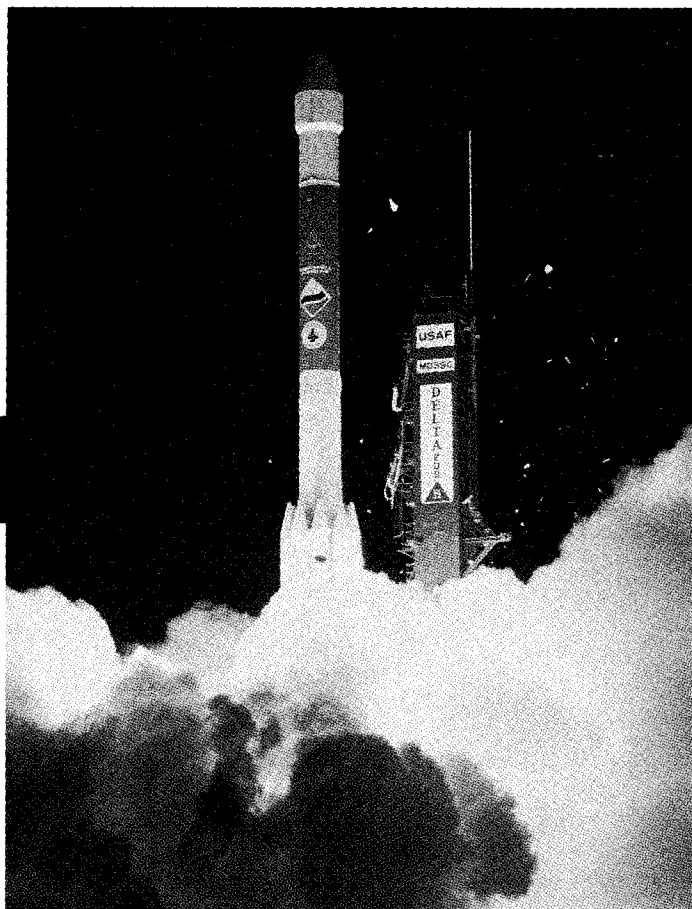


30 Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu

Obecnie wysyłamy wiele różnych obiektów w przestrzeń kosmiczną. Jednak gdy zaczniemy eksploatować złoża Księżyca i planetoid, a w kosmosie nie będzie źródeł paliwa do konwencjonalnych rakiet, potrzebne nam będą bardziej wydajne sposoby przenoszenia surowców. Rozwiązaniem mogłaby być wyrzutnia elektromagnetyczna. Mały prototyp, *elektromagnetyczne działo szynowe*, może przyspieszyć pocisk od stanu spoczynku do prędkości 10 km/s (36 000 km/h) w ciągu 1 ms.

W jaki sposób można osiągnąć tak duże przyspieszenie?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



30.1. Obliczanie indukcji magnetycznej pola wywołanego przepływem prądu

Jak już mówiliśmy w paragrafie 29.1, jednym ze sposobów wytworzenia pola magnetycznego jest wykorzystanie poruszających się ładunków, czyli prądu elektrycznego. Naszym zadaniem w tym rozdziale będzie wyznaczenie indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez prądy o danym rozkładzie. Zastosujemy w tym celu taką samą metodę, jaką zastosowaliśmy w rozdziale 23 do wyznaczenia natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez naładowane cząstki o danym rozkładzie ładunku.

Przypomnijmy krótko tę metodę. Najpierw dzielimy w myśli ładunek na elementy dq , jak to zostało zrobione na rysunku 30.1a dla rozkładu ładunku o dowolnym kształcie. Następnie obliczamy natężenie $d\vec{E}$ pola, wytworzonego w pewnym punkcie P przez odpowiedni element ładunku. Natężenia pól elektrycznych, pochodzących od różnych elementów dodają się do siebie, zatem obliczamy natężenie wypadkowe pola $\vec{E}$ w punkcie P sumując, za pomocą całkowania, przyczynki $d\vec{E}$ od wszystkich elementów.

Przypomnijmy, że wartość $d\vec{E}$ jest wyrażona wzorem:

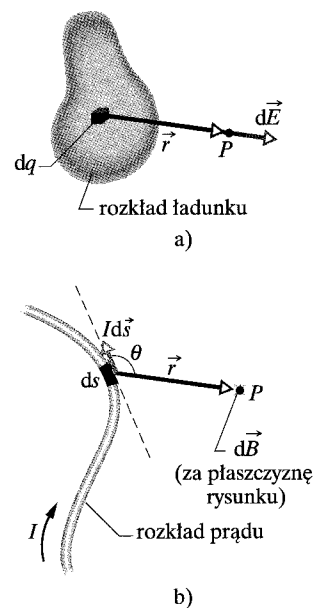
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}, \quad (30.1)$$

gdzie r jest odległością między elementem ładunku dq a punktem P . Dla dodatniego elementu ładunku kierunek $d\vec{E}$ jest zgodny z kierunkiem $\vec{r}$, gdzie $\vec{r}$ jest wektorem skierowanym od elementu ładunku dq do punktu P . Wprowadzając $\vec{r}$ do równania (30.1) możemy je zapisać w postaci wektorowej:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r}, \quad (30.2)$$

która wskazuje, że kierunek wektora $d\vec{E}$, wytworzonego przez dodatnio naładowany element, jest zgodny z kierunkiem wektora $\vec{r}$. Zauważ, że w równaniu (30.2) $d\vec{E}$ jest odwrotnie proporcjonalne do r^2 , mimo trzeciej potęgi w mianowniku. Ten wykładnik pojawił się w równaniu tylko dlatego, że licznik pomnożyliśmy przez wektor o wartości bezwzględnej równej r .

Zastosujemy teraz tę samą metodę do obliczenia indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez przepływ prądu. Na rysunku 30.1b przedstawiono przewodnik dowolnego kształtu, w którym płynie prąd o natężeniu I . Chcemy wyznaczyć wektor $\vec{B}$ w punkcie P , położonym w niewielkiej odległości od przewodnika. Najpierw dzielimy w myśli przewodnik na elementy ds , a następnie definiujemy wektorowy element $d\vec{s}$, który ma długość ds , a jego kierunek jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu w elemencie ds . Możemy następnie zdefiniować *element prądu* jako $I d\vec{s}$. Naszym celem będzie wyznaczenie indukcji $d\vec{B}$ pola wytworzonego w punkcie P przez odpowiedni element prądu. Wiemy z doświadczenia, że wektory $\vec{B}$, podobnie jak wektory natężeń pól elektrycznych dodają się do siebie. Zatem możemy obliczyć wypadkowy wektor $\vec{B}$ w punkcie P , sumując, za pomocą całkowania, przyczynki $d\vec{B}$ od wszystkich elementów prądu. Jednakże to sumowanie jest bardziej skomplikowane i wymaga większego wysiłku, niż w przypadku pól elektrycznych. Podczas gdy element ładunku dq , wytwarzający



Rys. 30.1. a) Element ładunku dq wytwarza przyczynkę $d\vec{E}$ do pola elektrycznego w punkcie P . b) Element prądu $I d\vec{s}$ wytwarza przyczynkę $d\vec{B}$ do pola magnetycznego w punkcie P . Zielony znak $\times$ (przypominający ogon strzały) umieszczony w punkcie P wskazuje, że $d\vec{B}$ jest skierowane prostopadle za płaszczyznę rysunku

pole elektryczne jest wielkością skalarną, element prądu $I d\vec{s}$, wytwarzający pole magnetyczne, jest iloczynem składowej i wektora.

Okazuje się, że wartość wektora $d\vec{B}$ pola, wytworzonego w punkcie P przez element prądu $I d\vec{s}$ jest równa:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin \theta}{r^2}, \quad (30.3)$$

gdzie θ jest kątem między kierunkami $d\vec{s}$ i $\vec{r}$, a wektor $\vec{r}$ jest skierowany od ds do punktu P . Symbol μ_0 jest stałą, zwaną *przenikalnością magnetyczną próżni* (stałą magnetyczną), której wartość jest równa:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m/A}. \quad (30.4)$$

Kierunek wektora $d\vec{B}$, prostopadły do płaszczyzny rysunku 30.1b, jest kierunkiem iloczynu wektorowego $d\vec{s} \times \vec{r}$. Możemy więc zapisać równanie (30.3) w postaci wektorowej jako

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{prawo Biota-Savarta}). \quad (30.5)$$

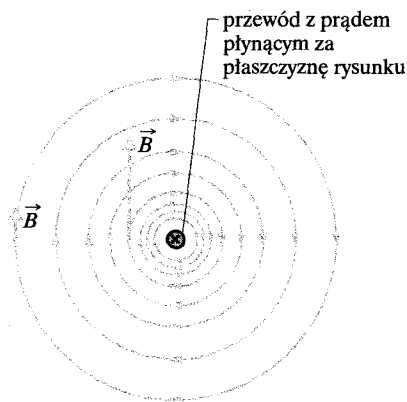
To równanie wektorowe i jego skalarna postać (30.3) znane są jako **prawo Biota-Savarta**. To prawo, które zostało wykryte doświadczalnie, opisuje odwrotną proporcjonalność indukcji i kwadratu promienia (wykładnik w mianowniku w równaniu (30.5) jest równy 3 z powodu czynnika $\vec{r}$ w liczniku). Zastosujemy to prawo do obliczenia wypadkowej indukcji $\vec{B}$ pola wytworzonego w punkcie P przez prądy o różnych rozkładach.

Pole magnetyczne wytworzone przez prąd płynący w długim przewodzie prostoliniowym

Wkrótce wykażemy, stosując prawo Biota-Savarta, że wartość indukcji magnetycznej pola w odległości R od długiego prostoliniowego przewodu, przez który płynie prąd o natężeniu I , jest dana wzorem:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (\text{długi przewód prostoliniowy}). \quad (30.6)$$

Wartość wektora indukcji B w równaniu (30.6) zależy tylko od natężenia prądu i odległości R danego punktu od przewodu. Wyprowadzając ten wzór, wykażemy, że linie pola $\vec{B}$ tworzą współśrodkowe okręgi wokół przewodu. Pokazano to na rysunku 30.2, a także za pomocą opiłków żelaza na rysunku 30.3. Odległość między liniami na rysunku 30.2 rośnie wraz ze wzrostem odległości od przewodu. Odpowiada to zmniejszaniu się wartości indukcji $\vec{B}$, zgodnie z zależnością $1/R$, przewidzianą w równaniu (30.6). Długości dwóch wektorów $\vec{B}$ na tym rysunku również wykazują malejącą zależność od R .



Rys. 30.2. Linie pola magnetycznego, wytworzonego przez prąd, płynący w długim prostoliniowym przewodzie, tworzą współśrodkowe okręgi wokół przewodu. W tym przypadku prąd płynie za płaszczyznę rysunku, jak pokazuje znak $\times$

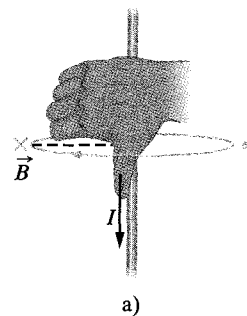


Rys. 30.3. Opiłki żelazne, rozrzucone na kartonie układają się wzdłuż współśrodkowych okręgów, gdy w przewodzie płynie prąd. To ułożenie, wzdłuż linii pola magnetycznego, jest wynikiem działania pola magnetycznego, wytworzonego przez prąd płynący w przewodzie

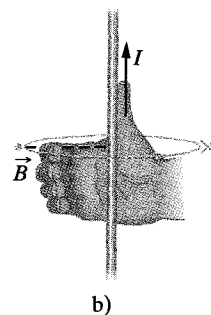
Oto prosta reguła prawej dłoni, służąca do wyznaczania kierunku wektora indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez element prądu, taki jak odcinek długiego przewodu:

➤ **Reguła prawej dłoni:** Uchwyć element prawą ręką, tak aby twój kciuk wskazywał kierunek prądu. Twoje palce będą wtedy wskazywać kierunek linii pola magnetycznego, wytworzonego przez ten element.

