

28 Obwody elektryczne

W rzekach Ameryki Południowej żyje węgorz elektryczny (*Electrophorus*), który poluje na ryby, zabijając je impulsami prądu. Węgorz ten wytwarza różnicę potencjałów o wartości kilkuset woltów wzdłuż swej długości; natężenie prądu w otaczającej go wodzie, w obszarze od głowy węgorza do ogona, może sięgać jednego ampera. Jeśli, pływając, otarłbyś się o tego węgorza, to (po przyjściu do siebie po bardzo bolesnym wstrząsie) mógłbyś zadać sobie pytanie:

Jak to stworzenie potrafi wytworzyć tak duży prąd, nie porażając siebie?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



28.1. „Pompowanie” ładunków

Jeśli chcemy spowodować przepływ nośników ładunku przez opornik, to musimy wytworzyć różnicę potencjałów między końcami opornika. Jednym ze sposobów jest podłączenie każdego z końców opornika do okładek naładowanego kondensatora. Kłopot przy takim rozwiązaniu polega na tym, że przepływ ładunku powoduje rozładowanie kondensatora i doprowadza szybko okładki do tego samego potencjału. Gdy do tego dochodzi, znika pole elektryczne w oporniku i ustaje przepływ ładunku.

Aby wytworzyć stały przepływ ładunku, potrzebujemy „pompy ładunku” — urządzenia, które wykonując pracę nad nośnikami ładunku, utrzymuje różnicę potencjałów między parą swych zacisków. Urządzenie takie nazywamy **źródłem siły elektromotorycznej (źródłem SEM)**; powiedzenie, że źródło dostarcza **siły elektromotorycznej $\mathcal{E}$** , oznacza, że wykonuje ono pracę nad nośnikami ładunku. Określenie *siła elektromotoryczna*, czy w skrócie *SEM*, wprowadzono, zanim uczeni dokładnie zrozumieli działanie źródła siły elektromotorycznej.

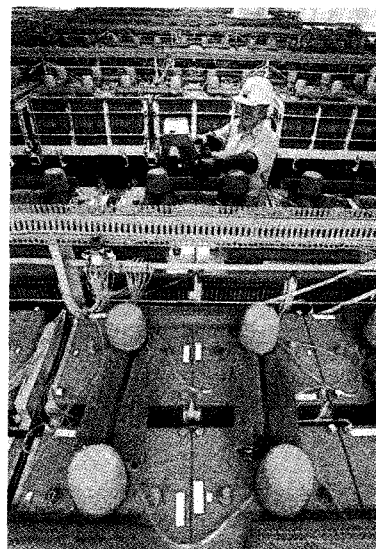
W rozdziale 27 omawialiśmy ruch nośników ładunku wzdłuż obwodu pod wpływem pola elektrycznego wytworzonego w obwodzie — pole wytwarza siły, które wprawiają w ruch nośniki ładunku. W tym rozdziale zajmiemy się innym podejściem: omówimy ruch nośników ładunku przy zastosowaniu pojęcia energii — źródło SEM wykonując pracę, dostarcza ładunkom energii.

Powszechnie stosowanym źródłem SEM jest *ogniwo elektryczne (bateria elektryczna)*, używane do zasilania wielu różnych urządzeń, od zegarków ręcznych do łodzi podwodnych. Źródłem SEM, które najbardziej wpływa na nasze życie codzienne, jest *prądnica elektryczna*, która za pośrednictwem połączeń elektrycznych z elektrownią wytwarza różnicę potencjałów w naszych domach czy miejscach pracy. Źródła SEM zwane *ogniwami słonecznymi*, znane od dawna w postaci paneli (podobnych do skrzydeł) na statkach kosmicznych pojawiają się także w naszym otoczeniu. Mniej znanymi źródłami SEM są *ogniwa paliwowe*, które zasilają statki kosmiczne, i *termoogniwa*, które dostarczają pokładowej energii elektrycznej statkom kosmicznym, stacjom badawczym na Antarktydzie i gdzie indziej. Źródło SEM nie musi być przyrządem — układy biologiczne, od węgorzy elektrycznych i istot ludzkich po rośliny, mają fizjologiczne źródła SEM.

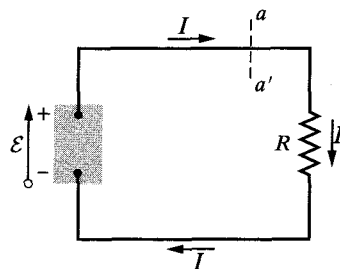
Chociaż wymienione źródła SEM różnią się zasadą działania, to wszystkie spełniają tę samą podstawową funkcję — wykonują pracę nad nośnikami ładunku i wobec tego utrzymują różnicę potencjałów między swymi zaciskami (biegunami).

28.2. Praca, energia i SEM

Na rysunku 28.1 przedstawiono źródło SEM (np. ogniwo), jako część prostego obwodu, zawierającego dodatkowo pojedynczy opornik o oporze R (symbolem oporu i opornika jest $\text{---}\text{---}\text{---}$). Jeden zacisk źródła SEM (zwany biegunem dodatnim i oznaczany zwykle przez $+$) ma większy potencjał niż drugi zacisk (zwany biegunem ujemnym i oznaczanym przez $-$). SEM źródła możemy przedstawić,



Największa na świecie bateria, znajdująca się w Chino w Kalifornii, może dostarczyć mocy 10 MW. Baterii tej używa się podczas szczytu energetycznego w obwodzie energetycznym, obsługiwanym przez zakłady Southern California Edison. Bateria wykonuje pracę nad nośnikami ładunku, więc jest źródłem SEM



Rys. 28.1. Prosty obwód elektryczny, w którym źródło SEM $\mathcal{E}$ wykonuje pracę nad nośnikami ładunku i utrzymuje stały prąd o natężeniu I w oporniku o oporze R

stosując strzałkę skierowaną od bieguna ujemnego do bieguna dodatniego (jak na rysunku 28.1). Małe kółko na początku strzałki odróżnia ją od strzałek, wskazujących kierunek przepływu prądu.

Gdy źródło SEM nie jest włączone w obwód, jego wewnętrzne procesy chemiczne nie powodują w nim żadnego wypadkowego przepływu nośników ładunku. Gdy jednak jest włączone w obwód, jak na rysunku 28.1, wewnętrzne procesy chemiczne powodują w nim wypadkowy przepływ dodatnich nośników ładunku, od ujemnego do dodatniego bieguna, w kierunku strzałki SEM. Ten przepływ jest częścią prądu, powstającego wzdłuż obwodu i płynącego w tym samym kierunku (zgodnie z ruchem wskazówek zegara na rysunku 28.1).

Wewnątrz źródła SEM dodatnie nośniki ładunku przemieszczają się z obszaru małego potencjału i stąd małej elektrycznej energii potencjalnej (przy biegunie ujemnym) do obszaru o większym potencjale elektrycznym i większej elektrycznej energii potencjalnej (przy biegunie dodatnim). Kierunek tego ruchu jest dokładnie przeciwny do kierunku, w jakim natężenie pola elektrycznego między biegunami (skierowane od bieguna dodatniego do bieguna ujemnego) powodowałoby przepływ nośników ładunku.

W źródle SEM musi więc istnieć pewne źródło energii, wykonujące pracę nad ładunkami, przez wymuszenie ich odpowiedniego ruchu. Źródło energii może być chemiczne, jak w baterii czy ogniwie paliwowym. Może wykorzystywać siły mechaniczne, jak w prądnicy elektrycznej. Różnice temperatury mogą także dostarczyć energii, jak w termooogniwie. Może też jej dostarczyć Słońce, jak w ogniwie słonecznym.

Przeanalizujemy obwód z rysunku 28.1, z punktu widzenia pracy i przekazu energii. W dowolnym przedziale czasu dt ładunek dq przechodzi przez dowolny przekrój poprzeczny, np. aa' tego obwodu. Ta sama ilość ładunku musi wejść do źródła SEM przy biegunie o mniejszym potencjale i wyjść przy biegunie o większym potencjale. Źródło musi wykonać pracę dW nad ładunkiem, aby zmusić go do takiego ruchu. Siłę elektromotoryczną źródła SEM definiujemy, korzystając z tej pracy:

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} \quad (\text{definicja SEM}). \quad (28.1)$$

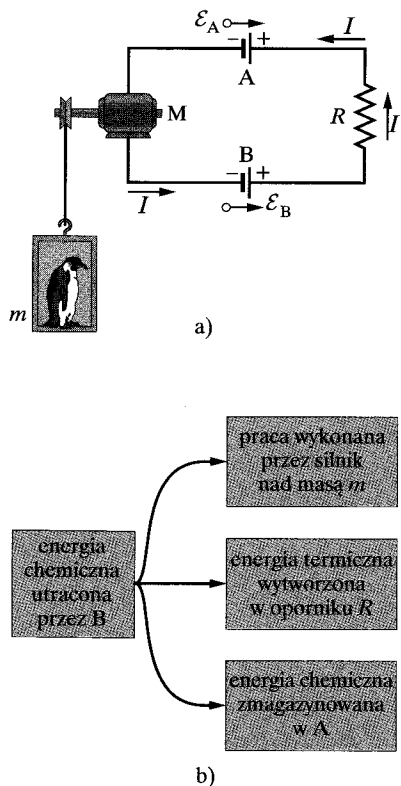
Można to wyrazić następująco: siła elektromotoryczna źródła SEM jest pracą, przypadającą na jednostkę ładunku, jaką wykonuje źródło, przenosząc ładunek z bieguna o mniejszym potencjale, do bieguna o większym potencjale. Jednostką siły elektromotorycznej w układzie SI jest dżul na kulomb; w rozdziale 25 jednostkę tę zdefiniowaliśmy jako *wolt* (V).

Doskonałym źródłem SEM jest źródło, które nie wykazuje żadnego oporu wewnętrznego podczas ruchu ładunku przez ogniwo, od bieguna do bieguna. Różnica potencjałów między biegunami doskonałego źródła SEM jest równa SEM źródła, na przykład doskonała bateria o SEM 12 V ma zawsze między biegunami różnicę potencjałów 12 V.

Rzeczywiste źródło SEM, takie jak dowolna rzeczywista bateria, wykazuje wewnętrzny opór podczas ruchu ładunku przez ogniwo. Gdy rzeczywiste źródło

SEM nie jest włączone w obwód, a zatem nie płynie przez nie prąd, wtedy różnica potencjałów między biegunami baterii jest równa jej SEM. Gdy jednak przez źródło płynie prąd, różnica potencjałów między jej biegunami różni się od jej SEM. Takie rzeczywiste baterie omówimy w paragrafie 28.4.

Jeśli źródło SEM jest włączone w obwód, to przekazuje ono energię przechodzącą przez nie nośnikom ładunku. Ta energia może zostać potem przekazana przez nośniki ładunku innym elementom obwodu, na przykład może wywołać świecenie żarówki. Na rysunku 28.2a przedstawiono obwód, zawierający dwie doskonałe odnawialne baterie (akumulatory) A i B, opornik o oporze R i silnik elektryczny M, który może podnieść jakieś ciało, korzystając z energii, jaką otrzymuje od nośników ładunku w obwodzie. Zauważ, że baterie są połączone tak, że dążą do wysyłania ładunków wzdłuż obwodu w przeciwnych kierunkach. Rzeczywisty kierunek prądu w obwodzie jest określony przez baterię o większej SEM, którą jest bateria B, tak że energia chemiczna w baterii B maleje, gdy energia jest przekazywana przechodzącą przez nią nośnikom ładunku. Jednak energia chemiczna w baterii A wzrasta, ponieważ prąd jest skierowany od dodatniego bieguna do ujemnego bieguna. Dlatego też bateria B ładuje baterię A. Bateria B dostarcza także energii silnikowi M i energii ulegającej rozproszeniu (zamianie na energię termiczną) w oporniku o oporze R . Na rysunku 28.2b przedstawiono wszystkie trzy procesy przekazywania energii z baterii B; każdy z tych procesów obniża energię chemiczną tej baterii.



Rys. 28.2. a) W obwodzie $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$, a więc kierunek prądu jest wyznaczony przez źródło B. b) Przemiany energii w obwodzie przy założeniu, że w silniku nie wydzielą się energia termiczna

28.3. Obliczanie natężenia prądu w obwodzie o jednym oczku

Omówimy teraz dwa równoważne sposoby obliczania natężenia prądu w prostym obwodzie o jednym oczku z rysunku 28.3; pierwsza metoda oparta jest na rozważeniu zasady zachowania energii, a druga na pojęciu potencjału. Obwód składa się z doskonałej baterii B o SEM $\mathcal{E}$, opornika o oporze R i dwóch łączących je przewodów. (Jeśli nie powiedziano inaczej, zakładamy, że przewody w obwodach mają znikomo mały opór. Ich funkcją jest więc tylko zapewnienie dróg, wzdłuż których mogą się poruszać nośniki ładunku).

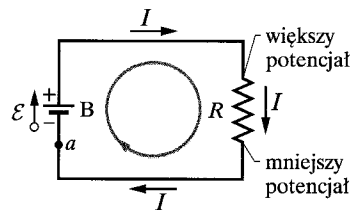
Metoda energetyczna

Zgodnie ze wzorem (27.22) ($P = I^2 R$), w przedziale czasu dt w oporniku z rysunku 28.3 energia $I^2 R$ zamienia się na energię termiczną. (Zakładamy, że przewody mają znikomo mały opór, a więc nie występuje w nich rozpraszanie energii). W tym samym czasie ładunek o wartości $dq = Idt$ przepłynie przez baterię B i praca, wykonana przez baterię nad tym ładunkiem wynosi zgodnie ze wzorem (28.1):

$$dW = \mathcal{E}dq = \mathcal{E}Idt.$$

Z zasady zachowania energii wynika, że praca wykonana przez (doskonałą) baterię musi być równa energii termicznej wytworzonej w oporniku:

$$\mathcal{E}Idt = I^2 Rdt.$$



Rys. 28.3. Obwód o jednym oczku, w którym opornik o oporze R połączony jest ze źródłem B o SEM równej $\mathcal{E}$. Prąd ma takie samo natężenie I wzdłuż całego obwodu

Otrzymujemy stąd:

$$\mathcal{E} = IR.$$

SEM $\mathcal{E}$ jest energią, przypadającą na jednostkę ładunku, przekazaną przez baterię poruszającym się ładunkom. Wielkość IR jest energią przypadającą na jednostkę ładunku, przekazaną przez poruszające się ładunki na rzecz energii wewnętrznej w oporniku. Wzór ten oznacza więc, że energia na jednostkę ładunku przekazana poruszającym się ładunkom jest równa energii na jednostkę ładunku, przekazanej przez te ładunki. Wyznaczając I , otrzymujemy:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (28.2)$$

Analiza potencjałów

Założmy, że wychodząc z jakiegoś punktu obwodu z rysunku 28.3 przesuwamy się w myśli wzdłuż obwodu w dowolnym kierunku, dodając algebraicznie napotymane różnice potencjałów. Gdy powrócimy do punktu wyjściowego, musimy powrócić także do wyjściowego potencjału. Sformułujemy najpierw ten wniosek w postaci prawa, które jest słuszne nie tylko dla obwodów o jednym oczku, jak na rysunku 28.3, ale także dla dowolnego pełnego oczka w obwodzie z wieloma oczkami, jakie będziemy omawiać w paragrafie 28.6:

► **Drugie prawo Kirchhoffa:** Algebraiczna suma zmian potencjału napotykanym przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zeru.

Nazwa tego prawa pochodzi od nazwiska niemieckiego fizyka Gustava Roberta Kirchhoffa. Prawo to jest równoważne stwierdzeniu, że każdy punkt na zboczu góry ma tylko jedną wartość wysokości nad poziomem morza. Jeśli wyjdziemy z jakiegoś punktu i powrócimy do niego po obejściu góry, to algebraiczna suma zmian pokonywanych wysokości musi być równa zeru.

