, to powłoka nie działałaby na nią żadną wypadkową siłą. Jest to dowód drugiego twierdzenia o powłoce.

Dowolny sferycznie symetryczny rozkład ładunku, taki jak na rysunku 24.19 można utworzyć przez złożenie współśrodkowych powłok sferycznych. Aby można było zastosować dwa twierdzenia o powłoce, gęstość objętościowa ładunku ρ powinna mieć określoną wartość dla każdej powłoki, ale wartości te nie muszą być takie same dla wszystkich powłok. Stąd dla sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku gęstość ρ może zależeć tylko od odległości r od środka. Możemy



Rys. 24.18. Przekrój cienkiej, jednorodnie naładowanej powłoki sferycznej o całkowitym ładunku q . Widać także przekrój dwóch powierzchni Gaussa S_1 i S_2 . Powierzchnia S_2 obejmuje powłokę, a S_1 tylko puste wnętrze powłoki



Rys. 24.19. Kropki oznaczają sferycznie symetryczny rozkład ładunku o promieniu R , dla którego gęstość objętościowa ładunku ρ jest funkcją tylko odległości od środka. Naładowane ciało nie jest przewodnikiem. Zakładamy, że ładunki mają ustalone położenie. Przedstawiono także współśrodkową sferyczną powierzchnię Gaussa o $r > R$ (a) i podobną powierzchnię Gaussa o $r < R$ (b)

wtedy sumować „powłoka po powłoce” wkłady do pola, wytworzonego przez symetryczny rozkład ładunku.

Na rysunku 24.19a cały ładunek znajduje się wewnątrz powierzchni Gaussa dla $r > R$. Natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunek na tej powierzchni Gaussa jest takie, jakby ładunek był ładunkiem punktowym, znajdującym się w środku i wobec tego obowiązuje wzór (24.15). Na rysunku 24.19b przedstawiono powierzchnię Gaussa dla $r < R$. Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego w punktach na powierzchni Gaussa, rozważmy dwa układy naładowanych powłok: jeden układ zawierający powłoki wewnątrz powierzchni Gaussa i drugi — na zewnątrz. Ze wzoru (24.16) wynika, że ładunek znajdujący się *na zewnątrz* powierzchni wytwarza zerowe wypadkowe natężenie pola elektrycznego na powierzchni Gaussa. Natomiast ze wzoru (24.15) wynika, że ładunek *objęty* przez powierzchnię wytwarza takie natężenie pola elektrycznego, jak gdyby objęty ładunek był skupiony w środku. Jeśli q' oznacza obejmowany ładunek, to wzór (24.15) możemy napisać w postaci:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2} \quad (\text{rozkład sferyczny, pole dla } r \leq R). \quad (24.17)$$

Jeśli cały ładunek q zamknięty wewnątrz sfery o promieniu R jest rozłożony *jednorodnie*, to ładunek q' wewnątrz sfery o promieniu r na rysunku 24.19b jest proporcjonalny do q :

$$\frac{\text{ładunek wewnątrz sfery o promieniu } r}{\text{objętość wnętrza sfery o promieniu } r} = \frac{\text{cały ładunek}}{\text{cała objętość}},$$

czyli:

$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (24.18)$$

Otrzymujemy stąd:

$$q' = q \frac{r^3}{R^3} \quad (24.19)$$

i po podstawieniu do wzoru (24.17) otrzymujemy:

$$E = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r \quad (\text{jednorodny rozkład sferyczny, pole dla } r \leq R). \quad (24.20)$$

✓ SPRAWDZIAN 5: Na rysunku przedstawiono dwie duże równoległe nieprzewodzące płyty, naładowane jednorodnie, z identycznymi (dodatnimi) gęstościami powierzchniowymi i kulę naładowaną jednorodnie, z (dodatnią) gęstością objętościową. Uszereguj wartości natężenia wypadkowego pola elektrycznego w czterech ponumerowanych punktach, zaczynając od największej.

Prawo Gaussa Prawo Gaussa i prawo Coulomba, chociaż mają różne postaci, są równoważnymi sposobami opisu związku między ładunkiem i natężeniem pola elektrycznego w sytuacjach statycznych. Prawo Gaussa ma postać:

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}} \quad (\text{prawo Gaussa}), \quad (24.6)$$

gdzie q_{wewn} jest wypadkowym ładunkiem wewnątrz zamkniętej powierzchni (**powierzchni Gaussa**), a Φ jest wypadkowym **strumieniem** natężenia pola elektrycznego przez tę powierzchnię:

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} \quad (\text{strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa}) \quad (24.4)$$

Prawo Coulomba można łatwo wyprowadzić z prawa Gaussa.

Zastosowanie prawa Gaussa Dla symetrycznych rozkładów ładunku, korzystając z prawa Gaussa, możemy wyprowadzić wiele ważnych związków elektrostatycznych. Oto niektóre z nich:

1. Ładunek nadmiarowy na *przewodniku* znajduje się tylko na zewnętrznej jego powierzchni.
2. Natężenie pola elektrycznego przy zewnętrznej *powierzchni naładowanego przewodnika* jest prostopadłe do tej powierzchni i ma wartość:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{powierzchnia przewodnika}). \quad (24.11)$$

Wewnątrz przewodnika mamy $E = 0$.