Wynik zastosowania reguły prawej dłoni do prądu, płynącego w prostoliniowym przewodzie, jak na rysunku 30.2, jest pokazany na rysunku 30.4a. Aby wyznaczyć kierunek wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$ pola, wytworzonego przez ten prąd w dowolnym punkcie, uchwyc (w myśli) przewód prawą ręką, tak aby twój kciuk wskazywał kierunek prądu. Niech czubki twoich palców przechodzą przez wybrany punkt; kierunek, jaki pokazują, jest wtedy zgodny z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej w tym punkcie. Jak widać na rysunku 30.2, wektor indukcji $\vec{B}$ w dowolnym punkcie jest *styczny do linii pola magnetycznego*; z rysunku 30.4 wynika, że wektor indukcji pola jest *prostopadły do odcinka, zaznaczonego linią przerywaną, łączącego wybrany punkt i przewód z prądem*.



a)



b)

Rys. 30.4. Reguła prawej dłoni wskazuje kierunek linii pola magnetycznego, wytworzonego przez prąd w przewodzie. a) Przypadek przedstawiony na rysunku 30.2 widziany z boku. Wektor $\vec{B}$ w dowolnym punkcie po lewej stronie przewodu jest prostopadły do odcinka zaznaczonego linią przerywaną i skierowany za płaszczyznę rysunku, w kierunku czubków palców, jak pokazuje znak $\times$. b) Jeżeli zmienimy kierunek prądu na przeciwny, to wektor $\vec{B}$ w dowolnym punkcie po lewej stronie przewodu będzie nadal prostopadły do odcinka zaznaczonego linią przerywaną, ale teraz będzie skierowany przed płaszczyznę rysunku, jak pokazuje kropka

Wyprowadzenie wzoru (30.6)

Na rysunku 30.5 zilustrowano zadanie, które mamy wykonać; szukamy wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w punkcie P , w odległości R od przewodu. Rysunek 30.5 jest w istocie bardzo podobny do rysunku 30.1b, z wyjątkiem tego, że teraz przewód jest prosty i nieskończenie długi. Wartość przyczynku do indukcji magnetycznej pola, wytworzonego w punkcie P przez element prądu $I d\vec{s}$, znajdujący się w odległości r od punktu P , jest dana równaniem (30.3):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \sin \theta}{r^2}.$$

Wektor $d\vec{B}$ na rysunku 30.5 jest skierowany tak, jak wektor $d\vec{s} \times \vec{r}$ — a mianowicie prostopadle za płaszczyznę rysunku.

Zauważ, że $d\vec{B}$ w punkcie P ma taki sam kierunek dla wszystkich elementów prądu, na jakie można podzielić przewód. Tak więc wartość indukcji magnetycznej pola, wytworzonego w punkcie P przez elementy prądu w górnej połowie nieskończenie długiego przewodu, może być obliczona przez całkowanie $d\vec{B}$ w równaniu (30.3) od zera do nieskończoności.

Rozważmy teraz element prądu w dolnej połowie przewodu, położony w takiej odległości w dół od punktu P , w jakiej $d\vec{s}$ znajduje się powyżej punktu P . Ze wzoru (30.5) wynika, że wektor indukcji magnetycznej pola wytworzonego w punkcie P przez ten element ma taką samą wartość i kierunek, jak wektor indukcji pola, pochodzącego od elementu $I d\vec{s}$ na rysunku 30.5. Zatem indukcja pola wytworzona przez dolną połowę przewodu jest dokładnie taka sama, jak indukcja pola wytworzonego przez górną połowę. Aby znaleźć wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ całkowitego pola w punkcie P , wystarczy więc pomnożyć wynik naszego całkowania przez 2. Stąd otrzymujemy:

$$B = 2 \int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta ds}{r^2}. \quad (30.7)$$

Zmienne θ , s i r w tym równaniu nie są niezależne, ale (patrz rys. 30.5) związane są zależnościami:

$$r = \sqrt{s^2 + R^2}$$

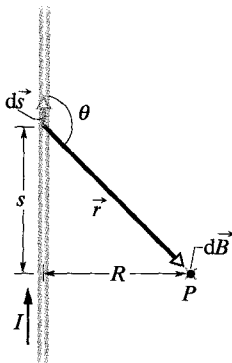
oraz

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}.$$

Po wykorzystaniu tych związków i zastosowaniu całki 19 z dodatku E, z równania (30.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left[\frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \end{aligned} \quad (30.8)$$

czyli zależność, którą mieliśmy wyprowadzić. Zauważ, że indukcja magnetyczna w punkcie P pola, pochodzącego albo od dolnej, albo od górnej połowy nie-



Rys. 30.5. Obliczanie indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez prąd o natężeniu I , płynący w długim prostoliniowym przewodzie. Jak pokazano na rysunku, $d\vec{B}$ w punkcie P , związane z elementem prądu $I d\vec{s}$ jest skierowane za płaszczyznę rysunku

skończonego przewodu na rysunku 30.5, jest równa połowie tego wyrażenia, tzn.:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad (\text{prostoliniowy przewód ograniczony z jednej strony}). \quad (30.9)$$

Pole magnetyczne wytworzone przez prąd płynący w przewodzie o kształcie łuku okręgu

Aby wyznaczyć indukcję magnetyczną pola, wytworzonego w pewnym punkcie przez prąd płynący w zagiętym przewodzie, moglibyśmy znów zastosować równanie (30.3) i zapisać wartość indukcji pola, pochodzącego od pojedynczego elementu prądu. Następnie moglibyśmy obliczyć całkę i wyznaczyć wypadkową indukcję pola, wytworzonego przez wszystkie elementy prądu. W zależności od kształtu przewodu takie całkowanie może być trudne. Jest ono jednak całkiem proste, gdy przewód ma kształt łuku okręgu, a dany punkt znajduje się w środku krzywizny.

Na rysunku 30.6a przedstawiono przewód w kształcie łuku o kącie środkowym ϕ , promieniu R i środku C . W przewodzie płynie prąd o natężeniu I . W punkcie C każdy element prądu przewodu $I d\vec{s}$ wytwarza pole magnetyczne o wartości indukcji danej równaniem (30.3). Ponadto, jak pokazano na rysunku 30.6b, bez względu na to, w którym miejscu przewodu znajduje się element prądu, kąt θ między wektorami $d\vec{s}$ i $\vec{r}$ jest równy 90° , a także $r = R$. Zatem podstawiając R zamiast r oraz 90° zamiast θ , otrzymujemy z równania (30.3):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds}{R^2}. \quad (30.10)$$

Taką wartość ma w punkcie C indukcja pola pochodzącego od elementu prądu. Zastosowanie reguły prawej dłoni w dowolnym punkcie łuku (jak na rysunku 30.6c) prowadzi do wniosku, że wszystkie przyczynki $d\vec{B}$ mają w punkcie C ten sam kierunek — prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Tak więc całkowita indukcja pola w punkcie C jest po prostu sumą (otrzymaną przez całkowanie) wszystkich przyczynków $d\vec{B}$. Korzystamy z tożsamości $ds = R d\phi$, aby zmienić zmienną całkowania z ds na $d\phi$, i otrzymujemy z równania (30.10):

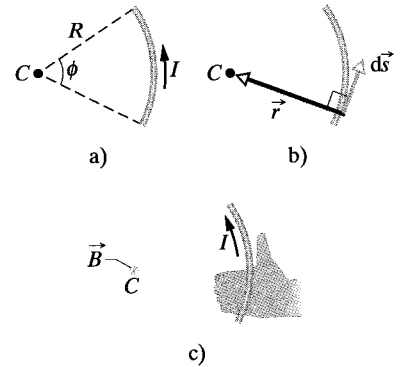
$$B = \int dB = \int_0^\phi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\phi d\phi.$$

Całkując, otrzymujemy:

$$B = \frac{\mu_0 I \phi}{4\pi R} \quad (\text{w środku łuku okręgu}). \quad (30.11)$$

Zwróć uwagę, że to równanie pozwala na wyznaczenie indukcji pola magnetycznego *tylko* w środku krzywizny łuku okręgu, wzdłuż którego płynie prąd. Kiedy podstawiamy dane do równania, musimy pamiętać, aby wyrazić ϕ w radianach, a nie w stopniach. Na przykład, aby znaleźć indukcję magnetyczną pola w środku pełnego okręgu, wzdłuż którego płynie prąd, powinniśmy podstawić 2π radianów za ϕ w równaniu (30.11), otrzymując:

$$B = \frac{\mu_0 I (2\pi)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (\text{w środku okręgu}). \quad (30.12)$$



Rys. 30.6. a) W przewodzie w kształcie łuku okręgu o środku C płynie prąd o natężeniu I . b) Kąt między kierunkami $d\vec{s}$ i $\vec{r}$ jest równy 90° dla dowolnego elementu łuku. c) Wyznaczanie kierunku indukcji magnetycznej pola w punkcie C , wytworzonego przez prąd w przewodzie. Wektor $\vec{B}$ jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a jego kierunek pokazują czubki palców, co zaznaczono kolorową kropką w punkcie C .

Przykład 30.1

Przewód na rysunku 30.7a, w którym płynie prąd o natężeniu I , składa się z łuku okręgu o promieniu R i kącie środkowym $\pi/2$ rad oraz z dwóch odcinków, których przedłużenia przecinają się w środku C okręgu. Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ pola, wytworzonego w punkcie C przez prąd w przewodzie?

ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Możemy wyznaczyć indukcję magnetyczną $\vec{B}$ w punkcie C , stosując prawo Biota-Savarta w postaci wzoru (30.5).

➡ 2. Zastosowanie wzoru (30.5) można uprościć, obliczając $\vec{B}$ oddzielnie dla trzech różnych części przewodu, czyli dla: 1) odcinka po lewej stronie, 2) odcinka po prawej stronie, 3) łuku okręgu.

Odcinki. Dla dowolnego elementu prądu w odcinku (1) kąt θ między $d\vec{s}$ i $\vec{r}$ jest równy zeru (rys. 30.7b), tak więc ze wzoru (30.3) wynika:

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin 0}{r^2} = 0.$$

Wobec tego prąd płynący przez cały odcinek (1) przewodu nie wytwarza pola magnetycznego w punkcie C :

$$B_1 = 0.$$

Takie samo rozumowanie można przeprowadzić w przypadku odcinka prostego (2), gdzie kąt θ między $d\vec{s}$ i $\vec{r}$ dla dowolnego elementu prądu jest równy 180° . Zatem:

$$B_2 = 0.$$

Łuk okręgu. ➡ Zastosowanie prawa Biota-Savarta do wyznaczenia indukcji magnetycznej pola w środku łuku okręgu prowadzi do równania (30.11) ($B = \mu_0 I \phi / 4\pi R$). W naszym przykładzie kąt środkowy ϕ łuku jest równy $\pi/2$ radianów, tak więc z równania (30.11) wynika, że wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}_3$ pola w środku C łuku jest równa:

$$B_3 = \frac{\mu_0 I (\pi/2)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{8R}.$$

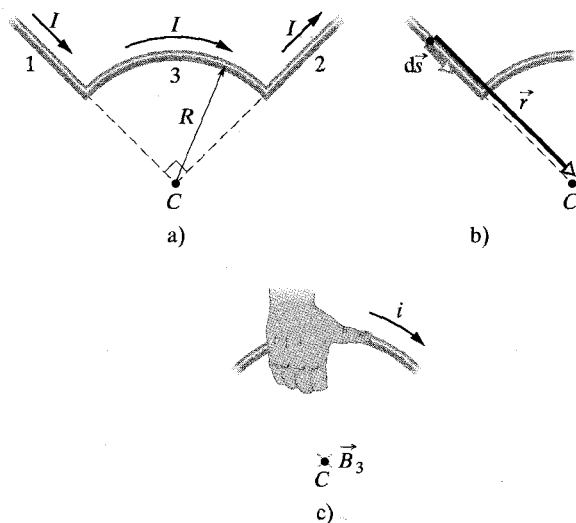
Aby wyznaczyć kierunek $\vec{B}_3$, stosujemy regułę prawej dłoni, przedstawioną na rysunku 30.4. Uchwyć w myśli łuk okręgu prawą ręką, jak na rysunku 30.7c, tak aby twój kciuk wskazywał kierunek prądu. Kierunek, w którym twoje palce obejmują przewód, wskazuje kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wokół przewodu. W otoczeniu punktu C (wewnątrz łuku okręgu) czubki twoich palców wskazują kierunek za płaszczyznę rysunku. Zatem $\vec{B}_3$ jest skierowane za tę płaszczyznę.

Pole wypadkowe. W ogólnym przypadku, gdy mamy wyznaczyć wypadkowy wektor indukcji magnetycznej pola, będącego

sumą dwóch (lub większej liczby) pól magnetycznych, musimy dodać wektory indukcji, a nie po prostu ich wartości. Jednak w tym przykładzie tylko przewód w kształcie łuku wytwarza pole magnetyczne w punkcie C . Możemy więc zapisać wypadkową wartość indukcji $\vec{B}$ jako:

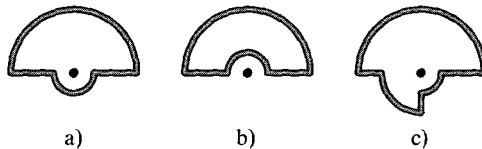
$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 0 + 0 + \frac{\mu_0 I}{8R} = \frac{\mu_0 I}{8R}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Kierunek wektora $\vec{B}$ jest zgodny z kierunkiem wektora $\vec{B}_3$ — jest to kierunek za płaszczyznę rysunku 30.7.