Zacznijmy na rys. 28.3 od punktu a o potencjale V_a i przejdźmy w myśli wzdłuż obwodu, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zwracając uwagę na napotymane zmiany potencjału. Nasz punkt startowy odpowiada małemu potencjałowi ujemnego bieguna baterii. Bateria jest doskonała, a więc różnica potencjałów między jej biegunami wynosi $\mathcal{E}$. Gdy przejdziemy przez baterię do bieguna dodatniego (o większym potencjale), wówczas zmiana potencjału wyniesie $+\mathcal{E}$.

Idąc wzdłuż przewodu do górnego końca opornika, nie napotykamy żadnej zmiany potencjału, ponieważ przewód ma znikomo mały opór; ma on zatem ten sam potencjał, co dodatni biegun baterii i górny koniec opornika. Gdy przejdziemy przez opornik, potencjał ulegnie zmianie zgodnie ze wzorem (27.8) (który możemy zapisać w postaci $U = IR$). Co więcej, potencjał musi zmaleć, ponieważ poruszamy się od końca opornika o większym potencjale. Zmiana potencjału wynosi więc $-IR$.

Powracamy do punktu a , przesuwając się wzdłuż dolnego przewodu. Przewód ten ma także znikomo mały opór, a więc nie napotkamy żadnej zmiany potencjału.

Po dotarciu do punktu a napotykamy znów potencjał V_a . Okrążyliśmy pełne oczko, a więc początkowy potencjał, po uwzględnieniu zmian potencjału wzdłuż drogi, musi być równy potencjałowi końcowemu, czyli:

$$V_a + \mathcal{E} - IR = V_a.$$

Wartość V_a redukuje się w tym równaniu i otrzymujemy:

$$\mathcal{E} - IR = 0.$$

Wyznaczając z tego wzoru I , otrzymujemy ten sam wynik $I = \mathcal{E}/R$, jak przy zastosowaniu metody energetycznej (wzór (28.2)).

Jeśli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do pełnego przejścia wzdłuż oczka w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to otrzymamy:

$$-\mathcal{E} + IR = 0$$

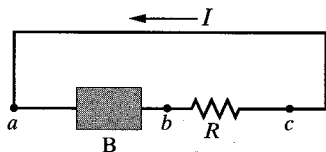
i ponownie znajdujemy, że $I = \mathcal{E}/R$. Drugie prawo Kirchhoffa możemy stosować przy obchodzeniu oczka w dowolnym kierunku.

W celu przygotowania się do obwodów bardziej złożonych niż na rysunku 28.3, wypiszmy dwie reguły znajdowania różnic potencjałów napotykanymi przy obchodzeniu obwodu:

➤ **Reguła oporu:** Gdy przemieszczamy się (w myśli) wzdłuż opornika w kierunku przepływu prądu, zmiana potencjału wynosi $-IR$, przy ruchu w przeciwną stronę wynosi $+IR$.

➤ **Reguła SEM:** W doskonałym źródle SEM zmiana potencjału wynosi $+\mathcal{E}$, gdy poruszamy się (w myśli) zgodnie z kierunkiem strzałki SEM, a przy ruchu w przeciwną stronę wynosi $-\mathcal{E}$.

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku zilustrowano przepływ prądu o natężeniu I w obwodzie o jednym oczku, ze źródłem B i opornikiem o oporze R (oraz przewodem o znikomo małym oporze). a) Czy strzałkę SEM w baterii B trzeba narysować w lewo, czy w prawo? Uszereguj wartości: b) natężenia prądu, c) potencjału elektrycznego, d) elektrycznej energii potencjalnej nośników ładunku, w punktach a , b i c zaczynając od największych.

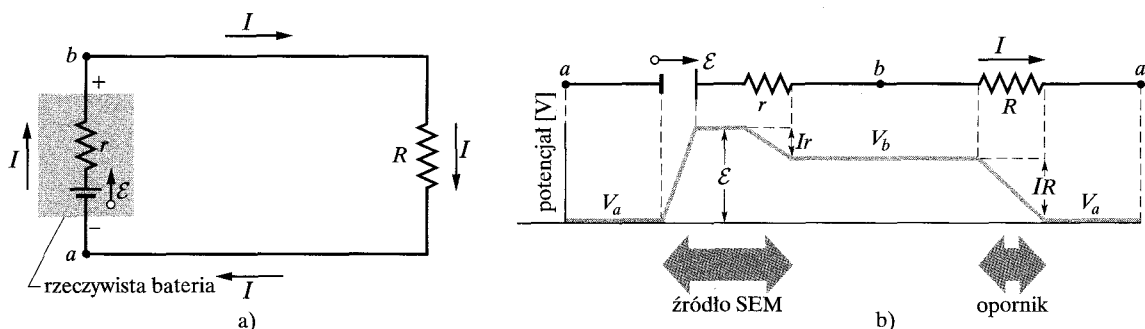


28.4. Inne obwody o jednym oczku

W tym paragrafie uzupełnimy prosty obwód z rysunku 28.3 na dwa sposoby.

Opór wewnętrzny

Na rysunku 28.4a przedstawiono rzeczywistą baterię o oporze wewnętrznym r , połączoną przewodnikami z opornikiem elektrycznym o oporze R . Wewnętrzny opór baterii jest oporem elektrycznym jej elementów i nieodłączną cechą baterii. Na rysunku 28.4a narysowaliśmy jednak baterię tak, jakby można było podzielić ją na doskonałe źródło o SEM równej $\mathcal{E}$ i na opornik o oporze r . Kolejność, w której te symbole są narysowane, nie odgrywa roli.



Rys. 28.4. a) Obwód o jednym oczku, zawierający rzeczywiste źródło o oporze wewnętrznym r i SEM równej $\mathcal{E}$. b) Ten sam obwód przedstawiony jako linia. Na wykresie przedstawiono potencjały, jakie napotykamy obchodząc obwód w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i rozpoczynając od punktu a . Potencjałowi V_a przypisaliśmy umownie wartość zero, a pozostałe potencjały w obwodzie zostały narysowane względem V_a

Jeśli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa obchodząc obwód w kierunku ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu a , to otrzymamy *zmiany* potencjału:

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0, \quad (28.3)$$

skąd dla natężenia prądu otrzymujemy:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (28.4)$$

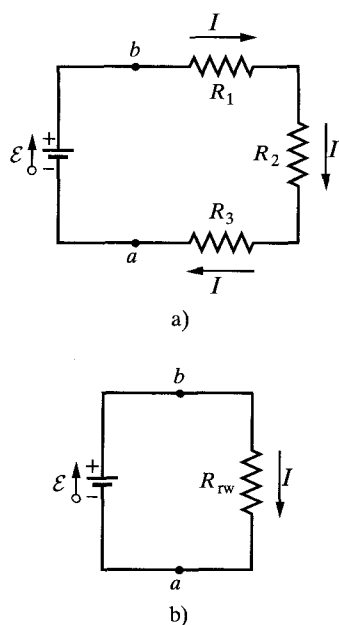
Zauważ, że wzór ten redukuje się do wzoru (28.2) dla źródła doskonałego, gdy $r = 0$.

Na rysunku 28.4b przedstawiono graficznie zmiany potencjału elektrycznego wzdłuż obwodu. (Aby lepiej powiązać rysunek 28.4b z *zamkniętym obwodem* z rysunku 28.4a, możemy w myśli nawinąć wykres na walec tak, aby punkt a z lewej strony pokrył się z punktem a z prawej strony). Zwróć uwagę, że ruch wzdłuż obwodu przypomina spacer po górze i powrót do punktu wyjściowego, czyli zarazem do początkowej wysokości.

W tej książce, jeśli tego wyraźnie nie podkreślimy, np. przez zaznaczenie oporu wewnętrznego na schemacie obwodu, będziemy zawsze przyjmować, że źródło jest doskonałe. W rzeczywistości źródła są zawsze niedoskonałe i mają opór wewnętrzny.

Oporniki połączone szeregowo

Na rysunku 28.5a przedstawiono trzy oporniki połączone **szeregowo** i podłączone do doskonałego źródła o SEM $\mathcal{E}$. Określenie połączenia ma mało wspólnego z tym, jak narysowane są opory. W rzeczywistości „szeregowo” oznacza, że oporniki ustawione jeden za drugim są połączone przewodnikami, a różnica potencjałów U jest przyłożona do dwóch końców szeregu. Na rysunku 28.5a połączono opory ustawione jeden za drugim między punktami a i b , a różnica potencjałów między punktami a i b jest utrzymywana przez źródło. Różnice potencjałów, jakie istnieją na oporach w szeregu, wytwarzają w nich prądy o jednakowym natężeniu I .



Rys. 28.5. a) Trzy oporniki połączone szeregowo między punktami a i b . b) Równoważny obwód z trzema opornikami zastąpionymi przez opornik o równoważnym oporze R_{rw}

➤ Jeśli różnica potencjałów U jest przyłożona do oporników połączonych szeregowo, to przez oporniki płyną prądy o jednakowym natężeniu I . Suma różnic potencjałów na opornikach jest równa przyłożonej różnicy potencjałów.

Zauważ, że ładunek w opornikach połączonych szeregowo może poruszać się tylko jedną drogą. Jeśli są dodatkowe drogi, tak że prądy w różnych opornikach mają różne natężenia, to oporniki nie są połączone szeregowo.

➤ Oporniki połączone szeregowo można zastąpić równoważnym opornikiem R_{rw} , w którym płynie prąd o takim samym natężeniu I przy takiej samej całkowitej różnicy potencjałów U , jak na rozważanych opornikach.

Na rysunku 28.5b przedstawiono obwód równoważny, w którym opornik R_{rw} zastępuje trzy oporniki z rysunku 28.5a.

Aby wyprowadzić wyrażenie na R_{rw} z rys. 28.5b, zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do obydwu obwodów. Na rysunku 28.5a, zaczynając od punktu a i przechodząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół obwodu, otrzymujemy:

$$\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_3 = 0,$$

czyli

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (28.5)$$

Na rysunku 28.5b w obwodzie z trzema opornikami zastąpionymi jednym równoważnym opornikiem R_{rw} mamy:

$$\mathcal{E} - IR_{rw} = 0,$$

czyli

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{rw}}. \quad (28.6)$$

Porównanie wzorów (28.5) i (28.6) prowadzi do wzoru:

$$R_{rw} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Rozszerzenie na n oporów jest proste i ma postać:

$$R_{rw} = \sum_{j=1}^n R_j \quad (n \text{ oporników połączonych szeregowo}). \quad (28.7)$$

Zauważ, że gdy oporniki są połączone szeregowo, równoważny opór jest większy od oporu dowolnego opornika w szeregu.

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku 28.5a mamy $R_1 > R_2 > R_3$. Uszereguj trzy oporniki według wartości: a) natężenia płynącego w nich prądu, b) różnicy potencjałów na nich, zaczynając od największej wartości.

28.5. Różnice potencjałów

Często chcemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami obwodu. Ile wynosi różnica potencjałów, np. między punktami b i a na rys. 28.4a? Aby ją obliczyć, przeanalizujmy obwód zgodnie z ruchem wskazówek zegara od punktu b do punktu a , przechodząc przez opornik o oporze R . Jeśli V_a i V_b są potencjałami odpowiednio w punktach a i b , to mamy:

$$V_b - IR = V_a,$$

ponieważ (zgodnie z regułą oporu) obserwujemy zmniejszanie się potencjału przy przechodzeniu przez opór w kierunku przepływu prądu. Wynik ten możemy zapisać w postaci:

$$V_b - V_a = +IR, \quad (28.8)$$

czyli punkt b ma większy potencjał niż punkt a . Łącząc wzór (28.8) ze wzorem (28.4), mamy:

$$V_b - V_a = \mathcal{E} \frac{R}{R + r}, \quad (28.9)$$

gdzie r jest oporem wewnętrznym źródła SEM.

➤ Aby znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami obwodu, należy rozpocząć analizę w jednym punkcie, przejść wzdłuż obwodu do drugiego, dowolną drogą, i dodać algebraicznie napotkane zmiany potencjału.

Obliczmy ponownie $V_b - V_a$, wychodząc z punktu b , lecz przechodząc teraz do punktu a przez źródło (tzn. poruszając się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara). Otrzymujemy:

$$V_b + Ir - \mathcal{E} = V_a,$$

czyli

$$V_b - V_a = \mathcal{E} - Ir. \quad (28.10)$$

Podstawiając do tego wzoru I z równania (28.4), otrzymujemy ponownie wzór (28.9).

Wielkość $V_b - V_a$ na rysunku 28.4 jest różnicą potencjałów wytwarzanych przez źródło na jego zaciskach. Jak już zauważyliśmy wcześniej, różnica $V_b - V_a$ jest równa SEM $\mathcal{E}$ źródła tylko wtedy, gdy źródło nie ma wewnętrznego oporu ($r = 0$ we wzorze (28.9)) lub jeśli obwód jest otwarty ($I = 0$ we wzorze (28.10)).

Założmy, że na rysunku 28.4 $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $R = 10 \text{ } \Omega$ i $r = 2 \text{ } \Omega$. Ze wzoru (28.9) wynika, że różnica potencjałów na biegunach źródła wynosi:

$$V_b - V_a = (12 \text{ V}) \frac{10 \text{ } \Omega}{10 \text{ } \Omega + 2 \text{ } \Omega} = 10 \text{ V}.$$

„Pompując” przez siebie ładunek, źródło wykonuje pracę, której wartość przypadająca na jednostkę ładunku wynosi $\mathcal{E} = 12 \text{ J/C}$, czyli 12 V . Jednak ze względu na swój opór wewnętrzny wytwarza ono różnicę potencjałów między biegunami równą tylko 10 V , czyli 10 J/C .

Moc, potencjał i SEM

Jeśli bateria lub inne źródło SEM wykonuje pracę nad nośnikami ładunku, wytwarzając prąd o natężeniu I , to przekazuje nośnikom ładunku energię ze źródła

energii (np. źródła chemicznego w baterii). Rzeczywiste źródło SEM ma opór wewnętrzny r , a więc energia jest w nim także zamieniana na wewnętrzną energię termiczną, czyli ulega omówionemu w paragrafie 27.7 rozproszeniu na oporze wewnętrznym. Postarajmy się połączyć te zmiany energii.

Wypadkowa szybkość P procesu przekazywania energii ze źródła SEM nośnikom ładunku (moc) jest dana wzorem (27.21):

$$P = IU, \quad (28.11)$$

gdzie U jest różnicą potencjałów między biegunami źródła SEM. Ze wzoru (28.10) możemy podstawić $U = \mathcal{E} - Ir$ do wzoru (28.11), otrzymując

$$P = I(\mathcal{E} - Ir) = I\mathcal{E} - I^2r. \quad (28.12)$$

Widzimy, że człon I^2r we wzorze (28.12) jest szybkością zamiany energii na energię termiczną w źródle SEM:

$$P_r = I^2r \quad (\text{moc rozproszona w źródle}). \quad (28.13)$$

Człon $I\mathcal{E}$ we wzorze (28.12) jest więc mocą P_{SEM} przekazu energii przez źródło zarówno nośnikom ładunku, jak i na rzecz wewnętrznej energii termicznej, czyli:

$$P_{\text{SEM}} = I\mathcal{E} \quad (\text{moc źródła SEM}). \quad (28.14)$$

Jeśli źródło jest ładowane przez przepuszczenie przez nie prądu „w przeciwną stronę”, to następuje przekaz energii od nośników ładunku do źródła, czyli zamiana energii zarówno na energię chemiczną źródła, jak i na energię termiczną w oporze wewnętrznym r . Szybkość zamiany na energię chemiczną jest określona wzorem (28.14), szybkość rozpraszania wzorem (28.13), a szybkość dostarczania energii przez ładunki wzorem (28.11).