3. Natężenie pola elektrycznego nieskończonej *linii naładowanej* z gęstością liniową ładunku λ jest w dowolnym punkcie

prostopadłe do naładowanej linii i ma wartość:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{naładowana linia}), \quad (24.12)$$

gdzie r jest odległością punktu od naładowanej linii.

4. Natężenie pola elektrycznego *nieskończonej nieprzewodzącej płyty*, naładowanej jednorodnie z gęstością powierzchniową ładunku σ jest prostopadłe do płaszczyzny płyty i wynosi:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{naładowana płaszczyzna}). \quad (24.13)$$

5. Natężenie pola elektrycznego *na zewnątrz sferycznej jednorodnie naładowanej powłoki* o promieniu R i całkowitym ładunku q jest skierowane radialnie i ma wartość:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{powłoka sferyczna, dla } r \geq R), \quad (24.15)$$

gdzie r jest odległością od środka powłoki do punktu, w którym wartość E jest wyznaczana. (Dla punktów na zewnątrz powłoki ładunek zachowuje się tak, jakby był skupiony w środku sfery). Natężenie pola *wewnątrz sferycznej powłoki naładowanej jednorodnie* jest równe zero:

$$E = 0 \quad (\text{powłoka sferyczna, dla } r < R). \quad (24.16)$$

6. Natężenie pola elektrycznego *wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli* jest skierowane radialnie i ma wartość:

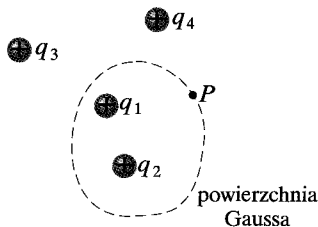
$$E = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r. \quad (24.20)$$

Pytania

1. Wektor powierzchni jest równy: $\vec{S} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \text{ m}^2$. Oblicz strumień elektryczny, przenikający przez tę powierzchnię, jeśli natężenie pola wynosi: a) $\vec{E} = 4\hat{i} \text{ N/C}$, b) $\vec{E} = 4\hat{k} \text{ N/C}$.

2. Ile wynosi $\int dS$ dla: a) kwadratu o boku a , b) koła o promieniu r , c) powierzchni bocznej walca o wysokości h i promieniu r ?

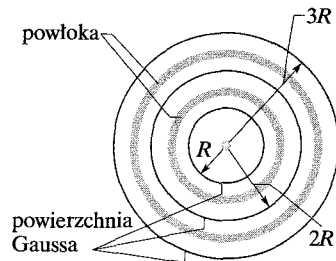
3. Na rysunku 34.20 zamknięta powierzchnia Gaussa obejmuje dwie z czterech dodatnio naładowanych cząstek. a) Które z cząstek dają wkład do natężenia pola elektrycznego w punkcie P na



Rys. 24.20. Pytanie 3

powierzchni? b) Który wypadkowy strumień natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię jest większy: ten wywołany ładunkami q_1 i q_2 , czy ten wywołany wszystkimi czterema ładunkami?

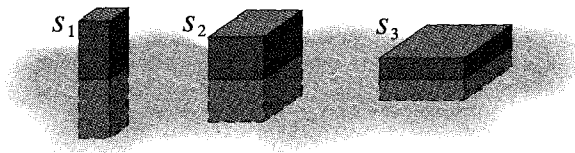
4. Na rysunku 24.21 przedstawiono w przekroju kulkę metalową, dwie sferyczne powłoki metalowe i trzy sferyczne powierzchnie Gaussa o promieniach R , $2R$ i $3R$ — wszystkie mają wspólny środek. Jednorodnie rozłożone ładunki trzech ciał metalowych wynoszą: Q dla kulki, $3Q$ dla mniejszej powłoki i $5Q$ dla większej



Rys. 24.21. Pytanie 4

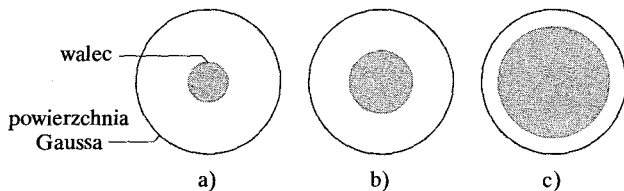
powłoki. Uszereguj powierzchnie Gaussa według wartości natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie na powierzchni, zaczynając od wartości największej.

5. Na rysunku 24.22 przedstawiono trzy powierzchnie Gaussa, z których każda jest do połowy zagłębiona w dużej, grubej, metalowej płycie, jednorodnie naładowanej powierzchniowo. Powierzchnia S_1 jest najwyższa i ma najmniejsze kwadratowe denka, powierzchnia S_3 jest najniższa i ma największe kwadratowe denka, a powierzchnia S_2 ma pośrednie wymiary. Uszereguj powierzchnie według: a) objętości przez nie ładunku, b) wartości natężenia pola w punktach na ich górnych denkach, c) wypadkowego strumienia elektrycznego przez górne denko, d) wypadkowego strumienia elektrycznego przez ich dolne denka, zaczynając od wartości największej.



Rys. 24.22. Pytanie 5

6. Na rysunku 24.23 przedstawiono w przekroju trzy walce, każdy naładowany jednorodnie ładunkiem Q . Każdy z nich otoczony jest współosiową walcową powierzchnią Gaussa. Wszystkie te powierzchnie mają takie same promienie. Uszereguj powierzchnie Gaussa według wartości natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie powierzchni, zaczynając od wartości największej.