Rys. 30.7. Przykład 30.1 a) Przewód składa się z dwóch odcinków prostych (1 i 2) oraz łuku okręgu (3). W przewodzie płynie prąd o natężeniu I . b) Dla elementu prądu w odcinku (1) kąt między $d\vec{s}$ i $\vec{r}$ jest równy zeru. c) Wyznaczenie kierunku indukcji magnetycznej $\vec{B}_3$ pola wytworzonego w punkcie C , przez prąd, płynący wzdłuż łuku okręgu; pole jest skierowane w tym przypadku za płaszczyznę rysunku

✓ **SPRAWDZIAN 1:** Na rysunku przedstawiono trzy obwody, składające się ze współśrodkowych łuków okręgów i odcinków prostych, skierowanych wzdłuż promienia. Łuki są albo połówkami, albo ćwiartkami okręgów o promieniach r , $2r$ i $3r$. W każdym obwodzie płynie prąd o takim samym natężeniu. U szereguj obwody pod względem wartości wektora $\vec{B}$ w środku krzywizny łuków (zaznaczonym kropką), zaczynając od największej wartości.



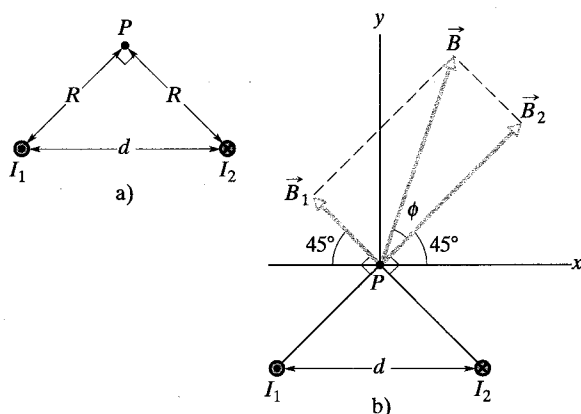
Przykład 30.2

Na rysunku 30.8a przedstawiono dwa długie równoległe przewody, w których płyną w przeciwnych kierunkach prądy o natężeniach I_1 i I_2 . Jaka jest wartość i kierunek wypadkowego $\vec{B}$ w punkcie P ? Przyjmij następujące wartości: $I_1 = 15 \text{ A}$, $I_2 = 32 \text{ A}$, $d = 5,3 \text{ cm}$.

ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Wypadkowy wektor indukcji magnetycznej $\vec{B}$ pola w punkcie P jest wektorową sumą wektorów indukcji magnetycznych pól pochodzących od prądów w obydwu przewodach.

➡ 2. Indukcję magnetyczną pola wytworzonego przez dowolny prąd można obliczyć, stosując prawo Biota-Savarta. Dla punktów w otoczeniu długiego prostego przewodu, w którym płynie prąd, z tego prawa otrzymaliśmy równanie (30.6).



Rys. 30.8. Przykład 30.2. a) W dwóch przewodach płyną w przeciwnych kierunkach prądy o natężeniach I_1 i I_2 (przed i za płaszczyznę rysunku). Zwróć uwagę na kąt prosty w punkcie P . b) Suma wektorowa obliczonych oddzielnie wektorów indukcji $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$ daje w wyniku wypadkowy wektor indukcji $\vec{B}$

Na rysunku 30.8a punkt P znajduje się w odległości R zarówno od przewodu z prądem o natężeniu I_1 , jak i od przewodu z prądem o natężeniu I_2 . Zgodnie ze wzorem (30.6) te prądy wytwarzają w punkcie P pola magnetyczne $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$ o wartościach indukcji:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \quad \text{oraz} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}.$$

Zauważ, że na rysunku 30.8a obydwa kąty przy podstawie (między bokami R i d) trójkąta prostokątnego są równe 45° . Możemy więc napisać $\cos 45^\circ = R/d$ i zastąpić R przez $d \cos 45^\circ$. Zatem wartości indukcji B_1 i B_2 można zapisać jako:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d \cos 45^\circ} \quad \text{oraz} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d \cos 45^\circ}.$$

Chcemy obliczyć sumę wektorów $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$, która jest wypadkowym wektorem indukcji $\vec{B}$ w punkcie P . Aby określić kierunki wektorów $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$, stosujemy regułę prawej dłoni (rys. 30.4) do każdego przewodu na rysunku 30.8a. Dla przewodu 1, z prądem płynącym przed płaszczyznę rysunku, obejmujemy w myśli przewód prawą ręką z kciukiem skierowanym zgodnie z kierunkiem prądu. Zagięte palce wskazują wtedy, że linie pola biegają w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. W szczególności w pobliżu punktu P linie te są skierowane w górę i w lewo. Przypomnij sobie, że linie pola magnetycznego w dowolnym punkcie w otoczeniu długiego prostego przewodu z prądem muszą być skierowane prostopadle do prostej, łączącej ten punkt i przewód. Zatem wektor $\vec{B}_1$ musi być skierowany do góry i w lewo, jak pokazano na rysunku 30.8b. (Zwróć uwagę na zaznaczony kąt prosty między wektorem $\vec{B}_1$ a prostą, łączącą punkt P i przewód 1).

Powtarzając to rozumowanie dla przewodu 2, dochodzimy do wniosku, że wektor $\vec{B}_2$ jest skierowany do góry i w prawo, jak pokazano na rysunku 30.8b. (Zwróć uwagę na zaznaczony kąt prosty między wektorem $\vec{B}_2$ a prostą, łączącą punkt P i przewód 2).

Możemy teraz dodać wektorowo $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$ i wyznaczyć w ten sposób wypadkowy wektor indukcji magnetycznej $\vec{B}$ pola w punkcie P . Można to zrobić, rozkładając wektory na składowe i następnie wyznaczając $\vec{B}$ z jego składowych. Istnieje też inny sposób, przedstawiony na rysunku 30.8b. Ponieważ wektory $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$ są wzajemnie prostopadłe, są one przeciwprostokątnymi trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest wektor $\vec{B}$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2\pi d (\cos 45^\circ)} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \\ &= \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \sqrt{(15 \text{ A})^2 + (32 \text{ A})^2}}{(2\pi)(5,3 \cdot 10^{-2} \text{ m})(\cos 45^\circ)} \\ &= 1,89 \cdot 10^{-4} \text{ T} \approx 190 \mu\text{T}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Kąt ϕ między kierunkami wektorów $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$ na rysunku 30.8b wynika z zależności:

$$\phi = \arctg \frac{B_1}{B_2},$$

co dla B_1 i B_2 obliczonych wyżej daje:

$$\phi = \arctg \frac{I_1}{I_2} = \arctg \frac{15 \text{ A}}{32 \text{ A}} = 25^\circ.$$

Kąt między kierunkiem wektora $\vec{B}$ i osią x , pokazany na rysunku 30.8b jest więc równy:

$$\phi + 45^\circ = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Porada 1: Reguły prawej dłoni

Reguła prawej dłoni dla iloczynu wektorowego. Reguła ta, wprowadzona w paragrafie 3.7, umożliwia wyznaczenie kierunku wektora, który jest wynikiem mnożenia wektorowego. Ułóż palce prawej dłoni tak, aby obrócić pierwszy wektor, występujący w iloczynie, w kierunku drugiego wektora, o mniejszy kąt między tymi wektorami. Twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek wektora, który jest wynikiem mnożenia wektorowego. W rozdziale 12 zastosowaliśmy tę regułę do wyznaczenia kierunku wektora momentu siły i momentu pędu; w rozdziale 29 zastosowaliśmy ją do wyznaczenia kierunku siły działającej na przewodnik z prądem w polu magnetycznym.

Reguły prawej dłoni w magnetyzmie. W wielu sytuacjach związanych z magnetyzmem, chcielibyśmy znaleźć związek między

elementem „zgiętym” i „prostym”. Można to zrobić za pomocą (zgiętych) palców i (wyprostowanego) kciuka. W paragrafie 29.8 widzieliśmy już przykład, w którym określiliśmy związek między prądem płynącym wzdłuż pętli (element zgięty) a kierunkiem wektora normalnego $\vec{n}$ pętli (element prosty). Jeżeli obejmiesz palcami prawej dłoni pętlę, zgodnie z kierunkiem prądu, to twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek $\vec{n}$. Jest to jednocześnie kierunek dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ pętli.

W tym paragrafie zapoznałeś się z drugą regułą prawej dłoni podobnego typu. Aby znaleźć kierunek linii pola magnetycznego wokół elementu prądu, skieruj wyciągnięty kciuk prawej dłoni wzdłuż kierunku prądu. Pozostałe palce obejmą wtedy element prądu, wskazując kierunek linii pola.

30.2. Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem

Dwa długie równoległe przewody, w których płyną prądy, działają na siebie siłami. Na rysunku 30.9 przedstawiono dwa takie przewody, odległe o d , w których płyną prądy o natężeniach I_a i I_b . Zbadajmy siły, jakimi przewody te działają wzajemnie na siebie.

Najpierw szukamy siły, działającej na przewód b na rysunku 30.9, wywołanej przez prąd, płynący w przewodzie a . Ten prąd wytwarza pole magnetyczne o indukcji $\vec{B}_a$ i właśnie to pole magnetyczne powoduje powstawanie poszukiwanej siły. Aby wyznaczyć siłę, musimy zatem znać wartość i kierunek wektora indukcji $\vec{B}_a$ w miejscu, w którym znajduje się przewód b . Ze wzoru (30.6) wynika, że wartość $\vec{B}_a$ w każdym punkcie przewodu b jest równa:

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}. \quad (30.13)$$

Z reguły prawej dłoni wynika, że wektor indukcji $\vec{B}_a$ w miejscu, w którym znajduje się przewód b , jest skierowany w dół, jak pokazano na rysunku 30.9.

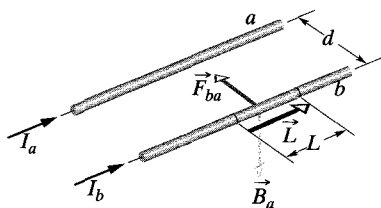
Znamy już indukcję, możemy zatem teraz wyznaczyć siłę, jaką pole działa na przewód b . Zgodnie z równaniem (29.27), siła $\vec{F}_{ba}$, wytworzona przez zewnętrzne pole o indukcji $\vec{B}_a$ i działająca na odcinek przewodu b o długości L jest równa:

$$\vec{F}_{ba} = I_b \vec{L} \times \vec{B}_a, \quad (30.14)$$

gdzie $\vec{L}$ jest wektorem długości przewodu. Na rysunku 30.9 wektory $\vec{L}$ i $\vec{B}_a$ są prostopadłe, tak więc stosując wzór (30.9) możemy napisać:

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}. \quad (30.15)$$

Kierunek wektora $\vec{F}_{ba}$ jest zgodny z kierunkiem iloczynu wektorowego $\vec{L} \times \vec{B}_a$. Stosując regułę prawej dłoni dla iloczynu wektorowego do wektorów $\vec{L}$ i $\vec{B}_a$, pokazanych na rysunku 30.9, widzimy, że wektor $\vec{F}_{ba}$ jest skierowany w stronę przewodu a .



Rys. 30.9. Dwa równoległe przewody, w których płyną prądy w tym samym kierunku, wzajemnie się przyciągają. $\vec{B}_a$ jest wektorem indukcji magnetycznej pola w miejscu, w którym znajduje się przewód b , a wytworzonego przez prąd w przewodzie a . $\vec{F}_{ba}$ jest siłą, która działa na przewód b , gdyż płynie w nim prąd, a przewód znajduje się w polu o indukcji $\vec{B}_a$

Ogólny sposób postępowania przy wyznaczaniu siły, działającej na przewód z prądem, może być przedstawiony następująco:

- Aby znaleźć siłę, działającą na przewód z prądem, wywołaną przepływem prądu w drugim przewodzie, najpierw wyznacz pole, pochodzące od prądu w drugim przewodzie, w miejscu, w którym znajduje się pierwszy przewód. Następnie wyznacz siłę, jaką to pole działa na pierwszy przewód.

