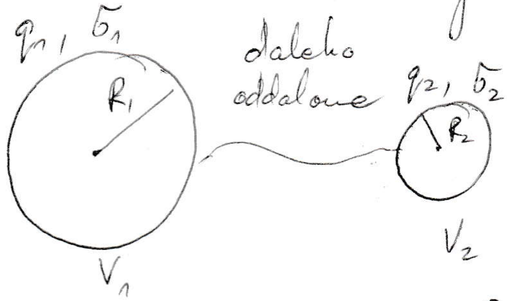
Przykład: Kula naładowana i związek gęstości ładunku z krzywizną

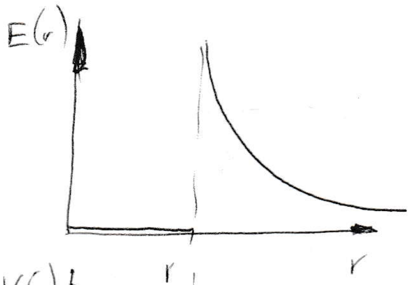


$$V_1 = V_2$$

$$\cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q_1}{R_1} = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q_2}{R_2}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \; ; \; \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

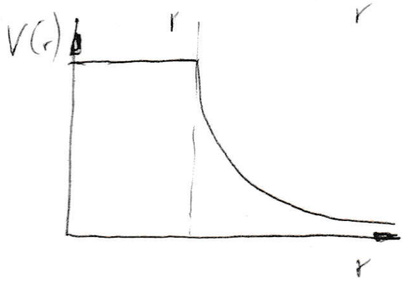
$$\frac{\sigma_1 \cancel{4\pi} R_1^{\cancel{2}}}{\sigma_2 \cancel{4\pi} R_2^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{R_1}}{\cancel{R_2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$



$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\boxed{\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 = \text{const}}$$



im większy promień (mniejsza krzywizna) tym mniejsza gęstość ładunkowa.

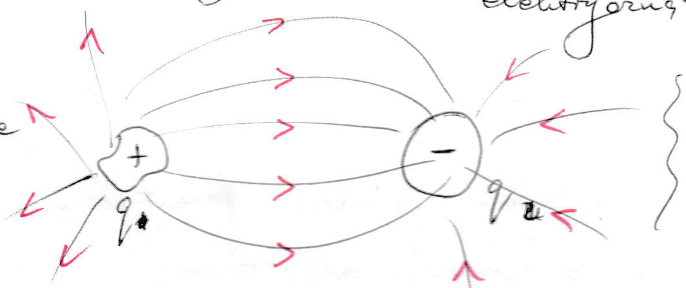
Kondensatory i dielektryki (jak magazynować energię elektryczną?)

$$\boxed{q = CV}$$

dwa przewodniki odizolowane

różnica potencjałów

$$\boxed{C = \frac{q}{V}} \qquad \left[1F = \frac{1C}{1V}\right]$$

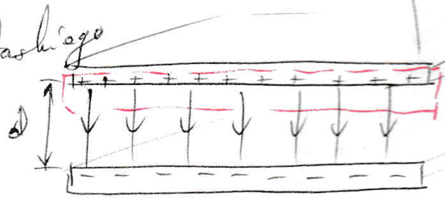


analogia

$$n = \frac{V}{RT} p$$

$$q = C \; V$$

- pojemność kondensatora płaskiego



$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \cancel{E} A}{\cancel{E} d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

$$\varepsilon_0 E A = q$$

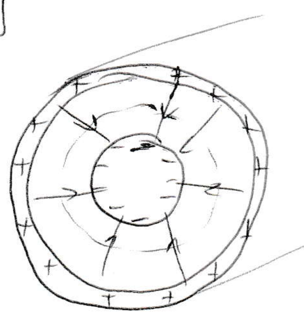
$$V = Ed$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- pojemność kond. cylindrycznego

$$\varepsilon_0 E \, 2\pi r l = q$$

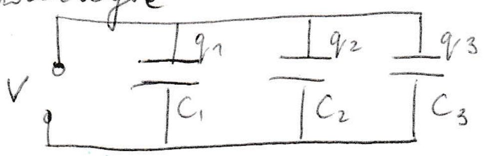
$$V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \, dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \frac{dr}{r}$$



$$\boxed{C = \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}}$$

Łączenie kondensatorów $\quad C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C}$

równoległe



$V_1 = V_2 = V_3 = V$ $\qquad$ $q = q_1 + q_2 + q_3$

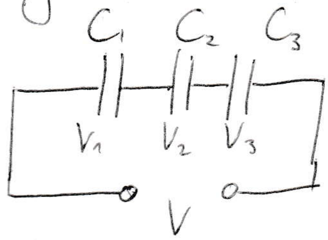
$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_3}{C_3} = \frac{q}{C}$$

$$\cancel{\frac{q}{C} = \frac{q_1+q_2+q_3}{C} = \frac{q_1}{C}}$$

$$CV = C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 = (C_1+C_2+C_3)V$$

$$\boxed{C = \sum_i C_i}$$

szeregowe



$V = V_1 + V_2 + V_3$ $\qquad$ $q_1 = q_2 = q_3 = q$

$$\frac{q}{C} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

Energia pola elektrycznego $\quad dW = V\,dq = \frac{q'}{C}\,dq'$

$$(U =)\ W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}\,dq' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \{q = CV\} = \frac{1}{2}\frac{C^2V^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2}CV^2}$$

gęstość energii $\quad u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 A V^2}{A d^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

wniosek: w dowolnym punkcie przestrzeni o wielkości pola $\vec{E}$ jest zmagazynowana energia $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ na jedn. objętości.