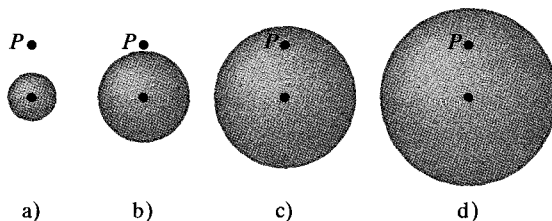
Rys. 24.23. Pytanie 6

7. Trzy nieskończone nieprzewodzące płyty naładowane jednorodnie z gęstościami powierzchniowymi σ , 2σ i 3σ są ustawione równolegle, podobnie jak dwie płyty na rysunku 24.17a. W jakiej kolejności są one ustawione, od lewej do prawej, jeśli natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$, wytworzonego przez ten układ, ma wartość $E = 0$ w jednym obszarze i $E = 2\sigma/\epsilon_0$ w drugim obszarze między nimi?

8. Mała naładowana kulka znajduje się wewnątrz metalowej sferycznej powłoki o promieniu R . Wypadkowe ładunki na kulce i powłoce wynoszą dla trzech sytuacji: 1) $+4q$, 0; 2) $-6q$, $+10q$; 3) $+16q$, $-12q$. Uszereguj te sytuacje według ładunku na: a) wewnętrznej powierzchni powłoki, b) zewnętrznej powierzchni powłoki, zaczynając od największego dodatniego ładunku.

9. Uszereguj sytuacje z pytania 8 według wartości natężenia pola elektrycznego: a) w połowie grubości powłoki, b) w punkcie odległym o $2R$ od środka powłoki, zaczynając od wartości największej.

10. Na rysunku 24.24 przedstawiono cztery kule, naładowane jednorodnie objętościowo ładunkiem Q każda. a) Uszereguj kule według ich gęstości objętościowej ładunku, zaczynając od największej. Na rysunku zaznaczono także punkt P dla każdej kuli, zawsze w tej samej odległości od jej środka. b) Uszereguj kule według wartości natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego w punkcie P , zaczynając od największej.



Rys. 24.24. Pytanie 10

Zadania

www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

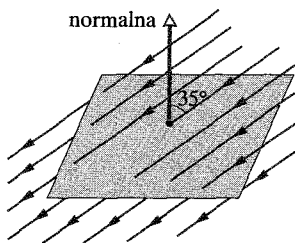
24.2. Strumień

1. Woda w rowie melioracyjnym o szerokości $w = 3,22$ m i głębokości $d = 1,04$ m płynie z prędkością $0,207$ m/s. *Strumień masy*

wody przez powierzchnię jest iloczynem gęstości wody (1000 kg/m³) i jej strumienia objętości przez tę powierzchnię. Oblicz strumień masy przez następujące powierzchnie: a) powierzchnię o polu wd , zanurzoną całkowicie w wodzie i prostopadłą do kierunku przepływu, b) powierzchnię o polu $3wd/2$, z którego część wd jest w wodzie, prostopadłą do kierunku przepływu, c) powierzchnię o polu $wd/2$, całkowicie zanurzoną w wodzie, prostopadłą do kierunku przepływu, d) powierzchnię o polu wd , w połowie w wodzie i w połowie nad wodą, prostopadłą do kierunku przepływu, e) powierzchnię o polu wd , całkowicie zanurzoną w wodzie, o normalnej tworzącej kąt 34° z kierunkiem przepływu.

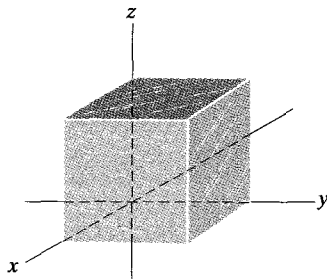
24.3. Strumień pola elektrycznego

2. Długość boku kwadratu przedstawionego na rysunku 24.25 wynosi 3,2 mm. Kwadrat znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $E = 1800 \text{ N/C}$. Linie pola tworzą kąt 35° z normalną do powierzchni kwadratu, jak przedstawiono na rysunku. Przyjmując, że ta normalna jest skierowana „na zewnątrz”, tak jakby powierzchnia stanowiła jedną ścianę pudełka, oblicz strumień elektryczny przez tę powierzchnię.



Rys. 24.25. Zadanie 2

3. Długość krawędzi sześcianu na rysunku 24.26 wynosi 1,40 m. Sześcian znajduje się w obszarze jednorodnego pola elektrycznego i jest ustawiony jak na rysunku. Znajdź strumień elektryczny, przenikający przez prawą ścianę, jeśli natężenie pola elektrycznego w niutonach na kulomb (N/C) wynosi: a) $6\hat{i}$, b) $-2\hat{j}$, c) $-3\hat{i} + 4\hat{k}$. d) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię sześcianu dla każdego z tych pól?



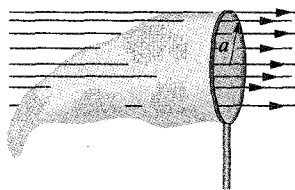
Rys. 24.26. Zadania 3, 7 i 10

24.4. Prawo Gaussa

4. Mamy cztery ładunki punktowe $2q$, q , $-q$ i $-2q$. Jeśli to możliwe opisz, jak powinna być umieszczona zamknięta powierzchnia, otaczająca przynajmniej ładunek $2q$ (i ewentualnie inne ładunki), aby wypadkowy strumień elektryczny przez tę powierzchnię wynosił: a) 0, b) $3q/\epsilon_0$, c) $-2q/\epsilon_0$.