Moglibyśmy teraz zastosować tę procedurę do obliczenia siły, działającej na przewód a , wywołanej przepływem prądu w przewodzie b . Okazałoby się, że siła działa w kierunku przewodu b ; tak więc dwa przewody, w których prądy płyną równolegle, wzajemnie się przyciągają. Gdyby dwa prądy płynęły antyrównolegle (czyli w kierunkach przeciwnych), moglibyśmy podobnie wykazać, że obydwa przewody wzajemnie się odpychają. Zatem:

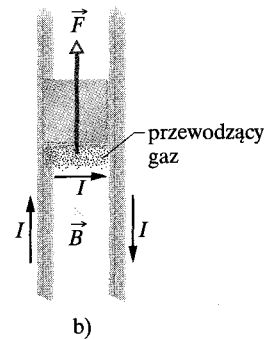
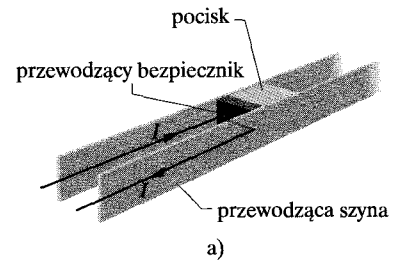
- Przewody, w których płyną prądy równoległe, przyciągają się, a te, w których płyną prądy antyrównoległe, się odpychają.

Siła, działająca między przewodami, w których płyną prądy równoległe, jest podstawą definicji ampera, który jest jedną z siedmiu podstawowych jednostek w układzie SI. Definicja przyjęta w 1946 r. jest następująca: 1 amper oznacza natężenie prądu stałego, który płynąc w dwóch równoległych prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomo małym przekroju poprzecznym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m, wywołuje między tymi przewodami siłę o wartości $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr długości przewodu.

Działo szynowe

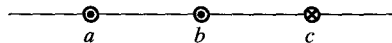
Działo szynowe jest urządzeniem, w którym pole magnetyczne może przyspieszać pocisk, nadając mu dużą prędkość w krótkim czasie. Schemat działa szynowego jest przedstawiony na rysunku 30.10. Prąd o dużym natężeniu płynie przez jedną z dwóch równoległych przewodzących szyn, następnie przez przewodzący „bezpiecznik” (np. cienki kawałek miedzi) i w końcu wraca do źródła przez drugą przewodzącą szynę. Pocisk, który mamy wystrzelić, znajduje się po zewnętrznej stronie bezpiecznika i może się swobodnie poruszać między szynami. Tuż po włączeniu prądu bezpiecznik topi się i wyparowuje, wytwarzając w tym miejscu warstwę przewodzącego gazu.

Reguła prawej dłoni (rys. 30.4) pokazuje, że prądy w szynach na rysunku 30.10a wytwarzają pola magnetyczne, o liniach skierowanych w dół w obszarze między szynami. Wypadkowe pole magnetyczne o indukcji $\vec{B}$ działa na warstwę gazu siłą $\vec{F}$, wynikającą z przepływu prądu I (rys. 30.10b). Zgodnie z równaniem (30.14) i regułą prawej dłoni dla iloczynu wektorowego dochodzimy do wniosku, że siła $\vec{F}$ jest skierowana na zewnątrz, równoległe do szyn. Gaz, który przesuwają się wzdłuż szyn, popycha pocisk, nadając mu w ciągu 1 ms przyspieszenie $5 \cdot 10^6 g$, a następnie wystrzeliwuje go z prędkością 10 km/s.



Rys. 30.10. a) Działo szynowe, przez które płynie prąd I . Przepływ prądu powoduje gwałtowne wyparowanie bezpiecznika. b) Prąd wytwarza pole magnetyczne między szynami, a pole powoduje, że siła $\vec{F}$ działa na przewodzący gaz, który jest częścią obwodu prądowego. Gaz napędza pocisk wzdłuż szyn, powodując jego wystrzelenie

✓ **SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono trzy długie, równoległe prostoliniowe przewody umieszczone w ten sposób, że środkowy przewód jest jednakowo odległy od obu pozostałych. W przewodach płyną prądy o takich samych natężeniach, skierowane bądź za płaszczyznę, bądź przed płaszczyznę rysunku. Uszereguj przewody pod względem wartości siły, jaka działa na nie wskutek przepływu prądu w pozostałych dwóch przewodach, zaczynając od największej wartości.



30.3. Prawo Ampère'a

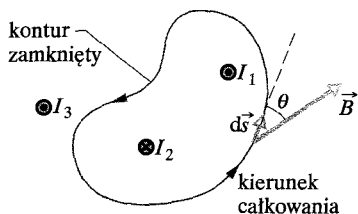
Mozemy wyznaczyć wypadkowe pole elektryczne, wytworzone przez *dowolny* układ ładunków, korzystając ze wzoru (30.2) określającego przyczynkę $d\vec{E}$. Jeżeli układ ładunków jest skomplikowany, być może będziemy musieli skorzystać z komputera. Przypomnij sobie, że jeśli rozkład ładunku ma symetrię płaszczyznową, walcową, lub sferyczną, to można zastosować prawo Gaussa i wyznaczyć wypadkowe pole elektryczne, wkładając w to znacznie mniej wysiłku.

Podobnie możemy wyznaczyć wypadkowe pole magnetyczne wytworzone przez *dowolny* układ prądów, korzystając ze wzoru (30.5) określającego przyczynkę $d\vec{B}$, ale znów być może będziemy musieli skorzystać z komputera dla skomplikowanego układu prądów. Jeżeli jednak układ prądów ma pewną symetrię, będziemy mogli zastosować **prawo Ampère'a** i wyznaczyć wypadkowe pole magnetyczne, wkładając w to znacznie mniej wysiłku. To prawo, które można wyprowadzić z prawa Biota-Savarta, jest zwyczajowo przypisywane André Marie Ampère'owi (1775–1836), na którego cześć nazwano jednostkę natężenia prądu w układzie SI. Jednakże prawo to zostało w rzeczywistości sformułowane ściśle przez angielskiego fizyka Jamesa Clerka Maxwella.

Prawo Ampère'a ma postać:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \quad (\text{prawo Ampère'a}). \quad (30.16)$$

Kółko w znaku całki oznacza, że iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ ma być całkowany wzdłuż *zamkniętego* konturu. Natężenie prądu I_p po prawej stronie jest *całkowitym* natężeniem prądu przecinającego powierzchnię ograniczoną przez kontur całkowania.



Rys. 30.11. Prawo Ampère'a zastosowane do dowolnego konturu, który obejmuje dwa długie prostoliniowe przewody, ale nie obejmuje trzeciego przewodu. Zwróć uwagę na kierunki prądów

Aby dostrzec, jakie znaczenie ma iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ i jego całka, zastosujmy najpierw prawo Ampère'a w przypadku ogólnym, przedstawionym na rysunku 30.11. Na rysunku pokazano przekrój poprzeczny trzech długich, prostoliniowych przewodów, w których płyną prądy I_1 , I_2 i I_3 , skierowane albo za płaszczyznę, albo przed płaszczyznę rysunku. Pewien kontur zamknięty, leżący w płaszczyźnie rysunku, obejmuje dwa przewody, ale nie obejmuje trzeciego. Kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara, zaznaczony na konturze, wskazuje dowolnie wybrany kierunek całkowania w równaniu (30.16).

Aby zastosować prawo Ampère'a, dzielimy w myśli kontur na elementy wektorowe $d\vec{s}$, które są w każdym punkcie skierowane wzdłuż stycznej do konturu w kierunku całkowania. Załóżmy, że w miejscu, w którym znajduje się element

$d\vec{s}$, pokazany na rysunku 30.11, wypadkowy wektor indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez trzy prądy jest równy $\vec{B}$. Przewody są prostopadłe do płaszczyzny rysunku, więc wektor indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez każdy z prądów w miejscu zajmowanym przez element $d\vec{s}$, leży w płaszczyźnie rysunku 30.11. Zatem wypadkowy wektor indukcji $\vec{B}$ w miejscu $d\vec{s}$ musi również leżeć w tej płaszczyźnie. Nie znamy jednak kierunku wektora $\vec{B}$ na płaszczyźnie, dlatego na rysunku 30.11 narysowano wektor $\vec{B}$ pod dowolnym kątem θ do kierunku $d\vec{s}$.

Iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ po lewej stronie równania (30.16) jest równy $B \cos \theta ds$. Tak więc prawo Ampère'a może być zapisane jako:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta ds = \mu_0 I_p. \quad (30.17)$$

Możemy przyjąć, że iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ jest iloczynem elementu ds konturu i składowej indukcji pola $B \cos \theta$, stycznej do konturu. Natomiast całkowanie traktujemy jako sumowanie wszystkich takich iloczynów wokół całego konturu.

Gdy potrafimy rzeczywiście wykonać takie całkowanie, nie musimy wcześniej znać kierunku wektora $\vec{B}$. Zamiast tego przyjmujemy dowolnie wektor $\vec{B}$ w kierunku całkowania (jak na rysunku 30.11). Następnie stosujemy następującą regułę prawej dłoni, aby przypisać znak plus lub minus każdemu prądowi, który wchodzi w skład prądu całkowitego I_p , objętego konturem:

➤ Ułóż prawą rękę wzdłuż konturu, tak aby palce wskazywały kierunek całkowania. Jeżeli prąd przepływa przez kontur w kierunku wyciągniętego kciuka, to przypisujemy mu znak plus. Gdy prąd płynie w kierunku przeciwnym — przypisujemy mu znak minus.

W końcu obliczamy wartość wektora $\vec{B}$ z równania (30.17). Jeżeli otrzymamy dodatnią wartość B , to znaczy, że przyjęty kierunek wektora $\vec{B}$ jest poprawny. Jeżeli otrzymana wartość jest ujemna, to odrzucamy znak minus i oznaczamy $\vec{B}$ na rysunku w kierunku przeciwnym.

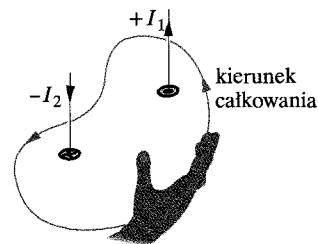
Na rysunku 30.12 reguła prawej dłoni dla prawa Ampère'a została zastosowana dla przypadku, przedstawionego na rysunku 30.11. Dla wskazanego kierunku całkowania, przeciwnego do ruchu wskazówek zegara, wypadkowe natężenie prądu, objętego konturem jest równe:

$$I_p = I_1 - I_2.$$

(Prąd I_3 nie jest objęty konturem). Możemy zatem napisać równanie (30.17) w postaci:

$$\oint B \cos \theta ds = \mu_0 (I_1 - I_2). \quad (30.18)$$

Być może jesteś ciekaw, dlaczego natężenie prądu I_3 nie występuje po prawej stronie równania (30.18), mimo że wartość indukcji B po lewej stronie zależy również od tego prądu. Odpowiedź wynika z faktu, że przyczynki do pola magnetycznego, pochodzące od prądu I_3 kompensują się, gdyż całkowanie w równaniu 30.18 jest wykonywane wokół całego konturu. W przeciwieństwie do tego, przyczynki do pola magnetycznego, pochodzące od prądu objętego konturem się nie kompensują.

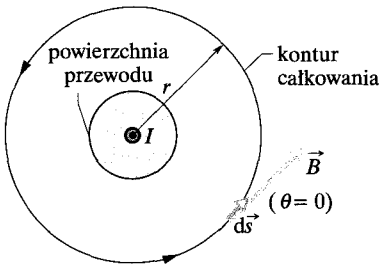


Rys. 30.12. Reguła prawej dłoni dla prawa Ampère'a, służąca do określania znaków prądów objętych konturem. Sytuacja odpowiada przedstawionej na rysunku 30.11

W ogólnym przypadku, przedstawionym na rysunku 30.11, nie potrafimy rozwiązać równania (30.18) względem wartości B , ponieważ nie mamy dostatecznej informacji, która pozwoliłaby uprościć i obliczyć całkę. Znamy jednak wynik całkowania; musi on być równy wartości wyrażenia $\mu_0(I_1 - I_2)$, które określa wypadkowe natężenie prądu przecinającego powierzchnię ograniczoną konturem.

Zastosujemy teraz prawo Ampère'a dla dwóch przypadków, w których symetria pozwala nam na uproszczenie i obliczenie całki, a więc na wyznaczenie indukcji magnetycznej.

Pole magnetyczne na zewnątrz długiego prostoliniowego przewodu z prądem



Rys. 30.13. Zastosowanie prawa Ampère'a do wyznaczenia indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez prąd o natężeniu I , płynący w długim prostoliniowym przewodzie. Konturem całkowania jest okrąg, leżący na zewnątrz przewodu

Na rysunku 30.13 przedstawiono długi prostoliniowy przewód, w którym prąd o natężeniu I płynie przed płaszczyznę rysunku. Z równania (30.6) wynika, że indukcja magnetyczna $\vec{B}$ pola, wytworzonego przez ten prąd ma taką samą wartość we wszystkich punktach, znajdujących się w odległości r od środka przewodu; innymi słowy pole $\vec{B}$ ma symetrię walcową względem osi przewodu. Możemy wykorzystać tę symetrię do uproszczenia całki, występującej w prawie Ampère'a (równania (30.16) i (30.17)), jeżeli otoczmy przewód zamkniętym konturem w kształcie współśrodkowego okręgu o promieniu r , jak pokazano na rysunku 30.13. Indukcja $\vec{B}$ ma wtedy taką samą wartość B w każdym punkcie konturu. Będziemy obliczać całkę w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, więc $d\vec{s}$ ma kierunek, pokazany na rysunku 30.13.