Przykład: izolowana kula przewodząca (q, R)

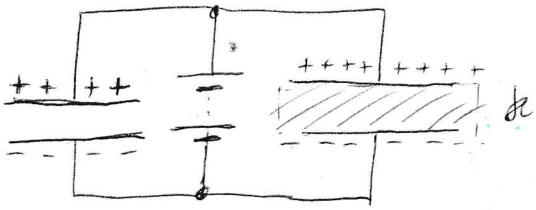
$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ $\qquad$ $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{q^2}{r^4}$

$$dU = 4\pi r^2 dr\, u = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow U = \int dU = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Kondensator płaski z dielektrykiem

M. Faraday (1837) badanie wpływu dielektryka na pojemność kond.

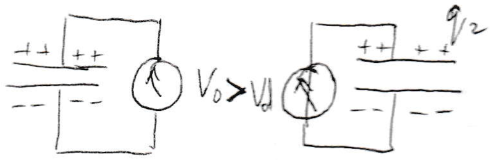
materiał	stała dielektr.	wytrzymałość przebicia $\left[\frac{kV}{mm}\right]$
próżnia	1.00000	
powietrze	1.00054	0.8
woda	78	
mika	5.4	160
papier	3.5	
kwarc	3.8	
szkło	4.5	
teflon	2.1	60
TiO_2	100	6



dielektryk powoduje wzrost pojemności

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d}}$$

lub



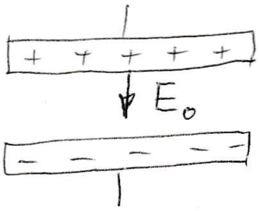
$$\boxed{V_d = \frac{V_0}{\varepsilon_r}}$$

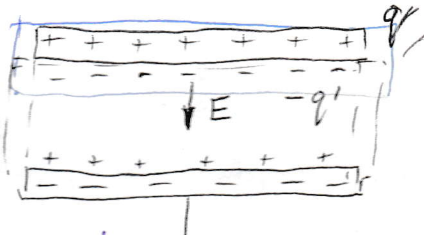
dla dowolnego kondensatora: $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 L$ ← czynnik geom.

wzrost energii wewnętrz.

$$\boxed{u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2}$$

prawo Gaussa





pow. Gaussa

mniejsze pole niż bez dielektr.!

$$\boxed{\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E_0 A = q}$$

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E A = q - q'}$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A}$$

q – ładunek swobodny

q' – ładunek powierzchniowy

$$\frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V_d} = \varepsilon \Rightarrow E = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

$$\frac{q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow q' = q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \;!$$

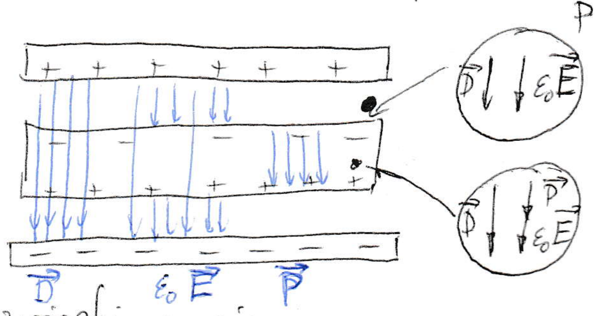
$$\boxed{\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = q}$$

↑ ładunek "związany"

Trzy wektory elektryczne

$$E = \frac{V}{d} = \frac{q}{A\varepsilon_0}$$

$$P = \frac{q'}{A}$$ (polaryzacja elektryczna)



$$\frac{q}{A} = \varepsilon_0 \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A} + \frac{q'}{A}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

indukcja elektr. (ład. swobodny) — natężenie (całk. ład.) — polaryzacja (ład. polaryzacji)

związki empiryczne

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D} &= \kappa \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{P} &= \varepsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}\end{aligned}}$$

$\kappa = 1 \Rightarrow \vec{P} = 0$

związki empiryczne nie zawsze słuszne!

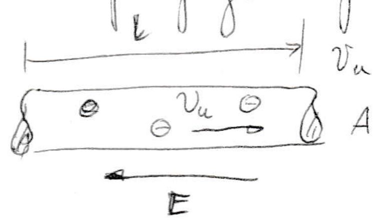
prawo Gaussa

$$\boxed{\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q}$$

Natężenie i opór prądu elektr.

$$\boxed{i = \frac{q}{t}} \qquad \left[1\,A = \frac{1\,C}{1\,s}\right] \qquad \boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$

kierunek przepływu prądu tak, jakby nośnikami były ładunki dodatnie



$$j = \frac{i}{A}$$ gęstość prądu

$$\boxed{i = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}}$$

$$t = \frac{L}{v_u} \qquad q = (nALe)$$ koncentracja

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nA\cancel{L}ev_u}{\cancel{L}} = nAev_u$$

$$v_u = \frac{i}{nAe} = \frac{j}{ne}$$

$$n \sim 8.4 \times 10^{22} \frac{\text{elekt}}{\text{cm}^3}$$

$$v_u(\text{Cu}) \sim 3{,}6 \times 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \qquad j_{Cu} = 480 \frac{A}{\text{cm}^2} \qquad j_{Al} = 198 \frac{A}{\text{cm}^2}$$