Przykład 28.1

W obwodzie na rysunku 28.6a SEM i opory mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= 4,4 \text{ V}, & \mathcal{E}_2 &= 2,1 \text{ V}, \\ r_1 &= 2,3 \, \Omega, & r_2 &= 1,8 \, \Omega, & R &= 5,5 \, \Omega. \end{aligned}$$

a) Ile wynosi natężenie prądu I w obwodzie?

ROZWIĄZANIE:

➡ Wyrażenie na natężenie prądu I w obwodzie o jednym oczku można otrzymać, korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa. Choć znajomość kierunku prądu nie jest konieczna, możemy go łatwo określić ze znajomości SEM dwóch źródeł. Ponieważ $\mathcal{E}_1$ jest większa od $\mathcal{E}_2$, to źródło 1 wyznacza kierunek prądu i kierunek ten jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Jeśli zastosujemy więc drugie prawo Kirchhoffa, przechodząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, czyli przeciwnym do kierunku przepływu prądu, i rozpoczynając w punkcie a , to otrzymamy:

$$-\mathcal{E}_1 + Ir_1 + IR + Ir_2 + \mathcal{E}_2 = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że wzór ten otrzymuje się także wtedy, gdy drugie prawo Kirchhoffa zastosujemy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara lub gdy rozpoczniemy w punkcie innym niż a . Warto porównać ten wzór, człon po członie, z rysunkiem 28.6b, przedstawiającym graficznie zmiany potencjału (przy potencjale w punkcie a przyjętym umownie za zero).

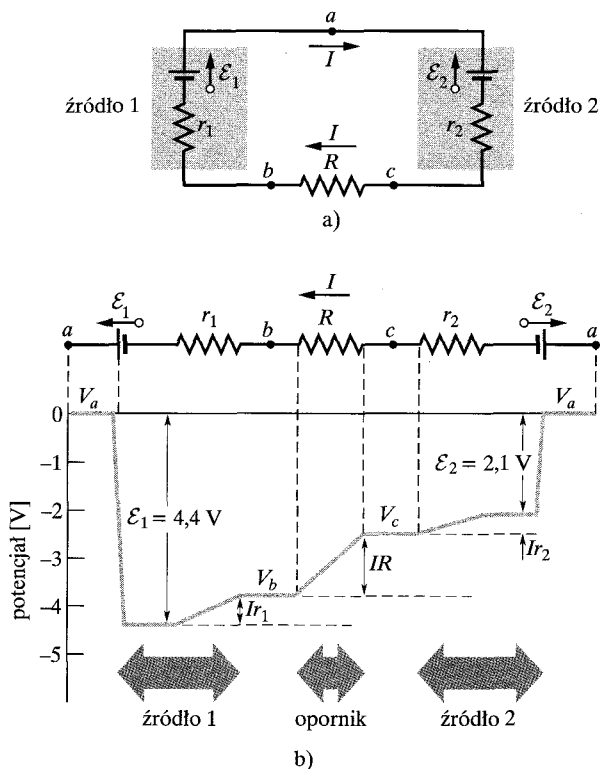
Wyznaczając z powyższego wzoru natężenie prądu I , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{4,4 \text{ V} - 2,1 \text{ V}}{5,5 \, \Omega + 2,3 \, \Omega + 1,8 \, \Omega} = 0,24 \text{ A} \\ &\approx 240 \text{ mA}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi różnica potencjałów między biegunami źródła 1 na rysunku 28.6a?

ROZWIĄZANIE:

➡ Należy zsumować różnice potencjałów między punktami a i b . Jeśli rozpoczniemy w punkcie b (czyli od ujemnego bieguna źródła 1) i przejdziemy przez źródło zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara do punktu a (do dodatniego bieguna źródła),



Rys. 28.6. Przykład 28.1. a) Obwód o jednym oczku, zawierający dwa rzeczywiste źródła i opornik. Źródła są połączone przeciwnie względem siebie, czyli wytwarzają w oporniku prądy o przeciwnych kierunkach. b) Wykres potencjału, przy obchodzeniu obwodu, zaczynając od punktu *a*, przy założeniu, że wartość potencjału w punkcie *a* wynosi zero. (Aby lepiej powiązać wykres z obwodem, możemy w myśli rozciąć obwód w *a* i odgiąć lewą stronę na lewo, a prawą stronę obwodu na prawo)

to uwzględniając zmiany potencjału, otrzymamy:

$$V_b - I r_1 + \varepsilon_1 = V_a,$$

co daje nam:

$$V_a - V_b = -I r_1 + \varepsilon_1 = -(0,2396 \text{ A})(2,3 \Omega) + 4,4 \text{ V} = +3,84 \text{ V} \approx 3,8 \text{ V.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynika stąd, że różnica potencjałów jest mniejsza od SEM źródła. Wynik ten możemy sprawdzić, rozpoczynając analizę w punkcie *b* na rysunku 28.6a i analizując obwód w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, do punktu *a*.

SPRAWDZIAN 3: Źródło ma SEM równą 12 V i opór wewnętrzny 2 Ω. Czy różnica potencjałów między biegunami źródła jest większa, mniejsza, czy równa 12 V, jeśli prąd w źródle płynie: a) od ujemnego do dodatniego bieguna, b) od dodatniego do ujemnego bieguna, c) jeśli jego natężenie jest równe zero?

Sztuka rozwiązywania zadań

Porada 1: Kierunek przepływu prądu

Przy rozwiązywaniu zadań z obwodami nie musimy z góry znać kierunku przepływu prądu. Możemy po prostu założyć pewien kierunek przepływu prądu, choć może to wymagać pewnej „odwagi fizycznej”. Aby się o tym przekonać założmy, że prąd na rysunku 28.6a płynie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, czyli przeciwnym do pokazanego za pomocą strzałek. Stosując drugie prawo Kirchhoffa w kierunku przeciwnym do ru-

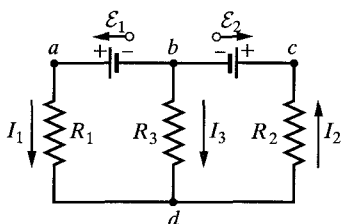
chu wskazówek zegara, od punktu *a*, otrzymujemy teraz:

$$-\varepsilon_1 - I r_1 - I R - I r_2 + \varepsilon_2 = 0,$$

czyli

$$I = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2}.$$

Podstawiając wartości liczbowe z przykładu 28.1, otrzymujemy natężenie prądu $I = -240 \text{ mA}$. Znak minus oznacza, że prąd płynie w kierunku przeciwnym do przyjętego.



Rys. 28.7. Obwód o wielu oczkach, składający się z trzech gałęzi: lewej gałęzi *bad*, prawej gałęzi *bcd* i środkowej gałęzi *bd*. Obwód składa się także z trzech oczek: lewego oczka *badb*, prawego oczka *bcd* i dużego oczka *badcb*

28.6. Obwody o wielu oczkach

Na rysunku 28.7 przedstawiono obwód składający się z więcej niż jednego oczka. Dla uproszczenia założymy, że źródła są doskonałe. W tym obwodzie są dwa węzły, *b* i *d*, i trzy gałęzie, łączące te węzły. Gałęziami są: lewa gałąź (*bad*), prawa gałąź (*bcd*) i środkowa gałąź (*bd*). Ile wynoszą natężenia prądów w tych trzech gałęziach?

Prądy oznaczmy, używając innego wskaźnika dla każdej gałęzi. Prąd o natężeniu I_1 ma tę samą wartość wszędzie w gałęzi *bad*, I_2 ma tę samą wartość wszędzie w gałęzi *bcd* i I_3 jest natężeniem prądu płynącego przez gałąź *bd*. Kierunki prądów są przyjęte dowolnie.

Rozważmy na chwilę węzeł d : ładunek wpływa do tego węzła z wpływającymi prądami o natężeniach I_1 i I_3 , a wypływa z wypływającym prądem I_2 . Ładunek w węźle nie zmienia się, a więc całkowite natężenie prądów wpływających do węzła musi być równe całkowitemu natężeniu prądów z niego wypływających:

$$I_1 + I_3 = I_2. \quad (28.15)$$

Można łatwo sprawdzić, że zastosowanie tego warunku do węzła b prowadzi dokładnie do tego samego wzoru. Ze wzoru (28.15) wynika więc ogólna zasada:

➤ **Pierwsze prawo Kirchhoffa.** Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.

Jest to po prostu stwierdzenie zachowania ładunku przy stacjonarnym jego przepływie — w węźle ładunek nie może ani rosnąć, ani maleć. Naszymi podstawowymi narzędziami, służącymi do rozwiązywania złożonych obwodów są więc: *drugie prawo Kirchhoffa* (wynikające z zasady zachowania energii) i *pierwsze prawo Kirchhoffa* (wynikające z zasady zachowania ładunku).

Wzór (28.15) jest równaniem z trzema niewiadomymi. Aby je rozwiązać (czyli znaleźć natężenia trzech prądów), potrzebujemy dwóch dodatkowych równań, zawierających te same niewiadome. Otrzymujemy je przez dwukrotnie zastosowanie pierwszego prawa Kirchhoffa. W obwodzie z rysunku 28.7 spośród trzech oczek możemy wybrać: lewe oczko ($badb$), prawe oczko ($bcd b$) i duże oczko ($badcb$). Nie ma znaczenia, które dwa oczka wybierzemy — wybierzmy na przykład lewe oczko i prawe oczko.

Jeśli analizujemy lewe oczko w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu b , to drugie prawo Kirchhoffa daje nam:

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0. \quad (28.16)$$

Jeśli analizujemy prawe oczko w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu b , to drugie prawo Kirchhoffa daje nam:

$$-I_3 R_3 - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0. \quad (28.17)$$

Mamy teraz trzy równania (wzory (28.15), (28.16) i (28.17)) z trzema nieznanymi natężeniami prądów. Możemy je rozwiązać na wiele sposobów.

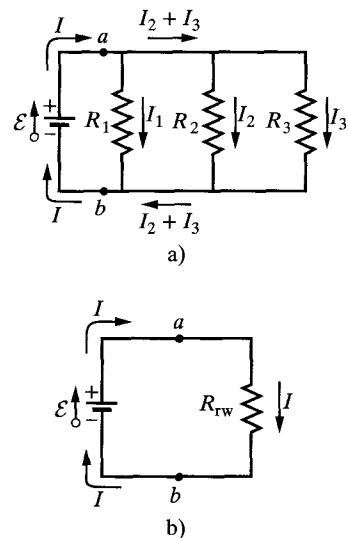
Jeśli zastosowalibyśmy drugie prawo Kirchhoffa do dużego oczka, to otrzymalibyśmy (poruszając się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i rozpoczynając od punktu b) wzór:

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0.$$

Może się wydawać, że równanie to zawiera dodatkową informację, ale w rzeczywistości jest tylko sumą równań (28.16) i (28.17). (Można je oczywiście zastosować łącznie ze wzorem (28.15) i albo (28.16), albo (28.17)).

Oporniki połączone równolegle

Na rysunku 28.8a przedstawiono trzy oporniki połączone *równolegle* i podłączone do doskonałego źródła o SEM równej $\mathcal{E}$. Określenie „równolegle” oznacza, że



Rys. 28.8. a) Trzy oporniki połączone równolegle. b) Równoważny obwód z opornikami, zastąpionymi przez równoważny im opór R_{rw}

oporniki są razem połączone za pomocą przewodów z jednej strony i z drugiej strony, i że różnica potencjałów U jest przyłożona do pary połączonych końcówek. Stąd na wszystkich trzech opornikach mamy taką samą różnicę potencjałów U , która wytwarza prąd w każdym z oporników:

➤ Gdy różnica potencjałów U jest przyłożona do oporników połączonych równolegle, na wszystkich opornikach jest taka sama różnica potencjałów U .

Na rysunku 28.8a przyłożona różnica potencjałów U jest utrzymywana przez źródło. Na rysunku 28.8b trzy połączone równolegle oporniki zastąpiono równoważnym opornikiem R_{rw} .

➤ Oporniki połączone równolegle można zastąpić równoważnym opornikiem R_{rw} , do którego końców jest przyłożona taka sama różnica potencjałów U i przez który przepływa prąd o natężeniu I równym sumie natężeń prądów w opornikach połączonych równolegle.

Aby wyprowadzić wyrażenie na R_{rw} na rysunku 28.8b, zapiszmy najpierw wartość natężenia prądu w każdym z oporników na rysunku 28.8a:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad \text{ i } \quad I_3 = \frac{U}{R_3},$$

gdzie U jest różnicą potencjałów między punktami a i b . Jeśli zastosujemy pierwsze prawo Kirchhoffa w punkcie a z rys. 28.8a i podstawimy te wartości, to znajdziemy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \quad (28.18)$$

Jeśli zastąpilibyśmy oporniki połączone równolegle opornikiem równoważnym R_{rw} (rys. 28.8b), to mielibyśmy:

$$I = \frac{U}{R_{rw}}. \quad (28.19)$$

Porównanie wzorów (28.18) i (28.19) prowadzi do wzoru:

$$\frac{1}{R_{rw}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (28.20)$$

Uogólniając ten wynik na przypadek n oporników, mamy:

$$\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ oporników połączonych równolegle}). \quad (28.21)$$

W przypadku dwóch oporników opornik równoważny ma opór równy iloczynowi oporów oporników podzielonemu przez ich sumę, czyli:

$$R_{rw} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (28.22)$$

Jeśli omyłkowo za opór równoważny podstawisz sumę podzieloną przez iloczyn, to jak możesz łatwo zauważyć, otrzymasz wynik niepoprawny wymiarowo.

Zauważ, że gdy dwa lub więcej oporników jest połączonych równolegle, to opór równoważny jest mniejszy od każdego z oporów łączonych. W tabeli 28.1 podsumowano związki dla oporników i kondensatorów połączonych szeregowo i równolegle.

Tabela 28.1. Oporniki i kondensatory połączone szeregowo i równolegle

Szeregowo	Równolegle
<i>Oporniki</i>	
$R_{rw} = \sum_{j=1}^n R_j$ (28.7)	$\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}$ (28.21)
Takie samo natężenie prądu we wszystkich opornikach	Taka sama różnica potencjałów na wszystkich opornikach
<i>Kondensatory</i>	
$\frac{1}{C_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j}$ (26.20)	$C_{rw} = \sum_{j=1}^n C_j$ (26.19)
Taki sam ładunek na wszystkich kondensatorach	Taka sama różnica potencjałów na wszystkich kondensatorach

SPRAWDZIAN 4: Źródło o różnicy potencjałów U jest podłączone do układu dwóch identycznych oporników i powstaje w nim prąd o natężeniu I . Ile wynoszą różnice potencjałów i natężenia prądu dla każdego opornika, jeśli są one połączone: a) szeregowo, b) równolegle?

Przykład 28.2

Na rysunku 28.9a przedstawiono obwód o wielu oczkach zawierający jedno doskonałe źródło i cztery oporniki, przy czym:

$$R_1 = 20 \, \Omega, \quad R_2 = 20 \, \Omega, \quad \mathcal{E} = 12 \, \text{V}, \\ R_3 = 30 \, \Omega, \quad R_4 = 8 \, \Omega.$$

a) Ile wynosi natężenie prądu, płynącego przez źródło?

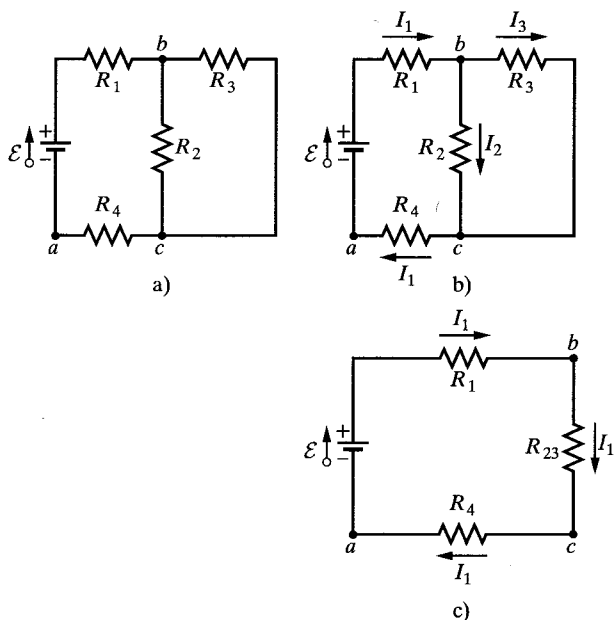
ROZWIĄZANIE:

Zauważmy najpierw, że prąd płynący przez źródło jest równocześnie prądem, płynącym przez opornik R_1 .