Wyrażenie $B \cos \theta$ w równaniu (30.17) można dalej uprościć, jeśli zauważymy, że wektor $\vec{B}$ jest styczny do konturu w każdym jego punkcie, podobnie jak $d\vec{s}$. Zatem wektory $\vec{B}$ i $d\vec{s}$ są albo równoległe, albo antyrównoległe w każdym punkcie konturu i przyjmujemy (w sposób dowolny) tę pierwszą możliwość. Wobec tego w każdym punkcie konturu kąt θ między wektorami $d\vec{s}$ i $\vec{B}$ jest równy 0° , a $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$. Całka w równaniu (30.17) przyjmuje więc postać:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta ds = B \oint ds = B(2\pi r).$$

Zauważ, że ostatnia całka w powyższym równaniu oznacza sumowanie wszystkich elementów liniowych ds po konturze w kształcie okręgu; otrzymujemy więc w wyniku długość okręgu $2\pi r$.

Z reguły prawej dłoni otrzymujemy znak plus dla prądu na rysunku 30.13. Wyrażenie po prawej stronie prawa Ampère'a przyjmuje postać $+\mu_0 I$ i otrzymujemy wówczas:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I,$$

czyli

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (30.19)$$

Przy niewielkiej zmianie oznaczeń jest to równanie (30.6), które wyprowadziliśmy wcześniej z prawa Biota-Savarta, wkładając w to znacznie więcej wysiłku. Ponadto, ponieważ otrzymaliśmy dodatnią wartość B , wiemy, że kierunek wektora $\vec{B}$, pokazany na rysunku 30.13 został wybrany poprawnie.

Pole magnetyczne wewnątrz długiego prostoliniowego przewodu z prądem

Na rysunku 30.14 przedstawiono przekrój poprzeczny długiego prostoliniowego przewodu o promieniu R . W przewodzie płynie równomiernie rozłożony prąd o natężeniu I , skierowany przed płaszczyznę rysunku. Ze względu na równomierny rozkład prądu w przekroju poprzecznym przewodu, pole magnetyczne wytwarzane przez ten prąd musi mieć symetrię walcową. Tak więc, aby wyznaczyć indukcję magnetyczną pola wewnątrz przewodu, możemy znów wykorzystać kontur o promieniu r , przyjmując teraz $r < R$, jak pokazano na rysunku 30.14. Z symetrii wynika ponownie, że wektor $\vec{B}$ jest styczny do konturu, tak więc lewa strona prawa Ampère'a przyjmuje postać:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r). \quad (30.20)$$

Aby otrzymać prawą stronę prawa Ampère'a, zauważmy, że ze względu na równomierny rozkład prądu, natężenie prądu I_p , objętego konturem jest proporcjonalne do pola powierzchni wewnątrz tego konturu, czyli:

$$I_p = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \quad (30.21)$$

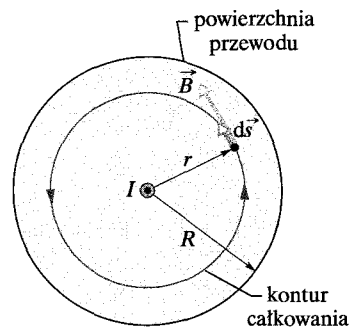
Z reguły prawej dłoni wynika, że I_p ma znak dodatni. Wobec tego z prawa Ampère'a otrzymujemy:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

czyli

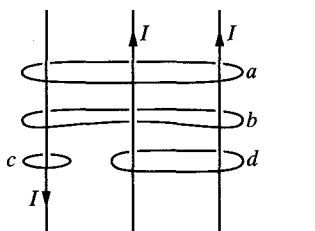
$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r. \quad (30.22)$$

Zatem wartość indukcji magnetycznej B wewnątrz przewodu jest proporcjonalna do r . Wartość ta jest równa zero w środku i osiąga maksimum na powierzchni przewodu, gdzie $r = R$. Zauważ, że z równań (30.19) i (30.22) otrzymujemy tę samą wartość B dla $r = R$. Innymi słowy, wyrażenia określające indukcję magnetyczną na zewnątrz i wewnątrz przewodu dają taki sam wynik na powierzchni przewodu.



Rys. 30.14. Zastosowanie prawa Ampère'a do wyznaczenia indukcji magnetycznej pola, które powstaje wewnątrz długiego prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym, w wyniku przepływu prądu o natężeniu I . Prąd jest równomiernie rozłożony w przekroju poprzecznym przewodu i płynie przed płaszczyznę rysunku. Kontur całkowania znajduje się wewnątrz przewodu

SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono trzy przewody, w których płyną prądy o takich samych natężeniach I i kierunkach zaznaczonych na rysunku, oraz cztery kontury zamknięte. U szereguj kontury pod względem wartości całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ po każdym z nich, zaczynając od największej wartości.



Przykład 30.3

Na rysunku 30.15a przedstawiono przekrój poprzeczny długiego przewodzącego walca o promieniu wewnętrznym $a = 2$ cm i promieniu zewnętrznym $b = 4$ cm. Przez walec płynie prąd skierowany przed płaszczyznę rysunku, a gęstość prądu w przekroju poprzecznym jest dana wyrażeniem $J = cr^2$, gdzie $c = 3 \cdot 10^6$ A/m⁴, a r jest wyrażone w metrach. Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w punkcie oddalonym o 3 cm od osi walca?

rowany przed płaszczyznę rysunku, a gęstość prądu w przekroju poprzecznym jest dana wyrażeniem $J = cr^2$, gdzie $c = 3 \cdot 10^6$ A/m⁴, a r jest wyrażone w metrach. Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w punkcie oddalonym o 3 cm od osi walca?

ROZWIĄZANIE:

Punkt, w którym chcemy wyznaczyć $\vec{B}$, znajduje się wewnątrz przewodzącego walca, między jego wewnętrzną i zewnętrzną powierzchnią boczną. Widzimy, że rozkład prądu ma symetrię cylindryczną (dla danego promienia gęstość prądu w przekroju jest taka sama).

➡ 1. Symetria pozwala nam zastosować prawo Ampère'a do wyznaczenia wartości $\vec{B}$ w danym punkcie. Najpierw wybieramy kontur całkowania, pokazany na rysunku 30.15b. Kontur jest okręgiem współśrodkowym z walcem i ma promień $r = 3$ cm, ponieważ naszym zadaniem jest wyznaczenie indukcji $\vec{B}$ w tej właśnie odległości od osi walca.

➡ 2. Następnym krokiem jest obliczenie natężenia prądu I_p , objętego konturem. Jednakże *nie możemy* założyć proporcjonalności, jak w równaniu (30.21), ponieważ teraz prąd nie jest rozłożony równomiernie. Zamiast tego, postępując jak w przykładzie 27.2b, musimy scałkować gęstość prądu od wewnętrznego promienia walca a do promienia konturu r :

$$\begin{aligned} I_p &= \int J dS = \int_a^r cr^2 (2\pi r dr) = 2\pi c \int_a^r r^3 dr \\ &= 2\pi c \left[\frac{r^4}{4} \right]_a^r = \frac{\pi c (r^4 - a^4)}{2}. \end{aligned}$$

Kierunek całkowania, zaznaczony na rysunku 30.15b został wybrany dowolnie jako zgodny z ruchem wskazówek zegara. Stosując do tego konturu regułę prawej dłoni dla prawa Ampère'a, dochodzimy do wniosku, że powinniśmy przyjąć ujemną wartość I_p , ponieważ prąd jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a kciuk wskazuje kierunek za płaszczyznę rysunku.

Następnie obliczamy lewą stronę prawa Ampère'a dokładnie tak samo, jak dla rysunku 30.14 i znów otrzymujemy wzór (30.20). Zatem z prawa Ampère'a:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p$$

wynika, że:

$$B(2\pi r) = -\frac{\mu_0 \pi c}{2} (r^4 - a^4).$$

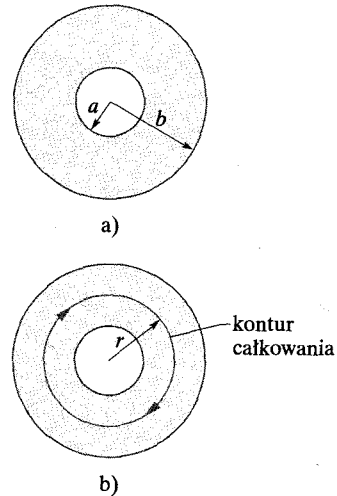
Wyznaczając B i podstawiając dane, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu_0 c}{4r} (r^4 - a^4) \\ &= -\frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(3 \cdot 10^6 \text{ A/m}^4)}{4(0,03 \text{ m})} [(0,03 \text{ m})^4 - (0,02 \text{ m})^4] \\ &= -2 \cdot 10^{-5} \text{ T}. \end{aligned}$$

Tak więc indukcja magnetyczna $\vec{B}$ pola w punkcie odległym od osi o 3 cm ma wartość:

$$B = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (\text{odpowiedź})$$

a linie pola magnetycznego są skierowane przeciwnie do naszego kierunku całkowania, a więc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara na rysunku 30.15b.

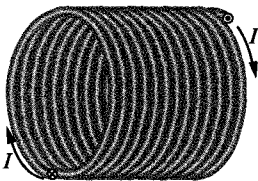


Rys. 30.15. Przykład 30.3. a) Przekrój poprzeczny przewodzącego walca o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym promieniu b . b) Kontur całkowania o promieniu r wybrany w celu obliczenia indukcji magnetycznej w punktach oddalonych o r od osi walca

30.4. Solenoidy i toroidy

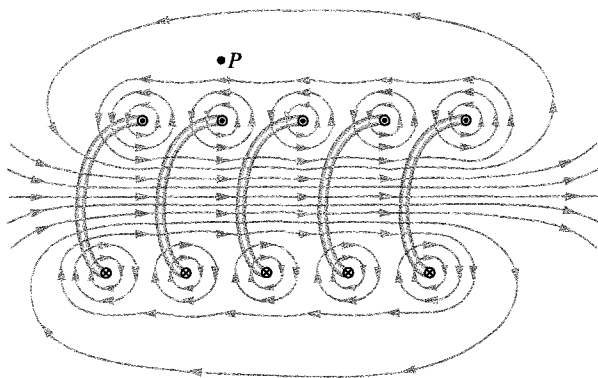
Pole magnetyczne solenoidu

Zwróćmy teraz uwagę na inny przypadek, w którym prawo Ampère'a okazuje się przydatne. Dotyczy on pola magnetycznego wytworzonego przez prąd płynący w długiej cewce, ciasno nawiniętej wzdłuż linii śrubowej. Taką cewkę nazywamy **solenoidem** (rys. 30.16). Zakładamy przy tym, że długość solenoidu jest znacznie większa od jego średnicy.



Rys. 30.16. Solenoid, w którym płynie prąd o natężeniu I

Na rysunku 30.17 przedstawiono przekrój fragmentu solenoidu z rozsuniętymi zwojami. Pole magnetyczne solenoidu jest superpozycją pól, wytwarzanych przez pojedyncze zwoje, z których składa się solenoid. Dla punktów położonych bardzo blisko uzwojenia, każdy zwoj zachowuje się pod względem magnetycz-



Rys. 30.17. Pionowy przekrój przechodzący przez oś solenoidu z rozsuniętymi zwojami. Pokazane są części pięciu zwojów położone z tyłu, a także linie pola magnetycznego, wytworzonego przez prąd płynący w solenoidzie. Wokół każdego zwoju powstają kołowe linie pola. W pobliżu osi solenoidu linie skierowane są wzdłuż osi. Ułożone blisko siebie linie wskazują, że pole w pobliżu osi jest silne. Na zewnątrz solenoidu odległości między liniami są duże; oznacza to, że pole tam jest bardzo słabe

nym prawie tak, jak długi prostoliniowy przewód, a linie pola tworzą prawie współśrodkowe okręgi. Z rysunku 30.17 wnioskujemy, że pola między sąsiednimi zwojami niemal całkowicie się znoszą, natomiast wewnątrz solenoidu i dostatecznie daleko od uzwojenia wektor $\vec{B}$ jest w przybliżeniu równoległy do osi solenoidu. W granicznym przypadku *idealnego solenoidu*, który jest nieskończenie długi i składa się ze ściśle ułożonych zwojów o przekroju kwadratowym, pole wewnątrz solenoidu jest jednorodne, a jego linie są równoległe do osi solenoidu.