5. Ładunek punktowy o wartości $1,8 \mu\text{C}$ znajduje się w środku sześciennej powierzchni Gaussa. Jaki jest wypadkowy strumień elektryczny przez tę powierzchnię, jeśli długość krawędzi sześcianu wynosi 55 cm?

6. Na rysunku 24.27 siatka na motyle znajduje się w obszarze jednorodnego pola elektrycznego o natężeniu E . Obręcz o promieniu a jest ustawiona prostopadle do kierunku natężenia pola. Oblicz strumień elektryczny przenikający przez siatkę.



Rys. 24.27. Zadanie 6

7. Oblicz wypadkowy strumień elektryczny przez powierzchnię sześcianu z zadania 3 i rysunku 24.26, jeśli natężenie pola elektrycznego wynosi: a) $\vec{E} = 3y\hat{j}$, b) $\vec{E} = -4\hat{i} + (6 + 3y)\hat{j}$. Natężenie pola podane jest w niutonach na kulomb (N/C), a y w metrach (m). c) Jaki ładunek znajduje się wewnątrz sześcianu w obydwu przypadkach?

8. Jeśli włączymy natrysk w zamkniętej łazience, to woda rozpryskująca się na wannie może wypełnić powietrze ujemnie naładowanymi jonami i wytworzyć w powietrzu pole elektryczne o natężeniu do 1000 N/C . Wyobraź sobie łazienkę o wymiarach $2,5 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$. Przyjmij, że przy suficie, podłodze i czterech ścianach natężenie pola elektrycznego jest stałe, skierowane prostopadle do powierzchni i ma wartość 600 N/C . Przyjmij, że te powierzchnie tworzą zamkniętą powierzchnię Gaussa. Jaka jest: a) objętościowa gęstość ładunku ρ , b) liczba nadmiarowych ładunków elementarnych e na metr sześcienny w powietrzu w łazience?

9. Stwierdzono doświadczalnie, że natężenie pola elektrycznego w pewnym obszarze atmosfery ziemskiej jest skierowane pionowo w dół. Na wysokości 300 m natężenie pola ma wartość 60 N/C , a na wysokości 200 m — wartość 100 N/C . Znajdź wypadkowy ładunek w sześcianie, którego długość krawędzi wynosi 100 m, a ściany poziome umieszczono na wysokości 200 i 300 m. Zaniedbaj krzywiznę Ziemi.

10. W każdym punkcie na powierzchni sześcianu z rysunku 24.26 natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dodatnim kierunku osi z . Długość krawędzi sześcianu wynosi 3 m. Na górnej ścianie sześcianu $\vec{E} = -34\hat{k} \text{ N/C}$, a na dolnej ścianie sześcianu $\vec{E} = +20\hat{k} \text{ N/C}$. Określ wypadkowy ładunek zawarty w sześcianie.

11. Ładunek punktowy q znajduje się w jednym z wierzchołków sześcianu o krawędzi a . Jaki strumień elektryczny przenika przez każdą ze ścian sześcianu? (Wskazówka: Zastosuj prawo Gaussa i właściwości symetrii).

24.6. Izolowany przewodnik naładowany

12. Natężenie pola elektrycznego tuż nad powierzchnią naładowanego bębna fotokopiarki ma wartość $E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. Jaka jest gęstość powierzchniowa ładunku na bębnie? Załóż, że bęben jest przewodnikiem.

13. Jednorodnie naładowana przewodząca kula o średnicy 1,2 m ma gęstość powierzchniową ładunku $8,1 \mu\text{C}/\text{m}^2$. a) Znajdź wypadkowy ładunek na kuli. b) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię kuli?

14. Pojazdy kosmiczne przelatujące przez ziemskie pasy promieniowania mogą zbierać dużą liczbę elektronów. Powstały ładunek może uszkodzić elementy elektroniczne i uniemożliwić ich działanie. Załóżmy, że sferyczny metalowy satelita o średnicy 1,3 m zgromadził ładunek $2,4 \mu\text{C}$ w czasie jednego obiegu orbity. a) Znajdź powstałą gęstość powierzchniową ładunku. b) Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego (wytworzonego przez ten ładunek powierzchniowy) tuż na zewnątrz satelity.

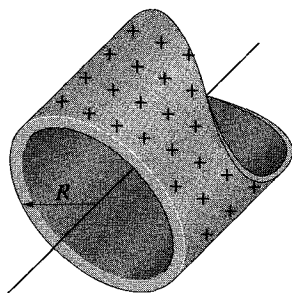
15. Izolowany przewodnik o dowolnym kształcie ma ładunek wypadkowy $+10 \cdot 10^{-6}$ C. Wewnątrz przewodnika jest wnęka, w której znajduje się ładunek punktowy $q = +3 \cdot 10^{-6}$ C. Jaki jest ładunek: a) na powierzchni wneki, b) na zewnętrznej powierzchni przewodnika?

24.7. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa

16. a) Bęben fotokopiarki z zadania 12 ma długość 42 cm i średnicę 12 cm. Oblicz całkowity ładunek znajdujący się na bębnie. b) Wytwórca chce wyprodukować stołową wersję tej fotokopiarki, co wymaga zmniejszenia rozmiarów bębna do długości 28 cm i średnicy 8 cm. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni bębna nie może ulec zmianie. Jaki musi być ładunek na mniejszym bębnie?