➔ 1. Możemy znaleźć jego natężenie, przez zastosowanie drugiego prawa Kirchhoffa do oczka zawierającego R_1 , ponieważ natężenie to pojawi się w wyrażeniu na różnicę potencjałów na oporniku R_1 . Możemy wybrać albo lewe oczko, albo duże oczko. Zauważając, że strzałka SEM baterii jest skierowana do góry, czyli prąd wytwarzany przez baterię ma kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara, zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do lewego oczka. Obwód będziemy analizować zgodnie z ruchem wskazówek zegara, rozpoczynając w punkcie a . Jeśli I jest natężeniem prądu płynącego przez źródło, to spróbujmy napisać:

$$+\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_4 = 0 \quad (\text{wzór błędny}).$$

Wzór ten jest jednak błędny, ponieważ zakłada takie samo natężenie prądu I przepływającego przez oporniki R_1 , R_2 i R_4 .



Rys. 28.9. Przykład 28.2. a) Obwód o wielu oczkach z doskonałym źródłem o SEM równej $\mathcal{E}$ i czterema opornikami. b) Wybór kierunków prądów płynących przez oporniki. c) Uproszczenie obwodu przez zastąpienie oporników R_2 i R_3 oporem równoważnym R_{23} . Natężenie prądu płynącego przez opór równoważny R_{23} jest równe natężeniu prądu płynącego przez oporniki R_1 i R_4

Przez oporniki R_1 i R_4 przepływa taki sam prąd, ponieważ prąd, przepływający przez opornik R_4 musi przepłynąć przez źródło i następnie przez opornik R_1 bez zmiany wartości. Prąd ten rozdziela się jednak w węzle b — tylko część przepływa przez opornik R_2 , a reszta przez opornik R_3 .

Aby odróżnić kilka prądów, przepływających w obwodzie, musimy każdy z nich indywidualnie oznaczyć, jak na rysunku 28.9b. Wtedy, przesuwając się z punktu a wzdłuż obwodu, możemy napisać drugie prawo Kirchhoffa dla lewego oczka w postaci:

$$+\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_1 R_4 = 0.$$

Niestety, równanie to zawiera dwie niewiadome, I_1 i I_2 ; będziemy potrzebować przynajmniej jeszcze jednego równania, aby je wyznaczyć.

➡ 2. Łatwiejszą metodą jest uproszczenie obwodu z rys. 28.9b przez znalezienie oporów równoważnych. Zauważ, że oporniki R_1 i R_2 nie są połączone szeregowo i tych oporów nie można zastąpić opornikiem równoważnym. Natomiast oporniki R_2 i R_3 są połączone równolegle i dlatego możemy zastosować wzór (28.21) lub (28.22), aby znaleźć opór równoważny R_{23} . Z ostatniego wzoru wynika, że:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(20 \, \Omega)(30 \, \Omega)}{50 \, \Omega} = 12 \, \Omega.$$

Możemy teraz przerysować obwód w postaci rysunku 28.9c; zauważ, że prąd, płynący przez opornik R_{23} musi być prądem o natężeniu I_1 , ponieważ ładunek, przepływający przez oporniki R_1 i R_4 musi także przepłynąć przez opornik R_{23} . Dla tego prostego obwodu o jednym oczku drugie prawo Kirchhoffa (przy analizie obwodu zgodnie z ruchem wskazówek zegara, od punktu a) ma postać:

$$+\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_1 R_{23} - I_1 R_4 = 0.$$

Po podstawieniu podanych wartości otrzymujemy:

$$12 \, \text{V} - I_1(20 \, \Omega) - I_1(12 \, \Omega) - I_1(8 \, \Omega) = 0,$$

Przykład 28.3

Na rysunku 28.10 przedstawiono obwód, którego elementy mają następujące parametry:

$$\mathcal{E}_1 = 3 \, \text{V}, \quad \mathcal{E}_2 = 6 \, \text{V},$$

$$R_1 = 2 \, \Omega, \quad R_2 = 4 \, \Omega.$$

Wszystkie trzy źródła są źródłami doskonałymi. Znajdź natężenie i kierunek prądu w każdej z trzech gałęzi.

ROZWIĄZANIE:

Nie warto podejmować próby uproszczenia tego obwodu, gdyż żadne dwa oporniki nie są połączone równolegle, a dla oporników połączonych szeregowo (w prawej lub lewej gałęzi) możemy od razu obliczyć opór równoważny. ➡ Należy więc zastosować pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa.

skąd

$$I_1 = \frac{12 \, \text{V}}{40 \, \Omega} = 0,30 \, \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi natężenie prądu I_2 , przepływającego przez opornik R_2 ?

ROZWIĄZANIE:

➡ Powróćmy do obwodu równoważnego z rysunku 28.9c, w którym oporniki o oporach R_1 i R_2 połączone równolegle zostały zastąpione opornikiem o oporze R_{23} . ➡ Opory R_2 i R_3 są połączone równolegle, a więc różnica potencjałów na tych opornikach jest taka sama, jak na równoważnym im oporniku R_{23} . Wiemy, że natężenie prądu, płynącego przez R_{23} wynosi $I_1 = 0,3 \, \text{A}$. Możemy zatem zastosować wzór (27.8) ($R = U/I$) w celu obliczenia różnicy potencjałów U_{23} na oporniku R_{23}

$$U_{23} = I_1 R_{23} = (0,3 \, \text{A})(12 \, \Omega) = 3,6 \, \text{V}.$$

Różnica potencjałów na oporniku R_2 wynosi więc $3,6 \, \text{V}$, czyli natężenie prądu I_2 , płynącego przez opornik R_2 jest na podstawie wzoru (27.8) równe:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{3,6 \, \text{V}}{30 \, \Omega} = 0,18 \, \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Ile wynosi natężenie prądu I_3 płynącego przez opornik R_3 ?

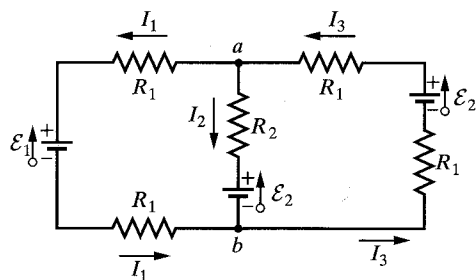
ROZWIĄZANIE:

Odpowiedź możemy znaleźć, postępując jak w punkcie (b). ➡ Inną metodą jest skorzystanie z pierwszego prawa Kirchhoffa: w punkcie b na rysunku 28.9b prąd wpływający I_1 i prądy wpływające I_2 i I_3 są powiązane wzorem:

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

skąd:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0,3 \, \text{A} - 0,18 \, \text{A} = 0,12 \, \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 28.10. Przykład 28.3. Obwód o wielu oczkach z trzema doskonałymi źródłami i pięcioma opornikami

Wybieramy dowolnie kierunki prądów, jak na rys. 28.10 i stosujemy pierwsze prawo Kirchhoffa w punkcie a pisząc:

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (28.23)$$

Zastosowanie pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzła b daje takie samo równanie, zastosujemy więc następnie drugie prawo Kirchhoffa dla dwóch oczek, dowolnie wybranych spośród trzech możliwych. Najpierw wybierzemy lewe oczko i rozpoczynając od punktu a przeanalizujemy je w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, otrzymując:

$$-I_1 R_1 - \mathcal{E}_1 - I_1 R_1 + \mathcal{E}_2 + I_2 R_2 = 0.$$

Podstawiając dane wartości, mamy:

$$I_1(4\ \Omega) - I_2(4\ \Omega) = 3\ \text{V}. \quad (28.24)$$

Jako drugie oczko wybieramy oczko prawe, analizując je w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu a , i otrzymujemy:

$$+I_3 R_1 - \mathcal{E}_2 + I_3 R_1 + \mathcal{E}_2 + I_2 R_2 = 0.$$

Podstawiając znane wartości, mamy:

$$I_2(4\ \Omega) + I_3(4\ \Omega) = 0. \quad (28.25)$$

Po zastosowaniu wzoru (28.23) w celu wyeliminowania I_3 ze wzoru (28.25) i uproszczeniu, otrzymujemy:

$$I_1(4\ \Omega) + I_2(8\ \Omega) = 0. \quad (28.26)$$

Mamy teraz do rozwiązania układ dwóch równań (28.24) i (28.26) z dwiema niewiadomymi I_1 i I_2 ; możemy to zrobić bezpośrednio (co w tym przypadku jest całkiem łatwe) lub korzystając z metod rozwiązywania układów równań np. metody Cramera, przedstawionej w dodatku E. Znajdujemy:

$$I_2 = -0,25\ \text{A}.$$

(Znak minus oznacza, że wybrany przez nas kierunek przepływu prądu I_2 na rys. 28.10 jest błędny; prąd I_2 płynie w rzeczywistości w kierunku od $\mathcal{E}_2$ do R_2). Podstawiając $I_2 = -0,25\ \text{A}$ do wzoru (28.26) i wyznaczając I_1 , otrzymujemy:

$$I_1 = 0,50\ \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Po zastosowaniu wzoru (28.23) mamy wtedy:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0,25\ \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Dodatnie wartości, otrzymane dla I_1 i I_3 oznaczają, że nasz wybór kierunków dla tych prądów był poprawny. Możemy teraz poprawić kierunek prądu I_2 i zapisać jego natężenie w postaci

$$I_2 = 0,25\ \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Przykład 28.4

Ryba elektryczna potrafi wytworzyć prąd w swych komórkach biologicznych, zwanych *plytkami elektrycznymi*, które są fizjologicznymi źródłami SEM. Płytki elektryczne węgorza z Ameryki Południowej, przedstawionego na fotografii otwierającej ten rozdział, są rozmieszczone w 140 rzędach, ułożonych poziomo wzdłuż ciała, z których każdy zawiera 5000 płytek elektrycznych. Cały układ jest schematycznie przedstawiony na rys. 28.11a; każda płytka elektryczna ma SEM $\mathcal{E} = 0,15\ \text{V}$ i opór wewnętrzny $r = 0,25\ \Omega$. Woda, otaczająca węgorza, domyka obwód między dwoma końcami układu płytek elektrycznych, jednym na głowie zwierzęcia i drugim w pobliżu jego ogona.

a) Jakie natężenie prądu może wytworzyć węgorz w wodzie, jeśli woda otaczająca węgorza ma opór $R_w = 800\ \Omega$?

ROZWIĄZANIE:

Obwód z rys. 28.11a można uprościć, zastępując układ SEM i oporów wewnętrznych przez równoważne SEM i opory. Najpierw rozważymy pojedynczy rząd. Całkowita SEM $\mathcal{E}_{rz}$ rzędu 5000 płytek elektrycznych jest sumą SEM płytek:

$$\mathcal{E}_{rz} = 5000\mathcal{E} = (5000)(0,15\ \text{V}) = 750\ \text{V}.$$

Całkowity opór R_{rz} rzędu jest sumą oporów wewnętrznych 5000 płytek:

$$R_{rz} = 5000r = (5000)(0,25\ \Omega) = 1250\ \Omega.$$

Możemy teraz zastąpić każdy ze 140 identycznych rzędów przez pojedynczą SEM $\mathcal{E}_{rz}$ i pojedynczy opór R_{rz} , jak na rysunku 28.11b.

Na rysunku 28.11b SEM między punktami a i b w każdym rzędzie wynosi $\mathcal{E}_{rz} = 750\ \text{V}$. Rzędy są identyczne i połączone z lewej strony na rysunku 28.11b, a więc wszystkie punkty b na rysunku mają ten sam potencjał elektryczny. Możemy więc potraktować te punkty jako połączone i założyć, że jest tylko jeden punkt b . SEM między punktem a i tym pojedynczym punktem b wynosi $\mathcal{E}_{rz} = 750\ \text{V}$. Możemy więc narysować obwód, jak na rysunku 28.11c.

Między punktami b i c na rysunku 28.11c znajduje się 140 oporników $R_{rz} = 1250\ \Omega$, połączonych równolegle. Równoważny opór R_{rw} tego układu jest określony wzorem (28.21):

$$\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{j=1}^{140} \frac{1}{R_j} = 140 \frac{1}{R_{rz}},$$

czyli:

$$R_{rw} = \frac{R_{rz}}{140} = \frac{1250\ \Omega}{140} = 8,93\ \Omega.$$

Zastępując układ połączonych równolegle oporników przez R_{rw} , otrzymujemy uproszczony obwód z rysunku 28.11d. Stosując drugie prawo Kirchhoffa dla tego obwodu, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i rozpoczynając od punktu b , mamy:

$$\mathcal{E}_{rz} - I R_w - I R_{rw} = 0.$$

Wyznaczając stąd I i podstawiając znane wartości, otrzymujemy:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{rz}}{R_w + R_{rw}} = \frac{750\ \text{V}}{800\ \Omega + 8,93\ \Omega} = 0,927\ \text{A} \approx 0,93\ \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jeśli inna ryba jest blisko głowy lub ogona węgorza, to część tego prądu może przejść wąskim kanałem przez rybę, porażając ją lub zabijając.

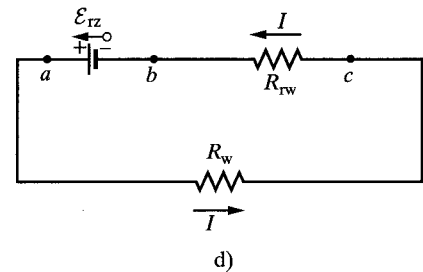
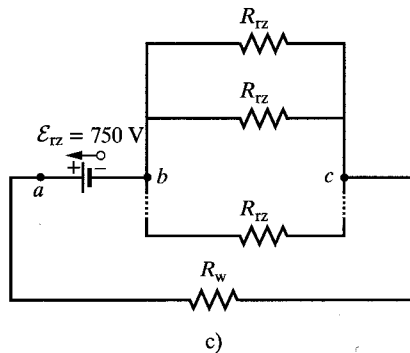
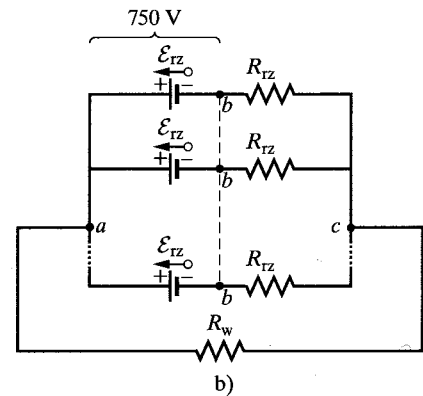
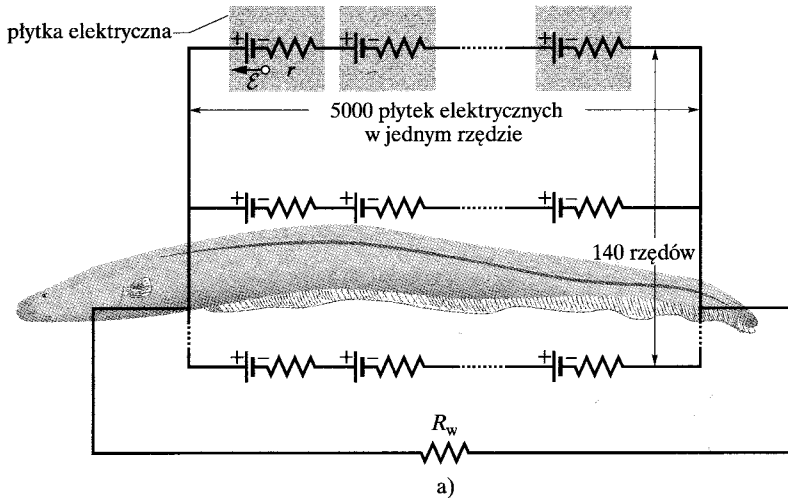
b) Ile wynosi natężenie prądu I_{rz} , przepływającego przez każdy rząd z rysunku 28.11a?