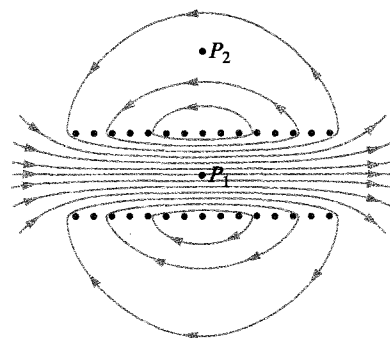
W punktach położonych powyżej solenoidu, takich jak punkt P na rysunku 30.17, pole wytworzone przez górne części zwojów (zaznaczone $\odot$) jest skierowane w lewo (jak narysowano w pobliżu P) i znosi się częściowo z polem pochodzącym od dolnych części zwojów (zaznaczonych $\otimes$) i skierowanym w prawo (pole to nie zostało zaznaczone na rysunku). W granicznym przypadku solenoidu idealnego indukcja magnetyczna na zewnątrz solenoidu jest równa zero. Dla rzeczywistego solenoidu możemy również przyjąć, że indukcja na zewnątrz solenoidu jest równa zero. Założenie to jest spełnione, jeśli długość solenoidu jest znacznie większa od jego średnicy, a rozważamy punkty, takie jak punkt P , tzn. położone dostatecznie daleko od końców solenoidu. Kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wzdłuż osi solenoidu wynika z reguły prawej dłoni: uchwycić solenoid prawą ręką, tak aby twoje palce wskazywały kierunek prądu w uzwojeniu; twój wyciągnięty kciuk wskaże wtedy kierunek wektora indukcji magnetycznej, zgodny z osią solenoidu.

Na rysunku 30.18 przedstawiono linie pola $\vec{B}$ w rzeczywistym solenoidzie. Odległości między liniami w środkowym obszarze wskazują, że pole wewnątrz cewki jest dość silne i jednorodne w przekroju poprzecznym. Pole na zewnątrz solenoidu jest natomiast stosunkowo słabe.

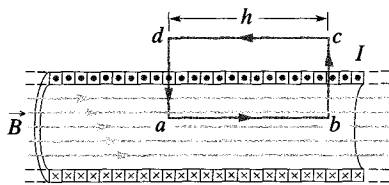
Zastosujmy teraz prawo Ampère'a:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \quad (30.23)$$

do idealnego solenoidu, przedstawionego na rysunku 30.19. Pole $\vec{B}$ jest



Rys. 30.18. Linie pola magnetycznego w rzeczywistym solenoidzie o skończonej długości. Pole jest silne i jednorodne w punktach leżących wewnątrz solenoidu, takich jak punkt P_1 , natomiast stosunkowo słabe w punktach leżących na zewnątrz, takich jak punkt P_2



Rys. 30.19. Zastosowanie prawa Ampère'a do odcinka długiego idealnego solenoidu, w którym płynie prąd o natężeniu I . Kontur całkowania jest prostokątem $abcd$

jednorodne wewnątrz solenoidu, a jego indukcja jest równa zero na zewnątrz. Wykorzystując prostokątny kontur całkowania $abcd$, możemy zapisać całkę $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ w postaci sumy czterech całek, po jednej dla każdego odcinka konturu:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (30.24)$$

Pierwsza całka po prawej stronie równania (30.24) jest równa Bh , gdzie B jest wartością indukcji jednorodnego pola $\vec{B}$ wewnątrz solenoidu, a h jest dowolnie wybraną długością odcinka łączącego a i b . Druga i czwarta całka są równe zero, gdyż dla każdego elementu $d\vec{s}$ tych odcinków wektor $\vec{B}$ jest albo prostopadły do $d\vec{s}$, albo równy zero, a więc iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ jest równy zero. Trzecia całka, która jest obliczana wzdłuż odcinka zewnętrznego, jest również równa zero, gdyż $B = 0$ we wszystkich punktach leżących na zewnątrz solenoidu. Zatem całka $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ dla całego prostokątnego konturu ma wartość Bh .

Całkowite natężenie prądu I_p , obejmowanego prostokątnym konturem na rysunku 30.19, nie jest równe natężeniu prądu I w uzwojeniu solenoidu, gdyż kontur całkowania obejmuje więcej niż jeden zwoj. Załóżmy, że n jest liczbą zwojów, przypadających na jednostkę długości; wówczas kontur obejmuje nh zwojów i wobec tego:

$$I_p = I(nh).$$

Z prawa Ampère'a otrzymujemy więc:

$$Bh = \mu_0 I nh,$$

czyli:

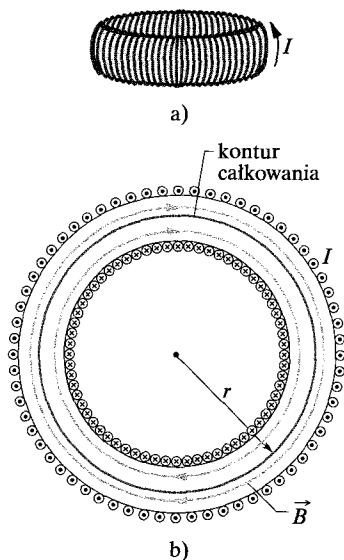
$$B = \mu_0 I n \quad (\text{solenoid idealny}) \quad (30.25)$$

Choć wyprowadziliśmy wzór (30.25) dla nieskończenie długiego idealnego solenoidu, jest on całkiem dobrze spełniony dla rzeczywistych solenoidów, jeśli tylko zastosujemy go do punktów, położonych dostatecznie daleko od końców solenoidu. Wzór (30.25) jest zgodny z faktem stwierdzonym doświadczalnie, że wartość indukcji magnetycznej B pola wewnątrz solenoidu nie zależy od jego średnicy ani długości, i jest stała w przekroju poprzecznym solenoidu. Solenoid umożliwia więc w praktyce wytworzenie, w celach doświadczalnych, jednorodnego pola magnetycznego o zadanej wartości indukcji, podobnie jak płaski kondensator umożliwia w praktyce uzyskanie jednorodnego pola elektrycznego o zadanej wartości natężenia.

Pole magnetyczne toroidu

Na rysunku 30.20a przedstawiono **toroid**, czyli solenoid zwinięty w koło, przypominający kształtem pusty w środku obwarzanek. Jakie pole magnetyczne $\vec{B}$ powstaje w punktach wewnątrz toroidu (czyli w pustym wnętrzu obwarzanka)? Możemy się tego dowiedzieć, stosując prawo Ampère'a i wykorzystując symetrię toroidu.

Z właściwości symetrii wynika, że linie pola $\vec{B}$ tworzą wewnątrz toroidu współśrodkowe okręgi i są skierowane, jak na rysunku 30.20b. Wybierzmy okrąg



Rys. 30.20. a) Toroid, przez który płynie prąd o natężeniu I . b) Poziomy przekrój toroidu. Pole magnetyczne wewnątrz rury w kształcie obwarzanka może być wyznaczone za pomocą prawa Ampère'a i konturu całkowania, pokazanego na rysunku

o promieniu r jako kontur całkowania i przyjmijmy kierunek całkowania zgodny z ruchem wskazówek zegara. Prawo Ampère'a (równanie (30.16)) daje nam:

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 I N,$$

gdzie I jest natężeniem prądu w uzwojeniu toroidu, a N — całkowitą liczbą zwojów (zakładamy, że kierunek prądu jest dodatni dla zwojów objętych konturem całkowania). Stąd otrzymujemy:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \quad (\text{toroid}). \quad (30.26)$$

Inaczej niż w solenoidzie, indukcja nie jest stała w przekroju toroidu. Można łatwo wykazać na podstawie prawa Ampère'a, że $B = 0$ w punktach położonych na zewnątrz idealnego toroidu (czyli idealnego solenoidu zwiniętego w koło).

Kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wewnątrz toroidu wynika z reguły prawej dłoni. Uchwyć toroid palcami swojej prawej dłoni, zagiętymi w kierunku, w którym płynie prąd w uzwojeniu; twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek wektora indukcji magnetycznej.

Przykład 30.4

Przez solenoid o długości $L = 1,23$ m i o średnicy wewnętrznej $d = 3,55$ cm płynie prąd o natężeniu $I = 5,57$ A. Solenoid składa się z pięciu ciasno nawiniętych warstw, z których każda zawiera 850 zwojów na odcinku L . Ile wynosi indukcja B w środku solenoidu?

ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Zgodnie z równaniem (30.25) wartość indukcji magnetycznej B w środku solenoidu zależy od natężenia prądu I płynącego w uzwojeniu i liczby zwojów n na jednostkę długości.

➡ 2. B nie zależy od średnicy solenoidu, więc wartość n dla pięciu identycznych warstw jest po prostu pięć razy większa od wartości dla pojedynczej warstwy. Wobec tego z równania (30.25) otrzymujemy:

$$B = \mu_0 I n = (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(5,57 \text{ A}) \frac{5 \cdot 850 \text{ zwojów}}{1,23 \text{ m}} \\ = 2,42 \cdot 10^{-2} \text{ T} = 24,2 \text{ mT}. \quad (\text{odpowiedź})$$

30.5. Cewka z prądem jako dipol magnetyczny

Dotychczas omówiliśmy pole magnetyczne, wytwarzane przez prąd, płynący w długim prostoliniowym przewodzie, w solenoidzie i w toroidzie. Zwrócimy teraz uwagę na pole, wytworzone przez cewkę, w której płynie prąd. Widzieliśmy w paragrafie 29.9, że taka cewka zachowuje się jak dipol magnetyczny. Jeżeli umieścimy cewkę w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$, to będzie działać na nią moment siły:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (30.27)$$

W tym równaniu $\vec{\mu}$ oznacza dipolowy moment magnetyczny cewki, który ma wartość $NI S$, gdzie N jest liczbą zwojów, I jest natężeniem prądu płynącego w każdym zwoju, a S oznacza pole powierzchni, otoczonej przez każdy zwoj.

Przypomnij sobie, że kierunek $\vec{\mu}$ wynika z reguły prawej dłoni: Uchwyć uzwojenie cewki w taki sposób, aby palce twojej prawej dłoni wskazywały kierunek prądu; twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek momentu dipolowego $\vec{\mu}$.

Pole magnetyczne cewki

Zajmiemy się teraz inną cechą cewki z prądem jako dipola magnetycznego. Jakie pole magnetyczne wytwarza taka cewka w otaczającej ją przestrzeni? Symetria takiego układu jest niewystarczająca, aby skorzystać z prawa Ampère'a. Musimy zatem zastosować prawo Biota–Savarta. Dla ułatwienia rozpatrzmy najpierw cewkę w postaci pojedynczego okrągłego zwoju oraz punkty, znajdujące się na osi symetrii, którą oznaczmy jako oś z . Wykażemy, że wartość indukcji magnetycznej pola w tych punktach jest równa:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (30.28)$$

gdzie R jest promieniem cewki, a z jest odległością danego punktu od środka cewki. Ponadto kierunek wektora indukcji $\vec{B}$ jest taki sam, jak kierunek dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ cewki.

Dla punktów na osi, położonych daleko od cewki, możemy przyjąć $z \gg R$ w równaniu (30.28). Przy takim przybliżeniu równanie to redukuje się do:

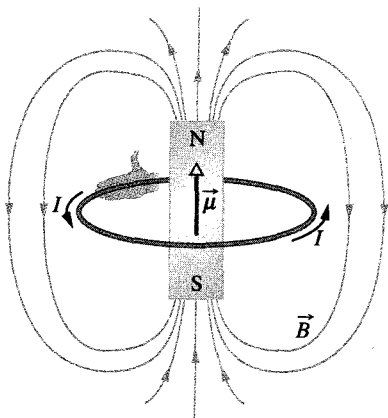
$$B(z) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}.$$

Pamiętając, że πR^2 jest polem powierzchni S cewki i uogólniając wynik na przypadek cewki o N zwojach, możemy zapisać to równanie w postaci:

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I S}{2\pi z^3}.$$

Co więcej, ponieważ wektory $\vec{B}$ i $\vec{\mu}$ mają ten sam kierunek, możemy zapisać to równanie w postaci wektorowej, korzystając z zależności $\mu = N I S$:

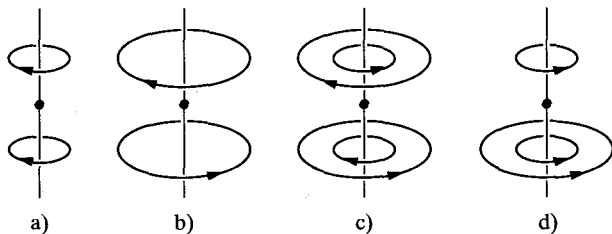
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3} \quad (\text{cewka z prądem}). \quad (30.29)$$



Rys. 30.21. Pętla z prądem wytwarza pole magnetyczne, podobne do pola magnesu sztabkowego, dlatego można skojarzyć z pętlą biegun północny i południowy. Dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$ pętli, wyznaczony za pomocą reguły prawej dłoni, jest skierowany od bieguna południowego do północnego, zgodnie z kierunkiem linii pola $\vec{B}$ wewnątrz pętli

Tak więc możemy traktować cewkę z prądem jako dipol magnetyczny w dwójaki sposób: 1) cewka umieszczona w zewnętrznym polu magnetycznym doznaje działania momentu siły; 2) cewka wytwarza swoje własne pole magnetyczne, opisywane równaniem (30.29) dla punktów na osi cewki, położonych dostatecznie daleko. Na rysunku 30.21 przedstawiono pole magnetyczne pojedynczej pętli z prądem. Jedna strona pętli odgrywa rolę bieguna północnego (w kierunku $\vec{\mu}$), a druga — bieguna południowego, co ilustruje magnes, naszkicowany na rysunku.