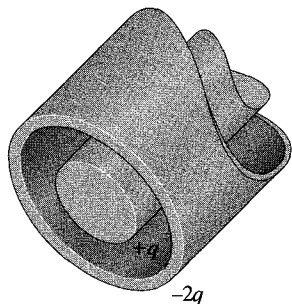
17. Nieskończona naładowana linia prosta wytwarza pole elektryczne o natężeniu $4,5 \cdot 10^4$ N/C, w odległości 2 m. Oblicz liniową gęstość ładunku.

18. Na rysunku 24.28 przedstawiono przekrój długiej metalowej rury o promieniu R i cienkich ściankach, naładowanej powierzchniowo ładunkiem λ , przypadającym na jednostkę długości rury. Wyprowadź wzór na natężenie pola E jako funkcji odległości r od osi rury, rozważając zarówno: a) $r > R$, jak i b) $r < R$. Wykreśl tę zależność dla zakresu od $r = 0$ do $r = 5$ cm zakładając, że $\lambda = 2 \cdot 10^{-8}$ C/m i $R = 3$ cm. (Wskazówka: Zastosuj walcowe powierzchnie Gaussa, współosiowe z metalową rurą).



Rys. 24.28. Zadanie 18

19. Bardzo długi walcowy pręt przewodzący o długości L i całkowitym ładunku $+q$ jest otoczony przewodzącą walcową powłoką (także o długości L), o całkowitym ładunku $-2q$ (rys. 24.29). Korzystając z prawa Gaussa, znajdź: a) natężenie pola elektrycznego w punktach, leżących na zewnątrz przewodzącej powłoki, b) rozkład ładunku na powłoce, c) natężenie pola elektrycznego w obszarze między powłoką i prętem.



Rys. 24.29. Zadanie 19

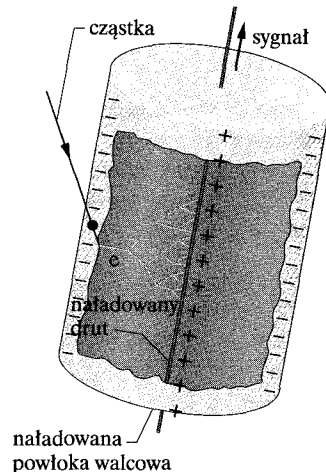
20. Długi prosty drut jest naładowany ujemnie z liniową gęstością ładunku $3,6$ nC/m. Drut ma zostać otoczony cienką nieprzewodzącą powłoką walcową, współosiową z drutem, o zewnętrznym

promieniu $1,5$ cm. Powłoka ma mieć dodatni ładunek na swej zewnętrznej powierzchni, rozłożony z taką gęstością powierzchniową σ , aby natężenie wypadkowego pola elektrycznego na zewnątrz powłoki było równe zero. Oblicz gęstość σ .

21. Dwie naładowane długie współosiowe powierzchnie walcowe mają promienie 3 i 6 cm. Ładunek na jednostkę długości wynosi $5 \cdot 10^{-6}$ C/m na wewnętrznym walcu i $-7 \cdot 10^{-6}$ C/m na zewnętrznym walcu. Znajdź natężenie pola elektrycznego dla radialnej odległości od wspólnej osi: a) $r = 4$ cm, b) $r = 8$ cm.

22. Długi nieprzewodzący walec o promieniu 4 cm jest naładowany niejednorodnie, z objętościową gęstością ładunku ρ , która jest funkcją odległości radialnej r od osi walca, określoną wzorem $\rho = Ar^2$, gdzie $A = 2,5$ $\mu\text{C}/\text{m}^3$. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w odległości: a) 3 cm, b) 5 cm od osi walca?

23. Na rysunku 24.30 przedstawiono licznik Geigera–Müllera, czyli przyrząd używany do wykrywania promieniowania jonizującego (promieniowania powodującego jonizację atomów). Licznik składa się z cienkiego, dodatnio naładowanego drutu, otoczonego przez współosiową przewodzącą powłokę walcową, naładowaną takim samym co do wartości bezwzględnej ładunkiem ujemnym. Wewnątrz walca powstaje więc silne radialne pole elektryczne. Walec zawiera gaz szlachetny pod niskim ciśnieniem. Gdy cząstka promieniowania wpada przez walcową ściankę do licznika, jonizuje kilka atomów gazu. Powstałe elektrony swobodne (oznaczone przez e) są przyciągane do dodatnio naładowanego drutu. Pole elektryczne jest jednak na tyle silne, że między zderzeniami z innymi atomami gazu swobodne elektrony uzyskują energię, wystarczającą do zjonizowania tych atomów. Powstaje więc więcej elektronów swobodnych i proces się powtarza, aż elektrony dotrą do drutu. Powstała „lawina” elektronów jest zbierana przez drut, wytwarzając sygnał, który jest używany do zarejestrowania przejścia wywołującego ją cząstki promieniowania. Przyjmując, że promień drutu wynosi 25 μm , promień powłoki walcowej $1,4$ cm, długość rury 16 cm i natężenie pola elektrycznego przy wewnętrznej ściance powłoki $2,9 \cdot 10^4$ N/C, oblicz całkowity ładunek dodatni w drucie.