ROZWIĄZANIE:

🔑 Rzędy są identyczne, a więc prąd wpływający i wypływający z węgorza dzieli się równo między rzędy:

$$I_{rz} = \frac{I}{140} = \frac{0,927 \text{ A}}{140} = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ A.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jak widać, prąd, przepływający przez każdy rząd jest mały, ponad dwa rzędy wielkości mniejszy niż prąd, przepływający przez wodę. Prąd jest więc rozłożony na całe ciało węgorza i w przeciwieństwie do ryby nie zostaje on porażony ani zabity.



Rys. 28.11. Przykład 28.4. a) Model obwodu elektrycznego węgorza w wodzie. Każda płytka elektryczna węgorza ma SEM równą $\mathcal{E}$ i opór wewnętrzny r . Wzdłuż każdego z 140 rzędów rozciągających się od głowy do ogona węgorza znajduje się 5000 płytek elektrycznych. Opór otaczającej wody wynosi R_w . b) SEM $\mathcal{E}_{rz}$ i opór R_{rz} każdego rzędu. c) SEM między punktami a i b wynosi $\mathcal{E}_{rz}$. Między punktami b i c jest 140 oporów R_{rz} połączonych równolegle. d) Obwód uproszczony z oporem R_{rw} zastępującym układ oporów połączonych równolegle

Sztuka rozwiązywania zadań

Porada 2: Analiza obwodów ze źródłami i opornikami

Przedstawimy teraz dwa sposoby analizowania obwodów, czyli obliczania nieznanymi natężeń prądów i różnic potencjałów.

1. Jeśli obwód można uprościć, zastępując połączone szeregowo lub równolegle oporniki przez oporniki równoważne, to trzeba to zrobić. Jeśli można obwód zredukować do ob-

wodu z jednym oczkiem, to można znaleźć natężenie prądu, przepływającego przez źródło w tym oczku, jak w przykładzie 28.2a. Czasami należy potem odwrócić proces upraszczania obwodu, aby znaleźć natężenie prądu lub różnicę potencjałów dla poszczególnych oporników, jak w przykładzie 28.2b.

2. Jeśli obwodu nie można uprościć do pojedynczego oczka, to należy zastosować pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa w celu ułożenia układu równań, jak w przykładzie 28.3. Należy wziąć tylko tyle niezależnych równań, ile jest niewiadomych w tych równaniach. Jeśli chcemy znaleźć natężenie prądu lub różnicę potencjałów dla konkretnego opornika, trzeba zadbać, aby to natężenie lub różnica potencjałów pojawiały się w równaniach, przez wybór przynajmniej jednego oczka z tym konkretnym opornikiem.

Porada 3: *Możliwości wyboru przy rozwiązywaniu zadań z obwodami*

W przykładzie 28.3 poczyniliśmy kilka dowolnych założeń. 1) Przyjęliśmy dowolnie kierunki przepływu prądów na rysunku 28.10. 2) Wybraliśmy dowolnie oczka, które uwzględnimy przy

wypisywaniu równań. 3) Wybraliśmy dowolnie kierunek, w którym analizujemy każde oczko. 4) Wybraliśmy dowolnie punkt rozpoczęcia i zakończenia każdej analizy obwodu.

Ta dowolność wyboru często niepokoi osobę początkującą w analizowaniu obwodów, ale osoba doświadczona wie, że nie ma to znaczenia. Trzeba pamiętać zawsze o dwóch zasadach. Po pierwsze, wybrane oczko należy analizować rzeczywiście dokoła. Po drugie, wybrawszy kierunek przepływu prądu, należy trzymać się go, aż do otrzymania wartości liczbowych wszystkich natężeń. Jeśli wybraliśmy zły kierunek, to z wyliczeń otrzymamy znak minus. Można wtedy dokonać poprawki przez równoczesną zmianę znaku w wyniku i odwrócenie strzałki reprezentującej ten prąd na schemacie obwodu. Jednak *nie należy robić tej poprawki przed ukończeniem wszystkich potrzebnych obliczeń dla obwodu*; poprawnie zrobiliśmy to w przykładzie 28.3.

28.7. Amperomierz i woltomierz

Przyrząd używany do pomiaru natężenia prądu nazywamy *amperomierzem*. Aby zmierzyć natężenie prądu w przewodniku, należy przewodnik przeciąć i wstawić amperomierz tak, żeby mierzony prąd przepływał przez miernik. (Na rysunku 28.12 amperomierz A jest włączony w obwód tak, aby służył do pomiaru natężenia prądu I).

Istotne jest, aby opór R_A amperomierza był bardzo mały w porównaniu z innymi oporami w obwodzie. W przeciwnym wypadku sama obecność miernika zmieni natężenie mierzonego prądu.

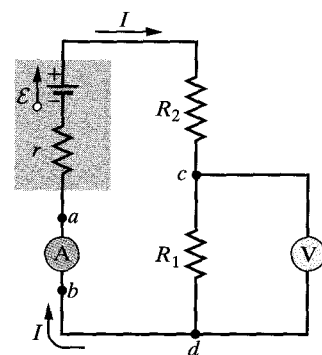
Miernik używany do pomiaru różnicy potencjałów nazywamy *woltomierzem*. Aby znaleźć różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami, należy zaciski woltomierza podłączyć do tych punktów, bez przecinania przewodu. (Na rysunku 28.12 woltomierz V jest włączony w obwód tak, aby służył do pomiaru różnicy potencjałów na oporniku R_1).

Istotne jest, aby opór R_V woltomierza był bardzo duży w porównaniu z oporem elementu obwodu, do którego woltomierz jest podłączony. W przeciwnym wypadku sam miernik staje się ważnym elementem obwodu i zmienia różnicę potencjałów, którą mamy zmierzyć.

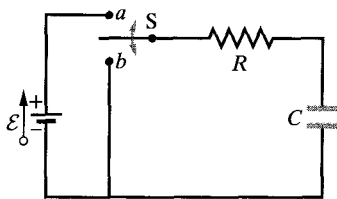
Często pojedynczy miernik jest tak zbudowany, że przy użyciu przełącznika można spowodować, że będzie nam służył albo jako amperomierz, albo jako woltomierz, a zwykle także jako *omomierz*, czyli miernik do pomiaru oporu dowolnego elementu, podłączonego do jego zacisków. Taki uniwersalny miernik nazywamy *multimetrem*.

28.8. Obwody RC

W poprzednich paragrafach zajmowaliśmy się tylko obwodami, w których płyną prądy stałe, czyli prądy o natężeniach nie ulegających zmianie w czasie. Teraz rozpoczniemy analizę obwodów, w których płyną prądy zmienne, czyli prądy o natężeniach zmieniających się w czasie.



Rys. 28.12. Obwód o jednym oczku, w który włączono amperomierz (A) i woltomierz (V)



Rys. 28.13. Jeśli klucz S ustawimy w punkcie a , to kondensator ładuje się przez opornik. Jeśli klucz następnie ustawimy w punkcie b , to kondensator rozładowuje się przez opornik

Ładowanie kondensatora

Kondensator o pojemności C na rys. 28.13 jest początkowo nienaładowany. Aby go naładować, przesuwamy klucz S do punktu a . Powstaje wtedy *obwód szeregowy* RC , składający się z kondensatora, doskonałego źródła o SEM $\mathcal{E}$ i opornika o oporze R .

Z paragrafu 26.2 wiemy już, że z chwilą zamknięcia obwodu zaczyna przepływać ładunek (przepływ ładunku to prąd) między okładką kondensatora i biegunem baterii po każdej stronie kondensatora. Ten prąd zwiększa ładunek q na okładkach i różnicę potencjałów $U_C (= q/C)$ na kondensatorze. Gdy różnica potencjałów stanie się równa różnicy potencjałów na źródle (równej tu SEM $\mathcal{E}$), natężenie prądu stanie się równe zero. Zgodnie ze wzorem (26.1) ($q = CU$) *stacjonarny (końcowy) ładunek* na całkowicie wtedy naładowanym kondensatorze wynosi $C\mathcal{E}$.

Chcemy teraz zbadać proces ładowania. W szczególności chcemy wiedzieć, jak podczas ładowania zmieniają się w czasie: ładunek $q(t)$ na okładkach kondensatora, różnica potencjałów $U_C(t)$ na kondensatorze i natężenie prądu $I(t)$ w obwodzie. Zaczniemy od zastosowania do obwodu drugiego prawa Kirchhoffa przechodząc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, od ujemnego bieguna baterii. Otrzymujemy wtedy:

$$\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0. \quad (28.27)$$

Ostatni wyraz po lewej stronie równania przedstawia różnicę potencjałów na kondensatorze. Wyraz ten jest ujemny, ponieważ górna okładka kondensatora, połączona z dodatnim biegunem baterii, ma większy potencjał niż dolna okładka. Istnieje więc spadek potencjału, bo przechodzimy przez kondensator w kierunku w dół.

Nie możemy bezpośrednio rozwiązać równania (28.27), ponieważ zawiera ono dwie zmienne I i q . Jednak zmienne te są zależne i powiązane wzorem:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (28.28)$$

Po podstawieniu wyrażenia na I do wzoru (28.27) i przestawieniu wyrazów, otrzymujemy:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad (\text{równanie ładowania}). \quad (28.29)$$

Powyższe równanie różniczkowe opisuje zależność od czasu ładunku q na kondensatorze, na rysunku 28.13. Aby je rozwiązać, musimy znaleźć funkcję $q(t)$, która spełnia to równanie oraz warunek początkowy, że kondensator jest początkowo nienaładowany, czyli $q = 0$ dla $t = 0$.

Pokażemy wkrótce, że rozwiązaniem równania (28.29) jest:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (\text{ładowanie kondensatora}), \quad (28.30)$$

gdzie $e = 2,718 \dots$ jest podstawą logarytmów naturalnych, a nie symbolem elektronu. Zauważ, że funkcja ze wzoru (28.30) rzeczywiście spełnia nasz warunek

początkowy, ponieważ dla $t = 0$ wyraz $e^{-t/(RC)}$ jest równy jedności i zgodnie ze wzorem otrzymujemy wtedy $q = 0$. Zauważ też, że gdy czas dąży do nieskończoności, wyraz $e^{-t/(RC)}$ dąży do zera i wzór daje poprawną wartość końcowego (stacjonarnego) ładunku na kondensatorze $q = C\mathcal{E}$. Wykres $q(t)$ dla procesu ładowania jest przedstawiony na rys. 28.14a.

Pochodna funkcji $q(t)$ względem czasu jest równa natężeniu prądu $I(t)$, ładującego kondensator

$$I = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-t/(RC)} \quad (\text{ładowanie kondensatora}). \quad (28.31)$$

Wykres funkcji $I(t)$ dla procesu ładowania jest przedstawiony na rys. 28.14b. Zauważ, że wartość początkowa natężenia prądu wynosi $\mathcal{E}/R$ i że natężenie maleje do zera, gdy kondensator zostanie całkowicie naładowany.

➤ Ładowany kondensator początkowo zachowuje się przy przepływie prądu jak zwykły przewodnik bez oporu, a po upływie długiego czasu jak przerwa w obwodzie.

Stosując wzory (26.1) ($q = CU$) i (28.30), znajdujemy różnicę potencjałów $U_C(t)$ na kondensatorze podczas ładowania:

$$U_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (\text{ładowanie kondensatora}) \quad (28.32)$$

Z otrzymanego wzoru widzimy, że $U_C = 0$ dla $t = 0$ i że $U_C = \mathcal{E}$ dla $t \rightarrow \infty$, gdy kondensator zostanie całkowicie naładowany.

Stała czasowa

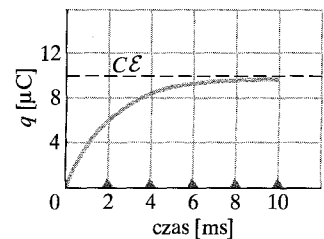
Iloczyn RC występujący we wzorach (28.30), (28.31) i (28.32) ma wymiar czasu (bo argument funkcji wykładniczej musi być bezwymiarowy, a $1 \Omega \cdot 1 \text{ F} = 1 \text{ s}$). Wielkość RC nazywamy **pojemnościową stałą czasową** obwodu i oznaczamy symbolem τ :

$$\tau = RC \quad (\text{stała czasowa}). \quad (28.33)$$

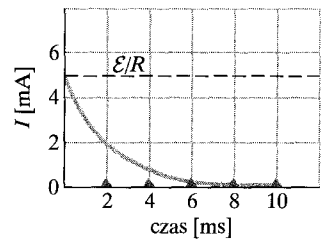
Ze wzoru (28.30) widzimy teraz, że w chwili $t = \tau (= RC)$ ładunek na początkowo nienaladowanym kondensatorze z rys. 28.13 wzrasta od zera do wartości:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) = 0,63C\mathcal{E}. \quad (28.34)$$

Innymi słowy, w ciągu czasu, równego stałej czasowej τ ładunek wzrasta od zera do 63% końcowej wartości $C\mathcal{E}$. Na rysunku 28.14 małe trójkąty na osi czasu oznaczają kolejne przedziały czasu, równe stałej czasowej w procesie ładowania kondensatora. Czasy ładowania kondensatora wyrażamy często przez podanie τ ; im większą wartość ma τ , tym dłuższy jest czas ładowania.



a)



b)

Rys. 28.14. a) Wykres zależności ze wzoru (28.30) opisującej narastanie ładunku na kondensatorze z rysunku 28.13. b) Wykres zależności ze wzoru (28.31), opisującej zmniejszanie się prądu ładowania w obwodzie z rysunku 28.13. Krzywe zostały wykreślone dla $R = 2000 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ i $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$; małe trójkąty oznaczają kolejne wielokrotności stałej czasowej τ

Rozładowanie kondensatora

Założmy teraz, że kondensator na rys. 28.13 jest całkowicie naładowany do różnicy potencjałów U_0 , równej SEM $\mathcal{E}$ źródła i w chwili $t = 0$ klucz S przestawiamy z punktu a do punktu b . Kondensator może się więc rozładowywać przez opornik R . Jak ładunek $q(t)$ na kondensatorze i natężenie prądu $I(t)$ płynącego przez obwód, zawierający kondensator i opornik, zmieniają się w czasie?

Równanie różniczkowe, opisujące $q(t)$ jest identyczne z równaniem (28.29), lecz teraz nie ma w obwodzie źródła, czyli należy przyjąć $\mathcal{E} = 0$. Stąd:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (\text{równanie rozładowania}). \quad (28.35)$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego ma postać:

$$q = q_0 e^{-t/(RC)} \quad (\text{rozładowanie kondensatora}), \quad (28.36)$$

gdzie $q_0 (= CU_0)$ jest początkowym ładunkiem na kondensatorze. Przez podstawienie można sprawdzić, że funkcja ze wzoru (28.36) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (28.35).

Ze wzoru (28.36) wynika, że ładunek q maleje wykładniczo w czasie, z szybkością zależną od pojemnościowej stałej czasowej $\tau = RC$. W chwili $t = \tau$ ładunek na kondensatorze wynosi qe^{-1} , czyli 37% początkowej wartości. Zauważ, że większa stała τ oznacza dłuższy czas rozładowania.