SPRAWDZIAN 4: Na rysunku przedstawiono cztery układy okrągłych pętli o promieniach r lub $2r$. Pętle mają wspólną pionową oś (prostopadłą do nich) i płyną w nich we wskazanych kierunkach prądy o takich samych natężeniach. Uszereguj układy pod względem wartości indukcji wypadkowego pola magnetycznego w punkcie oznaczonym kropką, leżącym na osi w połowie między pętlami, zaczynając od największej wartości.



Wyprowadzenie wzoru (30.28)

Na rysunku 30.22 przedstawiono w rzucie połowę okrągłej ramki o promieniu R , w której płynie prąd o natężeniu I . Rozważmy punkt P na osi ramki, leżący w odległości z od jej płaszczyzny i zastosujmy prawo Biota-Savarta do elementu $d\vec{s}$ ramki, położonego po jej lewej stronie. Wektorowy element długości $d\vec{s}$ jest skierowany prostopadłe przed płaszczyznę rysunku. Kąt θ między $d\vec{s}$ a $\vec{r}$ na rysunku 30.22 jest równy 90° . Płaszczyzna, wyznaczona przez te dwa wektory, jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i zawiera zarówno $d\vec{s}$, jak i $\vec{r}$. Z prawa Biota-Savarta (i z reguły prawej dłoni) wynika, że wektor $d\vec{B}$ pola wytworzonego w punkcie P przez element $d\vec{s}$ jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektory $d\vec{s}$ i $\vec{r}$, a więc leży w płaszczyźnie rysunku i jest skierowany prostopadłe do $\vec{r}$, jak pokazano na rysunku 30.22.

Rozłożmy $d\vec{B}$ na dwie składowe: $dB_{\parallel}$, skierowaną wzdłuż osi ramki oraz $dB_{\perp}$, prostopadłą do osi. Z symetrii wynika, że wektorowa suma wszystkich prostopadłych składowych $dB_{\perp}$, pochodzących od wszystkich elementów ramki ds , jest równa zeru. Pozostaje więc tylko składowa osiowa $dB_{\parallel}$ i mamy:

$$B = \int dB_{\parallel}.$$

Dla elementu $d\vec{s}$ na rysunku 30.22 prawo Biota-Savarta mówi, że indukcja magnetyczna w odległości r jest równa:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s} \sin 90^\circ}{r^2}.$$

Wiemy również, że:

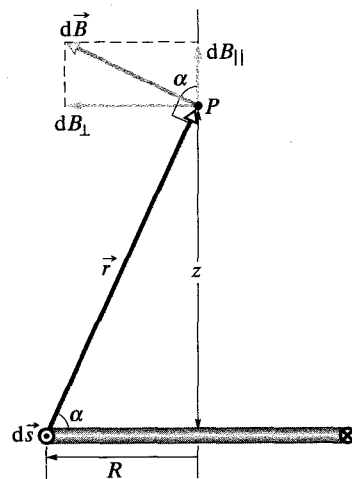
$$dB_{\parallel} = dB \cos \alpha.$$

Łącząc te dwie zależności, otrzymujemy:

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I \cos \alpha ds}{4\pi r^2}. \quad (30.30)$$

Na rysunku 30.22 widać, że r i α nie są niezależne, ale są ze sobą związane. Spróbujmy wyrazić obie te wielkości w funkcji zmiennej z , czyli odległości między punktem P a środkiem ramki. Otrzymujemy następujące zależności:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (30.31)$$



Rys. 30.22. Ramka o promieniu R , w której płynie prąd. Płaszczyzna ramki jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Pokazana jest tylko połowa ramki, położona z tyłu. Stosujemy prawo Biota-Savarta do wyznaczenia indukcji w punkcie P na osi ramki

oraz:

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (30.32)$$

Podstawiając wyrażenia (30.31) i (30.32) do równania (30.30), otrzymujemy:

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} ds.$$

Zauważ, że I , R i z przyjmują te same wartości dla wszystkich elementów ds wokół ramki, więc całkując to wyrażenie, otrzymamy:

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int ds,$$

czyli biorąc pod uwagę, że $\int ds$ jest po prostu obwodem $2\pi R$ ramki:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Jest to właśnie równanie (30.28), które mieliśmy wyprowadzić.

Podsumowanie

Prawo Biota–Savarta Indukcja magnetyczna pola wytworzonego przez prąd płynący w przewodniku może być wyznaczona z prawa Biota–Savarta. A z tego prawa wynika, że przyczynek $d\vec{B}$ do indukcji pola, wytworzonego przez element prądu $I d\vec{s}$ w punkcie P , odległym o r od tego elementu jest równy:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{prawo Biota–Savarta}). \quad (30.5)$$

W tym równaniu $\vec{r}$ jest wektorem, skierowanym od elementu prądu do punktu P . Wielkość μ_0 , zwana przenikalnością magnetyczną próżni (stałą magnetyczną) jest równa $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m/A}$.

Pole magnetyczne długiego prostoliniowego przewodu Zgodnie z prawem Biota–Savarta, dla długiego prostoliniowego przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu I , wartość indukcji magnetycznej w odległości R od przewodu jest równa

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (\text{długi przewód prostoliniowy}). \quad (30.6)$$

Pole magnetyczne przewodu w kształcie łuku okręgu Wartość indukcji magnetycznej w środku łuku okręgu o promieniu R i kącie środkowym ϕ (w radianach) jest równa:

$$B = \frac{\mu_0 I \phi}{4\pi R} \quad (\text{w środku łuku okręgu}), \quad (30.11)$$

gdzie I jest natężeniem prądu, płynącego wzdłuż łuku.

Siła działająca między równoległymi przewodami, w których płyną prądy Równoległe przewody, w których płyną prądy w tym

samym kierunku, przyciągają się, a równoległe przewody, w których płyną prądy w kierunkach przeciwnych, się odpychają. Wartość siły działającej na odcinek o długości L któregośkolwiek z dwóch przewodów jest równa:

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}, \quad (30.15)$$

gdzie d jest odległością przewodów, a I_a i I_b oznaczają natężenia prądów w przewodach.

Prawo Ampère’a Prawo Ampère’a stwierdza, że:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \quad (\text{prawo Ampère’a}). \quad (30.16)$$

Całka krzywoliniowa w tym równaniu jest obliczana wzdłuż zamkniętego konturu. Natężenie prądu I_p jest całkowitym natężeniem prądu przecinającego powierzchnię ograniczoną przez kontur całkowania. Dla pewnych rozkładów prądów, łatwiej jest zastosować równanie (30.16) niż (30.5), aby obliczyć indukcję magnetyczną pola wytworzonego przez prąd.

Pola solenoidu i toroidu Wewnątrz długiego solenoidu, przez który płynie prąd o natężeniu I , wartość B indukcji magnetycznej w punktach oddalonych od końców solenoidu, jest równa:

$$B = \mu_0 n I \quad (\text{solenoid idealny}), \quad (30.25)$$

gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości. W punkcie leżącym wewnątrz toroidu wartość indukcji B jest równa:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \quad (\text{toroid}), \quad (30.26)$$

gdzie r jest odległością danego punktu od środka toroidu.

Pole dipola magnetycznego Pole magnetyczne, wytworzone przez cewkę z prądem (która jest w istocie *dipolem magnetycznym*) w punkcie P , położonym na osi cewki w odległości z od

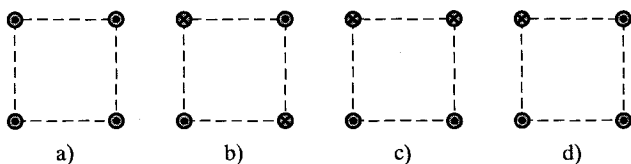
płaszczyzny ramki jest skierowane równoległe do osi i dane wyrażeniem:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}, \quad (30.29)$$

gdzie $\vec{\mu}$ jest dipolowym momentem magnetycznym cewki. To równanie jest słuszne tylko wtedy, gdy odległość z jest znacznie większa od wymiarów cewki.

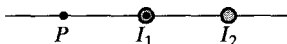
Pytania

1. Na rysunku 30.23 przedstawiono cztery układy długich równoległych przewodów, w których płyną prądy o takim samym natężeniu, za lub przed płaszczyznę rysunku. Przewody znajdują się w wierzchołkach identycznych kwadratów. Uszereguj układy pod względem wartości indukcji magnetycznej wypadkowego pola w środku kwadratu, zaczynając od największej wartości.



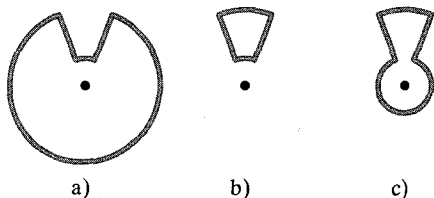
Rys. 30.23. Pytanie 1

2. Na rysunku 30.24 przedstawiono przekrój poprzeczny dwóch prostoliniowych przewodów. W przewodzie po lewej stronie płynie prąd o natężeniu I_1 , skierowany przed płaszczyznę rysunku. Jeżeli wypadkowe pole, wytworzone przez obydwa prądy ma być równe zero w punkcie P , to: a) czy prąd o natężeniu I_2 w przewodzie po prawej stronie powinien być skierowany za, czy przed płaszczyznę rysunku, b) czy natężenie prądu I_2 powinno być większe, mniejsze, czy równe natężeniu prądu I_1 ?



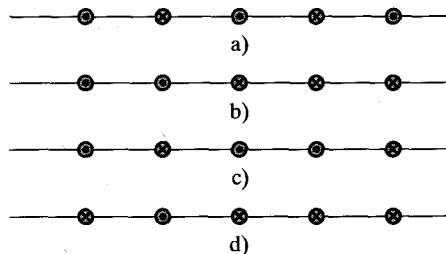
Rys. 30.24. Pytanie 2

3. Na rysunku 30.25 przedstawiono trzy obwody, z których każdy składa się z dwóch współśrodkowych łuków, jednego o promieniu r , a drugiego o większym promieniu R , oraz z dwóch odcinków radialnych. W każdym obwodzie płynie prąd o takim samym natężeniu, a odcinki radialne tworzą taki sam kąt. Uszereguj obwody pod względem wartości indukcji wypadkowego pola magnetycznego w środku, zaczynając od największej wartości.



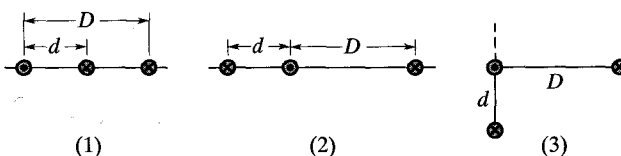
Rys. 30.25. Pytanie 3

4. Na rysunku 30.26 przedstawiono cztery układy długich, równoległych i równoodległych przewodów, w których płyną prądy o takich samych natężeniach, skierowane za lub przed płaszczyznę rysunku. Uszereguj układy pod względem wartości wypadkowej siły, działającej na przewód środkowy, wywołanej przepływem prądu w pozostałych przewodach, zaczynając od największej wartości.



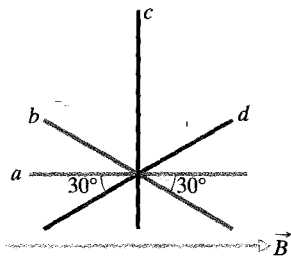
Rys. 30.26. Pytanie 4

5. Na rysunku 30.27 przedstawiono trzy układy trzech długich prostoliniowych przewodów, w których płyną prądy o takich samych natężeniach, skierowane za lub przed płaszczyznę rysunku. a) Uszereguj układy pod względem wartości wypadkowej siły, działającej na przewód z prądem, płynącym przed płaszczyznę rysunku, wywołanej przepływem prądu w pozostałych przewodach, zaczynając od największej wartości. b) Czy kąt między kierunkiem siły, działającej na ten przewód w układzie 3, a linią przerywaną jest równy, mniejszy, czy większy od 45° ?