Rys. 24.30. Zadanie 23

24. Długi, cienki, nieprzewodzący pręt jest naładowany jednorodnie z gęstością liniową 2 nC/m. Pręt jest otoczony współosiową długą, przewodzącą powłoką walcową (o wewnętrznym promieniu 5 cm i zewnętrznym promieniu 10 cm). Wypadkowy ładunek na przewodniku wynosi zero. a) Jaka jest wartość natężenia

pola elektrycznego w odległości 15 cm od osi pręta? Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku na: b) wewnętrznej, c) zewnętrznej powierzchni przewodnika?

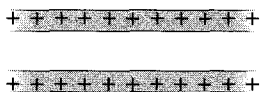
25. Nieskończenie długi walec o promieniu R jest naładowany jednorodnie objętościowo. a) Wykaż, że w odległości r od osi walca (dla $r < R$) mamy:

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0},$$

gdzie ρ jest objętościową gęstością ładunku. b) Wyprowadź wyrażenie dla E , gdy $r > R$.

24.8. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa

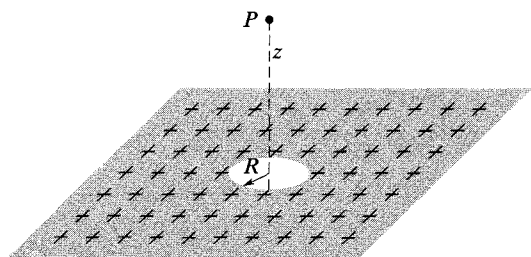
26. Na rysunku 24.31 przedstawiono przekroje przez dwie duże, równoległe, nieprzewodzące płyty z identycznymi rozkładami dodatniego ładunku, z gęstością powierzchniową σ . Jakie jest natężenie pola $\vec{E}$ w punktach: a) nad płytami, b) między nimi, c) poniżej nich?



Rys. 24.31. Zadanie 26

27. Kwadratowa płyta metalowa o boku 8 cm i zaniedbywalnej grubości ma całkowity ładunek $6 \cdot 10^{-6}$ C. a) Oszacuj wartość E natężenia pola elektrycznego tuż nad środkiem płyty (powiedzmy w odległości 0,5 mm) zakładając, że ładunek jest rozłożony jednorodnie na obydwu powierzchniach płyty. b) Oszacuj wartość natężenia pola E w odległości 30 m (dużej w stosunku do rozmiarów płyty) przyjmując, że płyta jest ładunkiem punktowym.

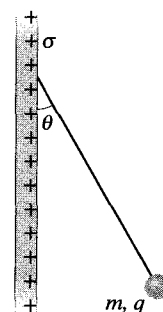
28. Duża, płaska, nieprzewodząca powierzchnia jest naładowana jednorodnie, z gęstością powierzchniową σ . W środku powierzchni wycięto mały okrągły otwór o promieniu R (rys. 24.32). Zaniedbując zakrzywienie linii pola w pobliżu wszystkich krawędzi, oblicz natężenie pola w punkcie P , w odległości z od środka otworu na jego osi. (Wskazówka: Zastosuj wzór (23.26) i zasadę superpozycji).



Rys. 24.32. Zadanie 28

29. Na rysunku 24.33 przedstawiono w przekroju małą nieprzewodzącą kulkę o masie $m = 1$ mg i ładunku $q = 2 \cdot 10^{-8}$ C (roz-

łożonym jednorodnie w całej jej objętości), zawieszoną na izolowanej nici, tworzącej kąt $\theta = 30^\circ$ z pionową, jednorodnie naładowaną nieprzewodzącą płytą. Uwzględniając siłę ciężkości, działającą na kulkę i zakładając, że płyta rozciąga się daleko w kierunku pionowym i poziomym, oblicz gęstość powierzchniową ładunku σ na płycie.



Rys. 24.33. Zadanie 29

30. Dwie duże cienkie płyty metalowe są ustawione równoległe blisko siebie (rys. 24.16c). Na swych wewnętrznych powierzchniach płyty mają nadmiarowe ładunki przeciwnego znaku o gęstości powierzchniowej o wartości $7 \cdot 10^{-22}$ C/m². Płyta naładowana ujemnie jest z lewej strony. Jaka jest wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$: a) na lewo od płyt, b) na prawo od płyt, c) między płytami?

31. W kierunku prostopadłym do dużej metalowej płyty naładowanej ujemnie z gęstością powierzchniową ładunku $2 \cdot 10^{-6}$ C/m² wystrzelono elektron. Jeśli początkowa energia kinetyczna elektronu wynosi 100 eV i jeśli elektron ma się zatrzymać (ze względu na odpychanie elektrostatyczne od płyty) dokładnie w chwili dotarcia do płyty, to w jakiej odległości od płyty powinien zostać on wystrzelony?

32. Dwie duże płyty metalowe, o polu powierzchni 1 m² znajdują się naprzeciw siebie, w odległości 5 cm i mają jednakowe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwne ładunki na swych wewnętrznych powierzchniach. Jeśli wartość E natężenia pola elektrycznego między płytami wynosi 55 N/C, to jaka jest wartość ładunku na każdej płycie? Zaniedbaj efekty krawędziowe.

33*. Płaska warstwa o grubości d jest naładowana jednorodnie z objętościową gęstością ładunku ρ . Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego we wszystkich punktach przestrzeni: a) wewnątrz, b) na zewnątrz warstwy, w funkcji odległości x od płaszczyzny symetrii warstwy.