Przez różniczkowanie funkcji $q(t)$ ze wzoru (28.36) względem czasu otrzymamy natężenie prądu $I(t)$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/(RC)} \quad (\text{rozładowanie kondensatora}). \quad (28.37)$$

Z otrzymanego wzoru wynika, że natężenie prądu także maleje wykładniczo w czasie z szybkością określoną przez τ . Początkowo natężenie prądu jest równe $I_0 = q_0/(RC)$. Zauważ, że I_0 możemy znaleźć, stosując drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu w chwili $t = 0$; wtedy początkowa różnica potencjałów U_0 jest również różnicą potencjałów na oporniku R , czyli natężenie prądu musi wynosić $I_0 = U_0/R = (q_0/C)/R = q_0/(RC)$. Znak minus we wzorze (28.37) oznacza, że prąd rozładowania kondensatora płynie w kierunku przeciwnym niż prąd jego ładowania.

Wyprowadzenie wzoru (28.30)

Aby rozwiązać równanie (28.29), przepiszemy je najpierw w postaci:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (28.38)$$

Ogólne rozwiązanie tego równania różniczkowego ma postać:

$$q = q_p + K e^{-at}, \quad (28.39)$$

gdzie q_p jest rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego, K jest stałą, którą trzeba obliczyć z warunków początkowych, a $a = 1/(RC)$ jest współczynnikiem przy q w równaniu (28.38). Aby znaleźć q_p , podstawiamy $dq/dt = 0$ we wzorze (28.38) (co odpowiada warunkowi końcowemu, jakim jest brak dalszego ładowania), wstawiamy $q = q_p$ i jako rozwiązanie otrzymujemy:

$$q_p = C\mathcal{E}. \quad (28.40)$$

Aby obliczyć K , podstawiamy otrzymany wynik do wzoru (28.39):

$$q = C\mathcal{E} + Ke^{-at}$$

i uwzględniając warunek początkowy $q = 0$ dla $t = 0$, mamy:

$$0 = C\mathcal{E} + K,$$

czyli $K = -C\mathcal{E}$. Po podstawieniu otrzymanych wartości q_p , a i K do wzoru (28.39) otrzymujemy:

$$q = C\mathcal{E} - C\mathcal{E}e^{-t/(RC)},$$

co odpowiada wzorowi (28.30).

SPRAWDZIAN 5: W tabelce podano cztery zestawy wartości parametrów obwodu z rys. 28.13. Uszereguj je zgodnie z wartościami: a) początkowego natężenia prądu (po przesunięciu klucza do punktu a), b) czasu, potrzebnego na zmniejszenie natężenia prądu do połowy początkowej wartości, zaczynając od wartości największych.

	1	2	3	4
$\mathcal{E}$ [V]	12	12	10	10
R [Ω]	2	3	10	5
C [μ F]	3	2	0,5	2

Przykład 28.5

Kondensator o pojemności C rozładowuje się przez opornik o oporze R .

a) Kiedy ładunek kondensatora zmaleje do połowy początkowej wartości (odpowiedź wyraż przez stałą czasową $\tau = RC$)?

ROZWIĄZANIE:

➡ Ładunek na kondensatorze zmienia się zgodnie ze wzorem (28.36):

$$q = q_0 e^{-t/(RC)},$$

gdzie q_0 jest ładunkiem początkowym. Mamy znaleźć czas t , w którym $q = \frac{1}{2}q_0$, czyli w którym:

$$\frac{1}{2}q_0 = q_0 e^{-t/(RC)}. \quad (28.41)$$

Zauważamy, że poszukiwany czas t występuje w wykładniku i możemy skrócić q_0 . Aby obliczyć czas t ze wzoru (28.41), obliczmy logarytmy naturalne z obydwu stron równania. (Logarytm

naturalny jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej o podstawie e). Otrzymujemy:

$$\ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-t/(RC)}) = -\frac{t}{RC},$$

czyli

$$t = \left(-\ln \frac{1}{2}\right)RC = 0,69RC = 0,69\tau. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Kiedy energia, zmagazynowana w kondensatorze, zmaleje do połowy początkowej wartości?

ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Energia E_p , zmagazynowana w kondensatorze, jest związana z ładunkiem q na kondensatorze wzorem (26.21) ($E_p = Q^2/(2C)$).

➡ 2. Ładunek maleje zgodnie ze wzorem (28.36). Łącząc te dwie informacje, otrzymujemy:

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} e^{-2t/(RC)} = E_{p0} e^{-2t/(RC)},$$

gdzie E_{p0} jest początkową wartością zmagazynowanej energii. Mamy znaleźć czas, w którym $E_p = \frac{1}{2}E_{p0}$, czyli w którym:

$$\frac{1}{2}E_{p0} = E_{p0}e^{-2t/(RC)}.$$

Skracając E_{p0} i obliczając logarytmy naturalne z obydwu stron, otrzymujemy:

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{2t}{RC},$$

czyli

$$t = -RC \frac{\ln \frac{1}{2}}{2} = 0,35RC = 0,35\tau. \quad (\text{odpowiedź})$$

Potrzeba więcej czasu ($0,69\tau$ w stosunku do $0,35\tau$), aby ładunek zmalał do połowy swej początkowej wartości, niż aby zmagazynowana energia zmalała do połowy swej początkowej wartości. Czy to cię nie dziwi?

Podsumowanie

SEM Źródło SEM wykonuje pracę nad ładunkami, aby utrzymać różnicę potencjałów między biegunami źródła. Jeśli dW jest pracą, wykonaną przez źródło przy przesuwaniu dodatniego ładunku dq od ujemnego do dodatniego bieguna, to SEM źródła (praca na jednostkę ładunku) wynosi:

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} \quad (\text{definicja SEM}). \quad (28.1)$$

Jednostką SEM w układzie SI, podobnie jak różnicy potencjałów, jest volt (V). **Doskonałym źródłem SEM** jest źródło nie mające oporu wewnętrznego. Różnica potencjałów między biegunami takiego źródła jest równa SEM. **Rzeczywiste źródło SEM** ma opór wewnętrzny. Różnica potencjałów między jego biegunami jest równa SEM tylko wtedy, gdy przez źródło nie płynie żaden prąd.

Analiza obwodów Zmiana potencjału przy przechodzeniu przez opornik R w kierunku przepływu prądu wynosi $-IR$, a w przeciwnym kierunku $+IR$. Zmiana potencjału przy przechodzeniu przez doskonałe źródło SEM w kierunku strzałki SEM wynosi $+\mathcal{E}$, a w przeciwnym $-\mathcal{E}$. Z zasady zachowania energii wynika drugie prawo Kirchhoffa:

Drugie prawo Kirchhoffa. Algebraiczna suma zmian potencjałów przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zero.

Z zasady zachowania ładunku wynika pierwsze prawo Kirchhoffa:

Pierwsze prawo Kirchhoffa. Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.

Obwody o jednym oczku. Natężenie prądu w obwodzie o jednym oczku, zawierającym pojedynczy opornik R i źródło o SEM równej $\mathcal{E}$ i o wewnętrznym oporze r , wynosi:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}, \quad (28.4)$$

co redukuje się do $I = \mathcal{E}/R$ dla doskonałego źródła SEM o oporze wewnętrznym $r = 0$.

Moc Jeśli rzeczywiste źródło o SEM równej $\mathcal{E}$ i wewnętrznym oporze r wykonuje pracę nad nośnikami ładunku przepływającego przez nią prądu o natężeniu I , to moc źródła (szybkość przekazywania energii nośnikom ładunku) wynosi

$$P = IU, \quad (28.11)$$

gdzie U jest różnicą potencjałów między biegunami źródła. Moc P_r zamiany energii na energię termiczną w źródle wynosi:

$$P_r = I^2r. \quad (28.13)$$

Szybkość zmiany energii chemicznej P_{SEM} w źródle wynosi:

$$P_{SEM} = I\mathcal{E}. \quad (28.14)$$

Oporniki połączone szeregowo Jeśli oporniki są połączone szeregowo, to płynie przez nie prąd o tym samym natężeniu. Opór równoważny, który zastępuje układ połączonych szeregowo oporników, wynosi:

$$R_{rw} = \sum_{j=1}^n R_j \quad (n \text{ oporników połączonych szeregowo}). \quad (28.7)$$

Oporniki połączone równolegle Jeśli oporniki są połączone równolegle, to różnica potencjałów na nich jest taka sama. Opór równoważny, który zastępuje oporniki połączone równolegle, jest określony wzorem:

$$\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ oporników połączonych równolegle}). \quad (28.21)$$

Obwody RC Jeśli SEM o wartości $\mathcal{E}$ jest przyłożona do opornika o oporze R i kondensatora o pojemności C połączonych szeregowo, jak na rysunku (28.13), z kluczem w punkcie a , to ładunek na kondensatorze wzrasta zgodnie ze wzorem:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (\text{ładowanie kondensatora}), \quad (28.30)$$

w którym $C\mathcal{E} = q_0$ jest stacjonarnym (końcowym) ładunkiem, a $RC = \tau$ jest **pojemnościową stałą czasową** obwodu. Podczas ładowania natężenie prądu wynosi:

$$I = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-t/(RC)} \quad (\text{ładowanie kondensatora}). \quad (28.31)$$

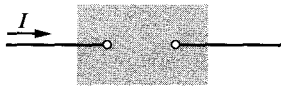
Jeśli kondensator rozładowuje się przez opornik R , to ładunek na kondensatorze maleje zgodnie ze wzorem:

$$q = q_0e^{-t/(RC)} \quad (\text{rozładowanie kondensatora}). \quad (28.36)$$

Natężenie prądu podczas rozładowywania kondensatora wynosi:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/(RC)} \quad (\text{rozładowanie kondensatora}). \quad (28.37)$$

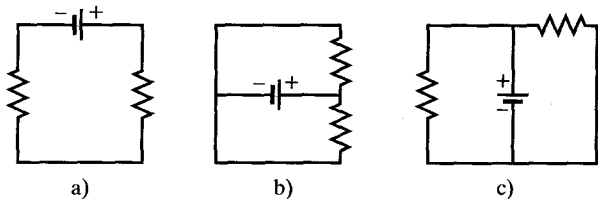
1. Na rysunku 28.15 przedstawiono przepływ prądu o natężeniu I przez źródło. W tabeli podano cztery zestawy wartości: natężenia I oraz SEM $\mathcal{E}$ i oporu wewnętrznego r źródła; podano także polaryzację (orientację biegunów) źródła. Uszereguj układy według mocy przekazywania energii ze źródła do nośników ładunku, zaczynając od największego przekazu do nośników i kończąc na największym przekazywaniu energii od nośników.



Rys. 28.15. Pytanie 1

	$\mathcal{E}$	r	I	Polaryzacja
(1)	$15\mathcal{E}_1$	0	I_1	+ z lewej
(2)	$10\mathcal{E}_1$	0	$2I_1$	+ z lewej
(3)	$10\mathcal{E}_1$	0	$2I_1$	- z lewej
(4)	$10\mathcal{E}_1$	r_1	$2I_1$	- z lewej

2. Czy oporniki w każdym z obwodów na rysunku 28.16 są połączone szeregowo, równolegle, czy w inny sposób?



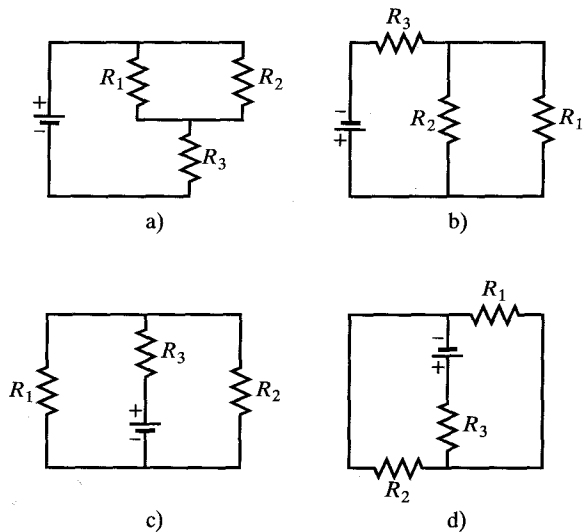
Rys. 28.16. Pytanie 2

3. a) Czy na rysunku 28.17a oporniki R_1 i R_3 są połączone szeregowo? b) Czy oporniki R_1 i R_2 są połączone równolegle? c) Uszereguj równoważne opory czterech obwodów, przedstawionych na rysunku 28.17, zaczynając od największego.

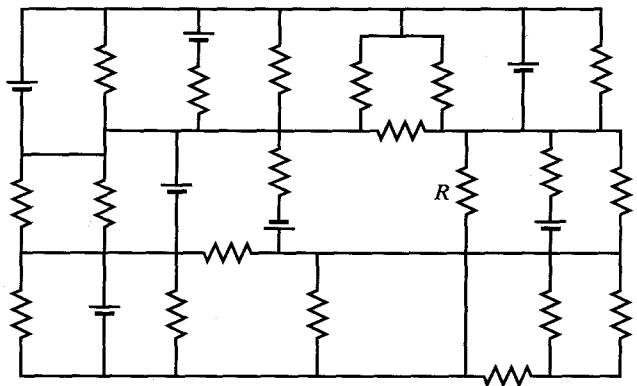
4. a) Czy na rysunku 28.17a różnica potencjałów na oporniku R_2 jest większa, mniejsza, czy równa różnicy potencjałów na oporniku R_1 , jeśli $R_1 > R_2$? b) Czy natężenie prądu płynącego przez opornik R_2 jest większe, mniejsze, czy równe natężeniu prądu płynącego przez opornik R_1 ?

5. Mamy połączyć oporniki R_1 i R_2 , ($R_1 > R_2$), ze źródłem, najpierw pojedynczo, potem szeregowo i na końcu równolegle. Uszereguj te układy według natężenia prądu, płynącego przez źródło, zaczynając od największego.

6. *Monstrualny labirynt z oporników.* Na rysunku 28.18 wszystkie oporniki mają opór $4\ \Omega$ i wszystkie (doskonałe) źródła mają



Rys. 28.17. Pytania 3 i 4

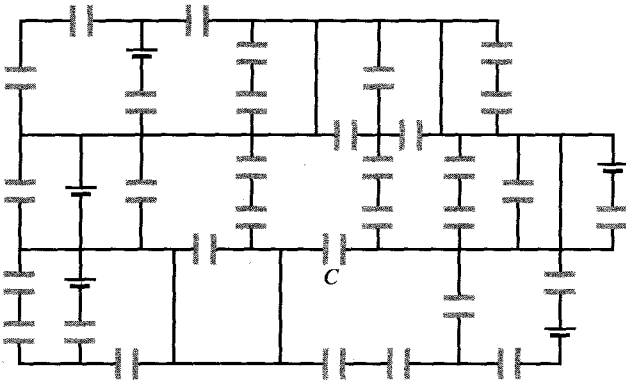


Rys. 28.18. Pytanie 6

SEM 4 V . Ile wynosi natężenie prądu, płynącego przez opornik R ? (Jeśli znajdziesz właściwe oczko w tym labiryncie, to możesz odpowiedzieć na pytanie po kilku sekundach obliczeń w pamięci).

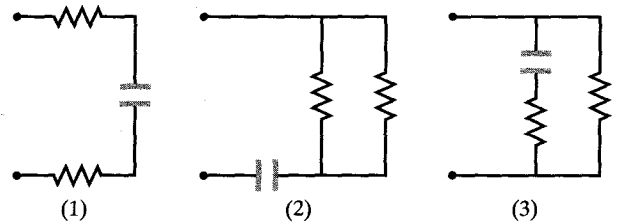
7. Początkowo do źródła podłączono pojedynczy opornik R_1 . Potem dołączono równolegle opornik R_2 . Czy a) różnica potencjałów na oporniku R_1 , b) natężenie prądu I_1 płynącego przez opornik R_1 były większe, mniejsze, czy takie same, jak poprzednio? c) Czy opór równoważny R_{12} dla R_1 i R_2 jest większy, mniejszy, czy równy R_1 ? d) Czy natężenie całkowitego prądu przepływającego przez oporniki R_1 i R_2 jest większe, mniejsze czy równe natężeniu prądu, przepływającego przez opornik R_1 poprzednio?

8. *Monstrualny labirynt z kondensatorów.* Na rysunku 28.19 wszystkie kondensatory mają pojemność $6\mu\text{F}$ i wszystkie źródła mają SEM 10 V . Ile wynosi ładunek na kondensatorze C ? (Jeśli znajdziesz właściwe oczko w tym labiryncie, to możesz odpowiedzieć na pytanie po kilku sekundach obliczeń w pamięci).



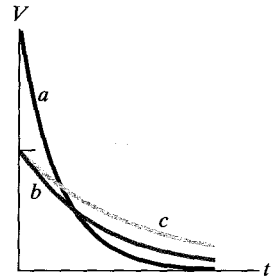
Rys. 28.19. Pytanie 8

9. Opornik R_1 podłączono do źródła, a następnie dołączono szeregowo opornik R_2 . Czy a) różnica potencjałów na oporniku R_1 , b) natężenie prądu I_1 , przepływającego przez opornik R_1 są teraz większe, mniejsze, czy takie same, jak poprzednio? c) Czy opór równoważny R_{12} dla R_1 i R_2 jest większy, mniejszy czy równy oporowi R_1 ?



Rys. 28.20. Pytanie 10

10. Na rysunku 28.20 przedstawiono trzy fragmenty obwodu, które kolejno będą podłączane do tego samego źródła przez klucz, jak na rysunku 28.13. Wszystkie oporniki są identyczne, podobnie jak kondensatory. Uszereguj fragmenty według wartości: a) końcowego (stacjonarnego) ładunku na kondensatorze, b) czasu, potrzebnego do osiągnięcia przez kondensator 50% jego końcowego ładunku, zaczynając od wartości największych.



Rys. 28.21. Pytanie 11

11. Na rysunku 28.21 przedstawiono wykresy $U(t)$ dla trzech kondensatorów, które rozładowują się (oddzielnie) przez ten sam opornik. Uszereguj wykresy według pojemności kondensatorów, zaczynając od największej.

Zadania

www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-
Ware (na tej samej stronie)

28.5. Różnica potencjałów

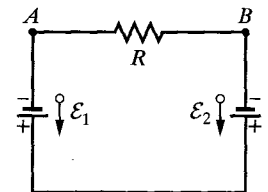
1. Standardowa bateria do latarki może dostarczyć około 2 Wh energii, zanim się rozładuje. a) Jaki będzie koszt działania żarówki 100 W przez 8 h , przy zastosowaniu takich baterii, jeśli jedna bateria kosztuje 3 zł ? b) Jaki jest ten koszt, jeśli energia jest dostarczana w cenie $0,3\text{ zł}$ za kilowatogodzinę?

2. Prąd o natężeniu 5 A płynął przez 6 minut przez obwód z akumulatorem o SEM równej 6 V . O ile zmniejszyła się energia chemiczna akumulatora?

3. Pewien akumulator samochodowy o SEM równej 12 V ma początkowy ładunek 120 Ah (nazywany potocznie „pojemnością”

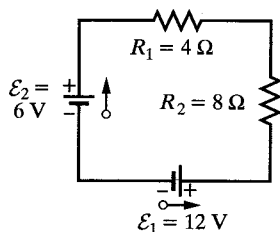
akumulatora). Oblicz jak długo może on dostarczać energii z mocą 100 W , przyjmując, że różnica potencjałów na biegunach akumulatora pozostaje stała, aż do całkowitego rozładowania akumulatora.

4. Na rysunku 28.22 $\mathcal{E}_1 = 12\text{ V}$ i $\mathcal{E}_2 = 8\text{ V}$. a) Jaki jest kierunek prądu, płynącego przez opornik? b) Które źródło wykonuje dodatnią pracę? c) Który punkt, A czy B, ma większy potencjał?



Rys. 28.22. Zadanie 4

5. Załóżmy, że źródła na rysunku 28.23 mają zaniedbywalne opory wewnętrzne. Znajdź: a) natężenie prądu w obwodzie, b) moc z jaką energia jest zamieniana na energię termiczną w każdym oporniku, c) moc każdego źródła ze stwierdzeniem, czy energia jest dostarczana, czy absorbowana przez źródło.



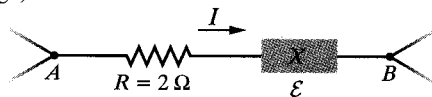
Rys. 28.23. Zadanie 5

6. Przewodnik o oporze $5\ \Omega$ jest połączony ze źródłem, którego SEM wynosi 2 V , a opór wewnętrzny $1\ \Omega$. a) Ile energii przekształca się z chemicznej w elektryczną w ciągu 2 min , b) ile energii wydzielą się w przewodniku w postaci energii termicznej w tym samym czasie? c) Wyjaśnij, dlaczego odpowiedzi na pytania (a) i (b) są różne.

7. Akumulator samochodowy o SEM równej 12 V i oporze wewnętrznym $0,04\ \Omega$ jest ładowany prądem o natężeniu 50 A . a) Ile wynosi różnica potencjałów na jego biegunach? b) Ile wynosi moc, z jaką energia zamienia się na energię termiczną w akumulatorze? c) Ile wynosi moc przekształcania energii elektrycznej w energię chemiczną? d) Jakie będą odpowiedzi na pytania (a) i (b), gdy akumulator będzie dostarczać prąd o natężeniu 50 A do rozrusznika silnika?

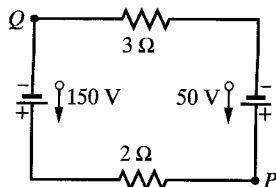
8. Przyjmij, że na rysunku 28.4a $\mathcal{E} = 2\text{ V}$ i $r = 100\ \Omega$. Wykreśl: a) natężenie prądu, b) różnicę potencjałów na oporniku w zależności od R w przedziale od 0 do $500\ \Omega$. Obydwa wykresy zrób na tym samym rysunku. c) Zrób trzeci wykres przez pomnożenie dla różnych wartości R odpowiednich współrzędnych dwóch wykreślonych krzywych. Jaki jest sens fizyczny tego trzeciego wykresu?

9. Na rysunku 28.24 część AB obwodu absorbuje energię z mocą 50 W przy przepływie prądu o natężeniu $I = 1\text{ A}$ we wskazanym kierunku. a) Ile wynosi różnica potencjałów między A i B ? b) Ile wynosi SEM źródła X , jeśli nie ma ono oporu wewnętrznego? c) Jaka jest jego polaryzacja (położenie biegunów dodatniego i ujemnego)?



Rys. 28.24. Zadanie 9

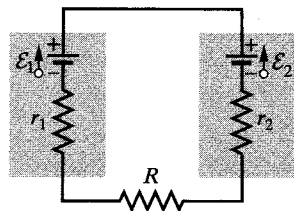
10. Ile wynosi potencjał w punkcie Q obwodu na rysunku 28.25, jeśli potencjał w punkcie P wynosi 100 V ?



Rys. 28.25. Zadanie 10

11. Oblicz różnicę potencjałów między punktami a i c na rys. 28.6a, rozważając odciinek z R , r_1 i $\mathcal{E}_1$.

12. a) Jaką wartość musi mieć opór R na rys. 28.26, jeśli prąd w obwodzie ma mieć natężenie 1 mA ? Przyjmij wartości: $\mathcal{E}_1 = 2\text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 3\text{ V}$ i $r_1 = r_2 = 3\ \Omega$. b) Z jaką mocą rozpraszają się energia w oporniku?



Rys. 28.26. Zadanie 12

13. Natężenie prądu w obwodzie o jednym oczku z jednym opornikiem R wynosi 5 A . Po szeregowym podłączeniu do R dodatkowego opornika o oporze $2\ \Omega$ natężenie prądu zmalało do 4 A . Ile wynosi opór R ?

14. Uruchamiany silnik samochodu obraca się zbyt wolno i mechanik musi zdecydować, czy wymienić silnik, przewód, czy akumulator. Według instrukcji producenta opór wewnętrzny akumulatora 12 V nie powinien być większy niż $0,02\ \Omega$, opór silnika większy niż $0,2\ \Omega$ i opór przewodu większy niż $0,04\ \Omega$. Mechanik włączył silnik i zmierzył natężenie prądu 50 A i różnicę potencjałów $11,4\text{ V}$ na akumulatorze oraz 3 V na przewodzie. Która część jest wadliwa?

15. Dwa źródła, mające tę samą SEM, ale różne opory wewnętrzne r_1 i r_2 ($r_1 > r_2$), są połączone szeregowo ze sobą i z zewnętrznym opornikiem R . a) Wyznacz wartość R , która daje zerową różnicę potencjałów na biegunach jednego źródła. b) Które to jest źródło?

16. Ogniwo słoneczne wytwarza różnicę potencjałów $0,1\text{ V}$, gdy jest do niego podłączony opornik o oporze $500\ \Omega$, i różnicę potencjałów $0,15\text{ V}$, gdy opornik ma opór $1000\ \Omega$. Ile wynosi: a) opór wewnętrzny, b) SEM ogniwa słonecznego? c) Pole powierzchni ogniwa wynosi 5 cm^2 i moc absorbowanej energii świetlnej na jednostkę powierzchni wynosi 2 mW/cm^2 . Ile wynosi sprawność ogniwa, przekształcającego energię świetlną na energię termiczną w zewnętrznym oporniku o oporze $1000\ \Omega$?

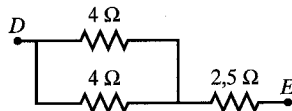
17. a) Wykaż, że na rysunku 28.4a szybkość zamiany energii w oporniku R na energię termiczną jest maksymalna, gdy $R = r$. b) Wykaż, że ta maksymalna moc wynosi $P = \mathcal{E}^2/(4r)$.

28.6. Obwody o wielu oczkach

18. Przy zastosowaniu tylko dwóch oporników — włączonych pojedynczo lub połączonych szeregowo albo równolegle — możemy otrzymać opory 3 , 4 , 12 i $16\ \Omega$. Jakie opory mają te dwa oporniki?

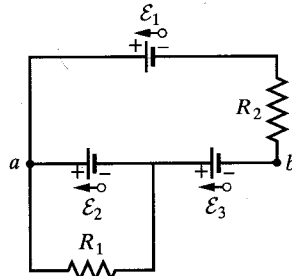
19. Cztery oporniki o oporach $18\ \Omega$ połączono równolegle i dołączono do doskonałego źródła o SEM równej 25 V . Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez źródło?

20. Znajdź opór równoważny między punktami D i E na rys. 28.27. (Wskazówka: Wyobraź sobie, że do punktów D i E dołączone jest źródło).



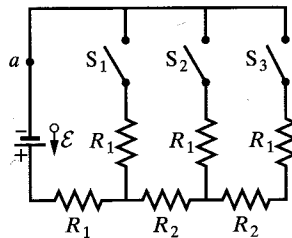
Rys. 28.27. Zadanie 20

21. Znajdź natężenie prądu, płynącego przez każdy opornik i różnicę potencjałów między punktami a i b na rysunku 28.28. Przyjmij $\mathcal{E}_1 = 6\text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 5\text{ V}$, $\mathcal{E}_3 = 4\text{ V}$, $R_1 = 100\ \Omega$ i $R_2 = 50\ \Omega$.



Rys. 28.28. Zadanie 21

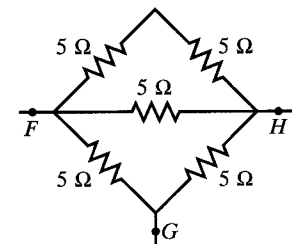
22. Na rysunku 28.29 przedstawiono obwód z trzema kluczami, oznaczonymi przez S_1 , S_2 i S_3 . Znajdź natężenie prądu w punkcie a dla wszystkich możliwych kombinacji ustawień kluczy. Przyjmij $\mathcal{E} = 120\text{ V}$, $R_1 = 20\ \Omega$ i $R_2 = 10\ \Omega$. Załóż, że bateria nie ma oporu wewnętrznego.



Rys. 28.29. Zadanie 22

24. Oblicz różnicę potencjałów między punktami c i d na rysunku 28.7, po przeanalizowaniu wszystkich możliwych dróg. Przyjmij $\mathcal{E}_1 = 4\text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 1\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$ i $R_3 = 5\ \Omega$.

25. Dziewięć drutów miedzianych o długości l i średnicy d połączono równolegle, tak że tworzą jeden złożony przewodnik o oporze R . Jaka musi być średnica D pojedynczego drutu miedzianego o długości l , jeśli ma on mieć taki sam opór?



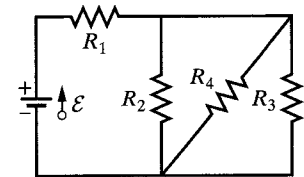
Rys. 28.30. Zadanie 26

26. Oblicz równoważny opór między punktami: a) F i H . b) F i G na rysunku 28.30. (Wskazówka: Wyobraź sobie dla każdej pary punktów, że podłączone jest do nich źródło).

27. Masz kilka oporników $10\ \Omega$, w każdym z nich może wydzielac się energia termiczna z mocą 1 W bez ich zniszczenia. Jaka jest minimalna liczba takich oporników, aby przy ich połącze-

niu szeregowym lub równoległym uzyskać opór $10\ \Omega$, w którym energia termiczna może się wydzielac z mocą przynajmniej 5 W ?

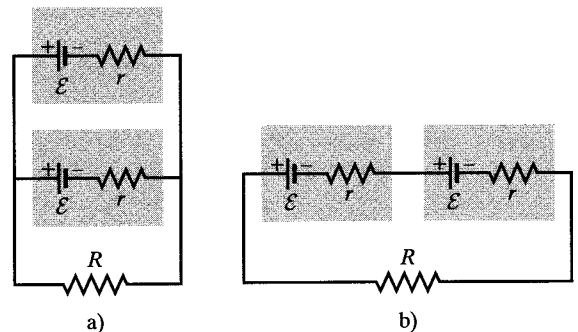
28. a) Ile wynosi równoważny opór sieci, przedstawionej na rysunku 28.31? b) Ile wynosi natężenie prądu, płynącego przez każdy opornik? Przyjmij, że źródło jest doskonałe oraz $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 50\ \Omega$, $R_4 = 75\ \Omega$ i $\mathcal{E} = 6\text{ V}$.



Rys. 28.31. Zadanie 28

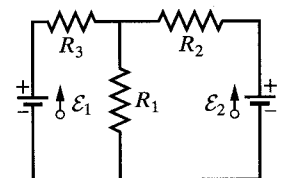
29. Dwa źródła o SEM równej $\mathcal{E}$ i oporze wewnętrznym r są połączone równolegle i jest do nich dołączony opornik o oporze R (rys. 28.32a). a) Dla jakiej wartości R moc, z jaką energia elektryczna w oporniku zamienia się na energię termiczną, jest maksymalna? b) Ile wynosi ta maksymalna moc?

30. Dwa źródła o SEM równej $\mathcal{E}$ i oporze wewnętrznym r mogą być połączone albo równolegle (jak na rysunku 28.32a), albo szeregowo (jak na rysunku 28.32b), aby wytworzyć prąd w oporniku R . a) Wyprowadź wyrażenia na natężenie prądu, płynącego przez opornik R dla obydwu konfiguracji. Dla której z nich natężenie prądu będzie większe, gdy: b) $R > r$, c) $R < r$?



Rys. 28.32. Zadania 29 i 30

31. Na rysunku 28.33 $\mathcal{E}_1 = 3\text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 1\text{ V}$, $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$ i oba źródła są doskonałe. Jaka jest moc zamiany energii na energię termiczną w: a) R_1 , b) R_2 , c) R_3 ? Jaka jest moc źródła d) $\mathcal{E}_1$, e) $\mathcal{E}_2$?