24.9. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna

34. Strumień elektryczny przenikający przez sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu 10 cm, wytworzony przez znajdujący się w jej środku ładunek punktowy wynosi -750 N·m²/C. a) Jeśli podwoimy promień powierzchni Gaussa, to jak duży będzie strumień elektryczny przez tę powierzchnię? Jaka jest wartość ładunku punkowego?

35. Sfera przewodząca o promieniu 10 cm jest naładowana. Jeśli natężenie pola elektrycznego w odległości 15 cm od środka sfery ma wartość $3 \cdot 10^3$ N/C i jest skierowane radialnie do środka, to jaki jest wypadkowy ładunek sfery?

36. Dwie naładowane współśrodkowe sfery mają promienie 10 cm i 15 cm. Ładunek na wewnętrznej sferze wynosi $4 \cdot 10^{-8}$ C, a na zewnętrznej sferze $2 \cdot 10^{-8}$ C. Znajdź natężenie pola elektrycznego w odległości: a) $r = 12$ cm, b) $r = 20$ cm od środka sfer.

37. Ernest Rutherford napisał w swej pracy z 1911 r.: „Aby mieć jakieś wyobrażenie o siłach potrzebnych do odchylenia cząstki α o duży kąt, rozważmy atom, jako układ złożony z punkowego dodatniego ładunku Ze w jego środku, otoczonego przez ładunek ujemny $-Ze$ jednorodnie rozłożony w kuli o promieniu R . Natężenie pola elektrycznego E [...] w odległości r od środka dla punktu *wewnątrz* atomu [wynosi]:

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right).$$

Sprawdź ten wzór.

38. Wzór (24.11) ($E = \sigma/\epsilon_0$) określa natężenie pola elektrycznego w punktach w pobliżu naładowanej powierzchni przewodzącej. Zastosuj ten wzór do przewodzącej sfery o promieniu r i ładunku q i pokaż, że natężenie pola elektrycznego na zewnątrz sfery jest takie samo, jak natężenie pola ładunku punkowego, umieszczonego w środku sfery.

39. Proton o prędkości $v = 3 \cdot 10^5$ m/s porusza się po orbicie, znajdującej się tuż nad naładowaną sferą o promieniu $r = 1$ cm. Jaki jest ładunek na sferze?

40. Ładunek punktowy $+q$ znajduje się w środku elektrycznie obojętnej, sferycznej przewodzącej powłoki o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym promieniu b . Jaki ładunek występuje na: a) wewnętrznej, b) zewnętrznej powierzchni powłoki? Jakie jest natężenie wypadkowego pola elektrycznego w odległości r od środka powłoki, jeśli: c) $r < a$, d) $b > r > a$, e) $r > b$? Naskicuj linie pola dla tych trzech obszarów. Jakie jest natężenie wypadkowego pola elektrycznego, wytworzonego dla $r > b$ przez: f) ładunek punktowy w środku i ładunek na powierzchni wewnętrznej, g) ładunek na powierzchni zewnętrznej? Na zewnątrz powłoki dodano teraz ładunek punktowy $-q$. Czy ten ładunek punktowy zmieni rozkład ładunku na: h) zewnętrznej, i) wewnętrznej powierzchni? Naskicuj linie pola w obecnej sytuacji. j) Czy na ten drugi ładunek punktowy działa niezerowa siła elektrostatyczna? k) Czy na pierwszy ładunek punktowy działa niezerowa wypadkowa siła elektrostatyczna? l) Czy w tym przypadku została naruszona trzecia zasada dynamiki Newtona?

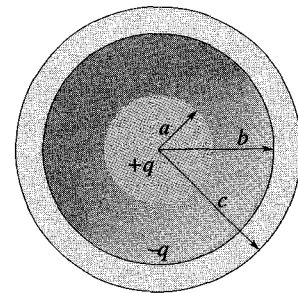
41. Nieprzewodząca kula o promieniu R jest niejednorodnie naładowana z gęstością objętościową $\rho = \rho_s r/R$, gdzie ρ_s jest stałą, a r jest odległością od środka kuli. Pokaż: a) że całkowity ładunek kuli wynosi $Q = \pi \rho_s R^3$, b) że:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^4} r^2$$

określa wartość natężenia pola elektrycznego wewnątrz kuli.

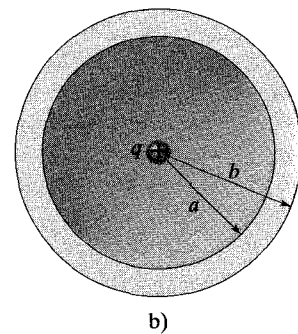
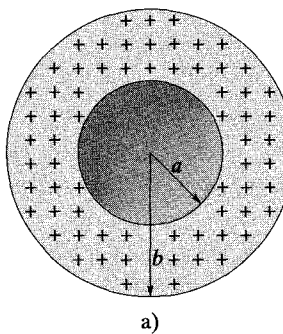
42. Atom wodoru można rozważać jako układ złożony z punkowego protonu o dodatnim ładunku $+e$ w środku atomu i elektronu o ujemnym ładunku $-e$, rozłożonym wokół protonu z gęstością objętościową $\rho = A \exp(-2r/a_0)$, gdzie A jest stałą, $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m jest *promieniem Bohra*, a r jest odległością od środka atomu. a) Korzystając z faktu, że atom wodoru jest elektrycznie obojętny, znajdź A . b) Znajdź następnie natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez atom w odległości (od protonu) równej promieniowi Bohra.

43. Na rysunku 24.34 przedstawiono kulę o promieniu a i ładunku $+q$, naładowaną jednorodnie objętościowo i współśrodkową z nią sferyczną przewodzącą powłokę o wewnętrznym promieniu b i zewnętrznym promieniu c . Ładunek wypadkowy powłoki wynosi $-q$. Znajdź wzory określające natężenie pola elektrycznego w funkcji odległości r od środka: a) wewnątrz kuli ($r < a$), b) między kulą i powłoką ($a < r < b$), c) wewnątrz powłoki ($b < r < c$), d) na zewnątrz powłoki ($r > c$). e) Jakie są ładunki na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki?



Rys. 24.34. Zadanie 43

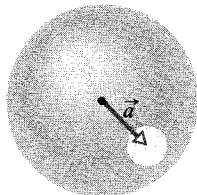
44. Na rysunku 24.35a przedstawiono sferyczną powłokę naładowaną jednorodnie z gęstością objętościową ρ . Wykreśl zależność natężenia E pola, wytworzonego przez powłokę od odległości r od środka powłoki, w zakresie od 0 do 30 cm, przyjmując $\rho = 1 \cdot 10^{-6}$ C/m³, $a = 10$ cm i $b = 20$ cm.



Rys. 24.35. Zadania 44 i 45

45. Na rysunku 24.35b przedstawiono nieprzewodzącą sferyczną powłokę, o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym promieniu b , naładowaną dodatnio z gęstością objętościową $\rho = A/r$ (wewnątrz powłoki), gdzie A jest stałą, a r jest odległością od środka powłoki. Dodatkowo w środku powłoki znajduje się dodatni ładunek punktowy q . Jaka powinna być wartość A , aby pole elektryczne w powłoce ($a \leq r \leq b$) było jednorodne? (Wskazówka: Stała A zależy od a , lecz nie zależy od b).

46*. Nieprzewodząca kula jest naładowana jednorodnie z gęstością objętościową ρ . Niech $\vec{r}$ będzie wektorem od środka kuli do punktu P wewnątrz kuli. a) Pokaż, że natężenie pola elektrycznego w punkcie P jest dane wzorem $\vec{E} = \rho\vec{r}/(3\epsilon_0)$. (Zauważ, że wynik jest niezależny od promienia kuli). b) W kuli wycięto następnie kulistą wnękę, jak przedstawiono na rysunku 24.36. Korzystając z zasady superpozycji pokaż, że natężenie pola elektrycznego we wszystkich punktach wnęki jest jednakowe i równe $\vec{E} = \rho\vec{a}/(3\epsilon_0)$, gdzie $\vec{a}$ jest wektorem położenia środka wnęki względem środka kuli. (Zauważ, że ten wynik jest niezależny od promienia kuli i promienia wnęki).



Rys. 24.36. Zadanie 46

47*. Sferycznie symetryczny, ale niejednorodny, objętościowy rozkład ładunku powoduje powstawanie pola elektrycznego o natężeniu $E = Kr^4$, skierowanego radialnie od środka sfery, gdzie r jest odległością od środka sfery i K jest stałą. Jaka jest gęstość objętościowa ρ tak rozłożonego ładunku?

Zadanie dodatkowe

48. *Tajemnica proszku czekoladowego.* Eksplozje, wywołane przez wyładowania elektrostatyczne (iskry), stanowią poważne

niebezpieczeństwo w urządzeniach przeładowujących ziarno lub proszek. Eksplozja taka wystąpiła w proszku czekoladowym, w fabryce herbatników, w latach siedemdziesiątych XX wieku. W fabryce tej robotnicy zwykle opróżniali dostarczone worki z proszkiem do skrzyni ładunkowej, z której proszek był wdmuchiwany przez uziemione rury z polichloru winylu do silosa. Gdzieś na tej drodze wystąpiły dwa warunki konieczne, aby nastąpiła eksplozja: 1) Wartość natężenia pola elektrycznego wyniosła $3 \cdot 10^6$ N/C lub więcej, tak że nastąpiło przebicie elektryczne i iskrzenie. 2) Energia iskry wyniosła 150 mJ lub więcej, tak że doszło do eksplozji proszku. Sprawdź, czy warunek (1) mógł być spełniony przy przepływie proszku przez rury z polichloru winylu.

Założ, że strumień *ujemnie* naładowanych ziarenek proszku jest wdmuchiwany przez walcową rurę o promieniu $R = 5$ cm. Przyjmij, że proszek i jego ładunek są rozłożone jednorodnie w rurze z gęstością objętościową ładunku ρ . a) Korzystając z prawa Gaussa, znajdź wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w rurze, jako funkcję odległości r od osi rury. b) Czy wartość natężenia maleje, czy rośnie wraz ze wzrostem r ? c) Czy natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ jest skierowane radialnie do osi, czy od osi? d) Przyjmując gęstość objętościową ładunku $\rho = 1,1 \cdot 10^{-3}$ C/m³ (typową w fabryce herbatników), znajdź maksymalną wartość natężenia pola elektrycznego i określ, gdzie występuje ta maksymalna wartość. e) Czy iskrzenie mogło wystąpić, a jeśli tak, to gdzie? (Dalszy ciąg tej historii poznasz w zadaniu 57 w rozdziale 25).