Rys. 28.33. Zadanie 31

32. Dla jakiej wartości R w obwodzie na rysunku 28.34 z doskonałym źródłem moc źródła: a) wyniesie 60 W , b) będzie maksy-

malna, c) będzie minimalna?
d) Jaka jest ta maksymalna i minimalna moc?

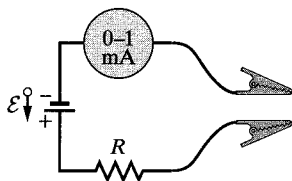
33. a) Oblicz natężenie prądu, płynącego przez każde źródło doskonałe na rysunku 28.35. Przyjmij $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ V}$ i $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4 \text{ V}$. b) Oblicz $V_a - V_b$.

34. W obwodzie na rysunku 28.36 SEM ma stałą wartość, a opór R można zmieniać. Znajdź wartość R , dla której w tym oporniku wydziela się najwięcej energii termicznej. Źródło jest doskonałe.

35. Druk miedziany o promieniu $a = 0,25 \text{ mm}$ ma płaszcz aluminiowy o zewnętrznym promieniu $b = 0,38 \text{ mm}$. a) W tym złożonym przewodzie płynie prąd o natężeniu $I = 2 \text{ A}$. Korzystając z tabeli 27.1, oblicz natężenie prądu w każdym z materiałów. b) Jaka jest długość tego złożonego przewodu, jeśli prąd jest wytwarzany przez różnicę potencjałów $U = 12 \text{ V}$ na końcach przewodu?

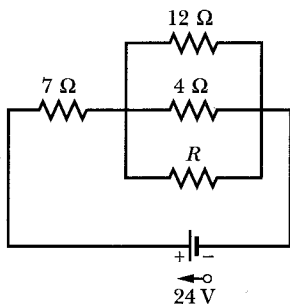
28.7. Amperomierz i woltomierz

36. Na rysunku 28.37 przedstawiono prosty omomierz, skonstruowany przez połączenie szeregowo baterii $1,5 \text{ V}$ (od latarki), opornika R i amperomierza o zakresie od 0 do 1 mA . Opór R jest tak dobrany, że przy zwarcu zacisków miernik wskazuje maksymalne natężenie 1 mA . Jakemu zewnętrznemu oporowi między zaciskami odpowiada wskazanie: a) $0,1 \text{ mA}$, b) $0,5 \text{ mA}$, c) $0,9 \text{ mA}$? d) Jaka jest wartość R , jeśli amperomierz ma opór 20Ω i opór wewnętrzny źródła jest zaniedbywalny?

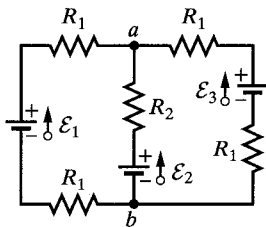


Rys. 28.37. Zadanie 36

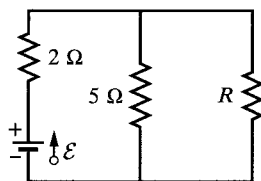
37. a) Określ wskazanie amperomierza na rysunku 28.38, jeśli $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$ (i źródło jest doskonałe), $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$ i $R_3 = 6 \Omega$. b) Zamieniono teraz położenie amperomierza i źródła SEM. Wykaż, że wskazania amperomierza się nie zmieniają.



Rys. 28.34. Zadanie 32

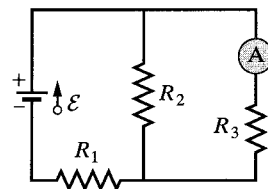


Rys. 28.35. Zadanie 33

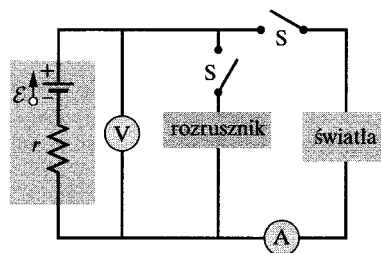


Rys. 28.36. Zadanie 34

Rys. 28.38. Zadanie 37



38. Gdy włączono światła samochodu, woltomierz wskazał na nich różnicę potencjałów 12 V , a podłączony szeregowo amperomierz wskazał natężenie 10 A (rys. 28.39). Gdy następnie włączono rozrusznik, wskazanie amperomierza zmalało do 8 A i światła przyciemniły się nieco. Jakże są: a) SEM akumulatora, b) natężenie prądu płynącego przez rozrusznik przy zapalonych światłach, jeśli opór wewnętrzny akumulatora wynosi $0,05 \Omega$, a opór amperomierza jest znikomo mały?



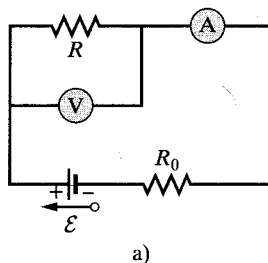
Rys. 28.39. Zadanie 38

39. Na rysunku 28.12 przyjmij $\mathcal{E} = 3 \text{ V}$, $r = 100 \Omega$, $R_1 = 250 \Omega$ i $R_2 = 300 \Omega$. Jaki błąd (w procentach) wprowadza do pomiaru różnicy potencjałów na oporniku R_1 fakt, że opór woltomierza $R_V = 5 \text{ k}\Omega$? Zaniedbaj obecność amperomierza.

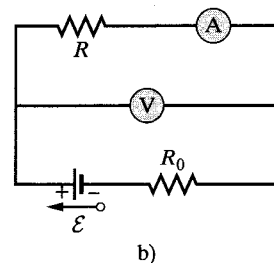
40. Do obwodu włączono woltomierz (o oporze R_V) i amperomierz (o oporze R_A), aby zmierzyć opór R (rys. 28.40a). Opór jest określony wzorem $R = U/I$, gdzie U jest wskazaniem woltomierza, a I jest natężeniem prądu, przepływającego przez opornik R . Amperomierz rejestruje prąd o natężeniu I' , lecz część tego prądu przepływa przez woltomierz, tak że stosunek wskazań mierników ($= U/I'$) daje tylko przybliżoną wartość oporu R' . Wykaż, że R i R' są powiązane wzorem:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_V}.$$

Zwróć uwagę, że $R' \rightarrow R$, gdy $R_V \rightarrow \infty$.



a)



b)

Rys. 28.40. Zadania 40–42

41. Jeśli amperomierz i woltomierz mają zostać zastosowane do pomiaru oporu (zob. zadanie 40), to mogą być także połączone jak na rysunku 28.40b. Znów stosunek wskazań mierników daje tylko przybliżony opór R'' . Wykaż, że R'' jest powiązane z R wzorem:

$$R = R'' - R_A,$$

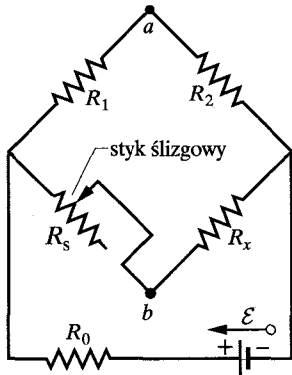
gdzie R_A jest oporem amperomierza. Zwróć uwagę, że $R'' \rightarrow R$, gdy $R_A \rightarrow 0$.

42. (Zob. zadania 40 i 41). Na rysunku 28.40 opory amperomierza i woltomierza wynoszą odpowiednio 3Ω i 300Ω . Przyjmij $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ dla doskonałego źródła i $R_0 = 100 \Omega$. a) Jakie będą wskazania mierników dla dwóch różnych połączeń (rysunki 28.40a i b), jeśli $R = 85 \Omega$? b) Ile wyniesie przybliżona wartość oporu R , jaką otrzymamy w każdym z tych przypadków?

43. Na rysunku 28.41 opór R_s dobieramy przez przesuwanie styku ślizgowego tak, aby punkty a i b uzyskały ten sam potencjał. (Warunek ten można sprawdzić przez podłączenie na chwilę do punktów a i b czułego amperomierza; jeśli te punkty mają ten sam potencjał, to wskazówka amperomierza się nie wychyli). Wykaż, że w takim ustawieniu zachodzi związek:

$$R_x = R_s \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

Układ ten, zwany mostkiem Wheatstone'a, pozwala zmierzyć nieznany opór (R_x), gdy znamy opór wzorcowy (R_s).



Rys. 28.41. Zadanie 43

28.8. Obwody RC

44. Kondensator o początkowym ładunku q_0 rozładowuje się przez opornik. Po jakim czasie ładunek kondensatora zmniejszy się o: a) jedną trzecią początkowego ładunku, b) dwie trzecie początkowego ładunku? Wynik wyraż przez stałą czasową τ .

45. Ile stałych czasowych musi minąć, aby początkowo nienaładowany kondensator w obwodzie szeregowym RC naładował się do 99% ładunku stacjonarnego?

46. W obwodzie szeregowym RC mamy $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $R = 1,4 \text{ M}\Omega$ i $C = 1,8 \mu\text{F}$. a) Oblicz stałą czasową obwodu. b) Znajdź

maksymalny ładunek, jaki znajdzie się na kondensatorze podczas ładowania. c) Jak długo będzie ładować się kondensator do ładunku $16 \mu\text{C}$?

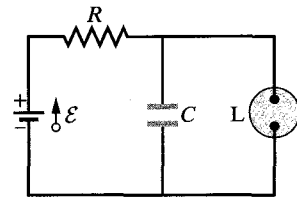
47. Opornik o oporze $15 \text{ k}\Omega$ i kondensator zostały połączone szeregowo i następnie nagle przyłożono do nich różnicę potencjałów 12 V . Różnica potencjałów na kondensatorze wzrosła do 5 V w ciągu $1,3 \mu\text{s}$. a) Oblicz stałą czasową obwodu. b) Znajdź pojemność kondensatora.

48. Wyobraź sobie, że masz niedoskonały kondensator, w którym ładunek przepływa z jednej okładki do drugiej. Różnica potencjałów między okładkami tego kondensatora o pojemności $2 \mu\text{F}$ spada do jednej czwartej początkowej wartości w ciągu 2 s . Jaki jest wobec tego opór obszaru między jego okładkami?

49. Opornik o oporze $3 \text{ M}\Omega$ i kondensator o pojemności $1 \mu\text{F}$ połączono ze sobą szeregowo i w pewnej chwili dołączono do doskonałego źródła o SEM $\mathcal{E} = 4 \text{ V}$. Jakie po upływie 1 s od połączenia są szybkości: a) wzrostu ładunku na kondensatorze, b) wzrostu energii kondensatora, c) wydzielania się energii termicznej w oporniku, d) dostarczania energii przez źródło?

50. Nienaładowany początkowo kondensator C zostaje całkowicie naładowany ze źródła SEM połączonego szeregowo z opornikiem o oporze R . a) Wykaż, że końcowa energia zgromadzona w kondensatorze jest równa połowie energii dostarczonej przez źródło SEM. b) Przez scałkowanie wielkości $I^2 R$ po czasie ładowania wykaż, że energia rozproszona w postaci energii termicznej w oporniku stanowi także połowę energii dostarczanej przez źródło SEM.

51. Kondensator, na którym początkowa różnica potencjałów wynosi 100 V , rozładowuje się przez opornik po zamknięciu klucza w chwili $t = 0$. W chwili $t = 10 \text{ s}$ różnica potencjałów na kondensatorze wynosi 1 V . a) Jaka jest stała czasowa obwodu? b) Jaka jest różnica potencjałów na kondensatorze w chwili $t = 17 \text{ s}$?



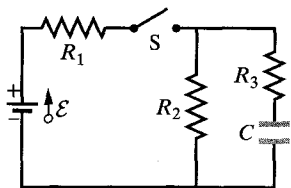
Rys. 28.42. Zadanie 52

52. Na rysunku 28.42 przedstawiono obwód lampy migającej (podobnej do lamp ostrzegawczych w rejonie prac drogowych). Lampa jarzeniowa L (o znikomym małej pojemności) jest podłączona równolegle do kondensatora C obwodu RC. Prąd płynie przez lampę tylko wtedy, gdy różnica potencjałów na niej osiąga napięcie przebicia U_L ; w tym przypadku kondensator rozładowuje się całkowicie przez lampę i lampa świeci przez krótki czas. Załóżmy, że potrzebne są dwa błyski na sekundę. Jaki powinien być

opór R dla lampy o napięciu przebicia $U_L = 72 \text{ V}$, podłączonej do doskonałego źródła o SEM równej 95 V i kondensatora o pojemności $0,15 \text{ }\mu\text{F}$?

53. Kondensator o pojemności $1 \text{ }\mu\text{F}$, w którym początkowo zgromadzono energię $0,5 \text{ J}$, rozładowuje się przez opornik o oporze $1 \text{ M}\Omega$. a) Ile wynosi początkowy ładunek na kondensatorze? b) Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez opornik, gdy zaczyna się rozładowanie? c) Oblicz różnice potencjałów U_C na kondensatorze i U_R na oporniku, w zależności od czasu. d) Wyznacz szybkość wytwarzania energii termicznej, w zależności od czasu.

54. Kontroler gry elektronicznej składa się z opornika o zmiennym oporze, połączanego z okładkami kondensatora o pojemności $0,22 \text{ }\mu\text{F}$. Kondensator jest ładowany do 5 V , a następnie rozładowywany przez opornik. Czas zmniejszenia się różnicy potencjałów na okładkach do $0,8 \text{ V}$ jest mierzony przez zegar w grze. Jaki musi być zakres zmienności oporu opornika, aby uzyskać czasy rozładowania z przedziału od $10 \text{ }\mu\text{s}$ do 6 ms ?



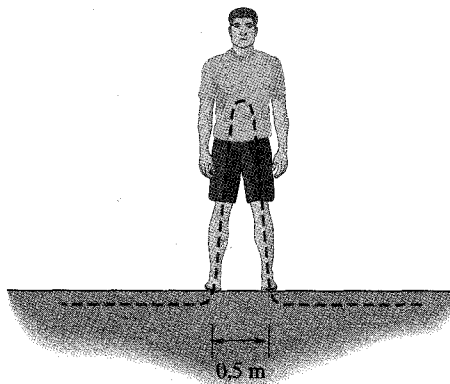
Rys. 28.43. Zadanie 55

55*. W obwodzie na rysunku 28.43 $\mathcal{E} = 1,2 \text{ kV}$, $C = 6,5 \text{ }\mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 0,73 \text{ M}\Omega$. Przy całkowicie rozładowanym kondensatorze zamknięto nagle klucz S (w chwili $t = 0$). a) Wyznacz natężenie prądu w każdym oporniku w chwili $t = 0$ i dla $t \rightarrow \infty$. b) Naskicuj wykres różnicy potencjałów U_2 na oporniku R_2 jako funkcji czasu, od $t = 0$ do $t = \infty$. c) Jakie są liczbowe wartości

U_2 w chwili $t = 0$ i dla $t \rightarrow \infty$? d) Jaki jest w tym przypadku sens fizyczny określenia „ $t \rightarrow \infty$ ”?

Zadanie dodatkowe

56. *Atak serca czy porażenie prądem elektrycznym?* Historię tę zaczęliśmy opowiadać w zadaniu 45 w rozdziale 27. Na rysunku 28.44 przedstawiono drogę przepływu prądu elektrycznego, od jednej stopy ofiary w górę, przez tułów (w tym serce) i w dół przez drugą stopę. a) Na podstawie danych znajdź różnicę potencjałów między stopami mężczyzny, jeśli jedna stopa była $0,5 \text{ m}$ bliżej wspornika niż druga. b) Załóż, że opór stopy na mokrej glebie ma typową wartość $300 \text{ }\Omega$, a opór tułowia powszechnie przyjmowaną wartość $1000 \text{ }\Omega$. Znajdź natężenie prądu, płynącego przez tułów ofiary. c) Migotanie komór serca człowieka może nastąpić pod wpływem przepływu przez tułów prądu o natężeniu od $0,1 \text{ A}$ do 1 A . Czy prąd upływu ze wspornika mógł wywołać migotanie komór serca ofiary?



Rys. 28.44. Zadanie 56