Rys. 30.27. Pytanie 5

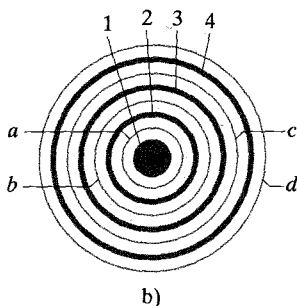
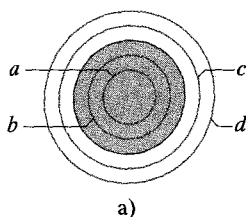
6. Na rysunku 30.28 przedstawiono jednorodne pole magnetyczne o indukcji $\vec{B}$ i cztery prostoliniowe drogi całkowania o równych długościach. Uszereguj drogi pod względem wartości całki



Rys. 30.28. Pytanie 6

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$, obliczonej wzdłuż tych dróg, zaczynając od największej wartości.

7. Na rysunku 30.29a przedstawiono cztery kontury całkowania w kształcie okręgów, ułożonych współśrodkowo z przewodem, w którym prąd płynie przed płaszczyznę rysunku. Prąd jest rozłożony równomiernie w przekroju poprzecznym przewodu. Uszereguj kontury pod względem wartości całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$, obliczonej wzdłuż każdego konturu, zaczynając od największej wartości.

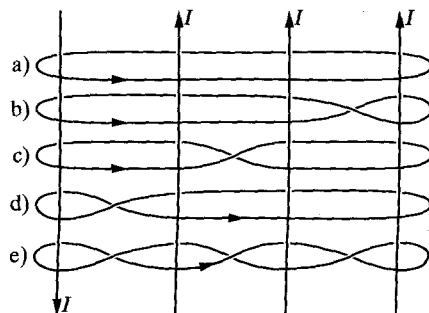


Rys. 30.29. Pytania 7 i 8

8. Na rysunku 30.29b przedstawiono cztery kontury całkowania w kształcie okręgów (zaznaczone na czerwono) i cztery długie walcowe przewody (zaznaczone na niebiesko). Wszystkie kontury i przewody są współśrodkowe. Trzy z przewodów mają kształt walców pustych w środku, a przewód położony w środku jest pełnym walcem. Prądy w przewodach mają następujące natężenia

i kierunki: 4 A przed płaszczyznę rysunku (1), 9 A za płaszczyznę rysunku (2), 5 A przed płaszczyznę rysunku (3), 3 A za płaszczyznę rysunku (4). Uszereguj kontury całkowania pod względem wartości całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$, obliczonej wzdłuż każdego konturu, zaczynając od największej wartości.

9. Na rysunku 30.30 przedstawiono cztery przewody z prądem o takich samych natężeniach I oraz pięć zamkniętych konturów, obejmujących te przewody. Uszereguj kontury pod względem wartości całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$, obliczonej we wskazanych kierunkach, zaczynając od największej (dodatniej), a kończąc na najmniejszej (ujemnej) wartości całki.



Rys. 30.30. Pytanie 9

10. W tabeli podano liczbę zwojów n na jednostkę długości oraz natężenie prądu I w sześciu idealnych solenoidach o różnych promieniach. Chciałbyś ustawić kilka z nich współśrodkowo w taki sposób, aby wypadkowy wektor indukcji magnetycznej wzdłuż osi był równy zeru. Czy można to uzyskać za pomocą a) dwóch, b) trzech, c) czterech, d) pięciu solenoidów? Jeżeli tak, to wymień solenoidy, których trzeba użyć i wskaż kierunki prądów.

Solenoid:	1	2	3	4	5	6
n :	5	4	3	2	10	8
I :	5	3	7	6	2	3

Zadania

www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
 itw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

30.1. Obliczanie indukcji magnetycznej pola wywołanego przepływem prądu

1. Geodeta używa kompasu w miejscu znajdującym się 6,1 m poniżej linii energetycznej, w której płynie prąd stały o natężeniu

100 A. a) Jakie pole magnetyczne wytwarza linia energetyczna w miejscu, w którym znajduje się kompas? b) Czy to pole będzie w sposób istotny zakłócało wskazania kompasu? Pozioma składowa indukcji magnetycznej ziemskiego pola w tym miejscu jest równa 20 μT .

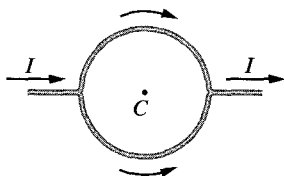
2. Działko elektronowe w tradycyjnej lampie kineskopowej wysłała w kierunku ekranu elektrony o energii kinetycznej 25 keV, tworzące wiązkę o przekroju kołowym i średnicy 0,22 mm. W każdej sekundzie do ekranu dociera $5,6 \cdot 10^{14}$ elektronów. Oblicz indukcję magnetyczną pola, wytworzonego przez wiązkę w punkcie oddalonym o 1,5 mm od jej osi.

3. W pewnym miejscu na Filipinach ziemskie pole magnetyczne o indukcji $39 \mu\text{T}$ jest poziome i skierowane na północ. Przypuśćmy, że wypadkowa indukcja pola jest równa zero dokładnie 8 cm nad długim, prostoliniowym, poziomym przewodem, w którym płynie prąd stały. Wyznacz: a) natężenie, b) kierunek prądu.

4. Długi przewód, w którym płynie prąd o natężeniu 100 A , jest umieszczony w zewnętrznym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 5 mT . Przewód jest ułożony prostopadłe do kierunku linii tego pola. Wyznacz położenie punktów, w których wypadkowa indukcja magnetyczna jest równa zero.

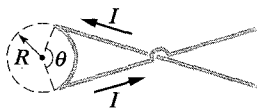
5. Dodatkowo naładowana cząstka o ładunku q znajduje się w odległości d od długiego prostoliniowego przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu I . Cząstka porusza się prostopadłe do przewodu z prędkością v . Jaki jest kierunek i wartość siły działającej na cząstkę, jeżeli: a) porusza się ona w kierunku przewodu, b) oddala się od przewodu?

6. Prosty przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I , rozgałęzia się na dwa takie same półokręgi, jak pokazano na rysunku 30.31. Ile wynosi indukcja magnetyczna w środku C utworzonej w ten sposób pętli?



Rys. 30.31. Zadanie 6

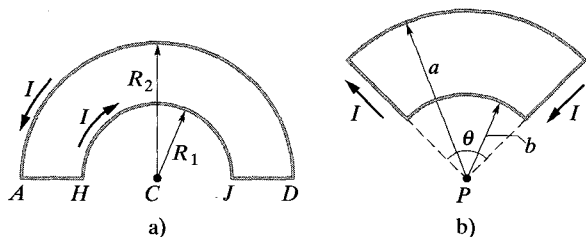
7. Przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I , jest ułożony, jak na rysunku 30.32. Dwie półproste, styczne do tego samego okręgu, są połączone łukiem o kącie środkowym θ . Wszystkie elementy obwodu leżą w jednej płaszczyźnie. Jaka musi być wartość kąta θ , aby indukcja B w środku okręgu była równa zero?



Rys. 30.32. Zadanie 7

8. Zastosuj prawo Biota-Savarta do obliczenia indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w punkcie C , będącym wspólnym środkiem półkolistych łuków AD i HJ , pokazanych na rysunku 30.33a. Te dwa łuki, o promieniach równych odpowiednio R_2 i R_1 , tworzą część obwodu $AHJDA$, w którym płynie prąd o natężeniu I .

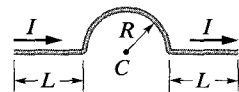
9. Na rysunku 30.33b zakrzywione elementy obwodu są łukami okręgów o promieniach a i b , o wspólnym środku w punkcie P .



Rys. 30.33. Zadania 8 i 9

Proste elementy są ułożone wzdłuż promieni tych okręgów. Oblicz wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ pola w punkcie P , przyjmując, że w obwodzie płynie prąd o natężeniu I .

10. W przewodzie, pokazanym na rysunku 30.34, płynie prąd o natężeniu I . Oblicz indukcję magnetyczną $\vec{B}$ pola w środku C półokręgu, wytworzonego przez: a) każdy odcinek prosty o długości L , b) półokrąg o promieniu R , c) cały przewód.

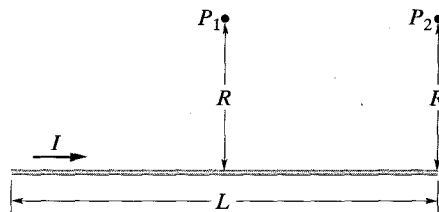


Rys. 30.34. Zadanie 10

11. W prostym przewodzie o długości L , pokazanym na rysunku 30.35, płynie prąd o natężeniu I . Wykaż, że wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ pola, wytworzonego przez ten przewód w punkcie P_1 , położonym na symetralnej odcinka w odległości R , wynosi:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{L}{(L^2 + 4R^2)^{1/2}}.$$

Wykaż, że to wyrażenie dla B redukuje się do wyniku oczekiwanego dla $L \rightarrow \infty$.



Rys. 30.35. Zadania 11 i 13

12. W przewodzie w kształcie kwadratowej ramki o boku a płynie prąd o natężeniu I . Korzystając z zadania 11, wykaż, że wartość indukcji magnetycznej pola, wytworzonego w środku ramki jest równa:

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

13. W prostym przewodzie na rysunku 30.35 płynie prąd o natężeniu I . Wykaż, że:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{L}{(L^2 + R^2)^{1/2}},$$

jest wartością indukcji magnetycznej $\vec{B}$ pola, wytworzonego przez ten przewód w zaznaczonym na rysunku punkcie P_2 .

14. Korzystając z zadania 11, wykaż, że wartość indukcji magnetycznej pola, wytworzonego w środku prostokątnej ramki o długości L i szerokości W , w której płynie prąd o natężeniu I , wynosi:

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{(L^2 + W^2)^{1/2}}{LW}.$$

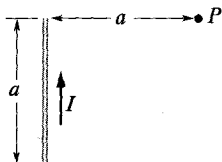
15. W przewodzie w kształcie kwadratowej ramki o boku a płynie prąd o natężeniu I . Korzystając z zadania 11 wykaż, że wartość in-

dukcji magnetycznej w punkcie położonym na osi symetrii ramki prostopadłej do jej płaszczyzny, w odległości x od tej płaszczyzny, wynosi:

$$B(x) = \frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2}}.$$

Wykaż, że wynik ten jest zgodny z wynikiem zadania 12.

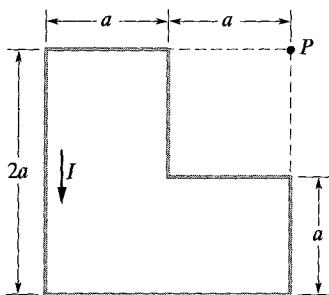
16. W prostym odcinku przewodu długości a , pokazanym na rysunku 30.36, płynie prąd o natężeniu I . Wykaż, że wartość indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez prąd w punkcie P jest równa $B = \sqrt{2}\mu_0 I / 8\pi a$.



Rys. 30.36. Zadanie 16

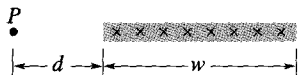
17. Z dwóch przewodów takiej samej długości L utworzono okrąg i kwadrat. W każdym przewodzie płynie prąd o takim samym natężeniu I . Wykaż, że indukcja magnetyczna w środku kwadratu jest większa od indukcji magnetycznej w środku okręgu. (Patrz zadanie 12).

18. Wyznacz indukcję magnetyczną $\vec{B}$ w punkcie P na rysunku 30.37. (Patrz zadanie 16).



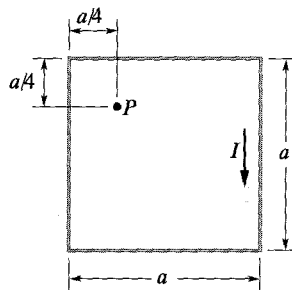
Rys. 30.37. Zadanie 18

19. Na rysunku 30.38 przedstawiono przekrój długiej cienkiej taśmy szerokości w , w której płynie równomiernie rozłożony prąd o całkowitym natężeniu I , skierowany za płaszczyznę rysunku. Oblicz wartość i kierunek indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w punkcie P , położonym w płaszczyźnie taśmy, w odległości d od jej brzegu. (Wskazówka: Wyobraź sobie, że taśma składa się z wielu długich cienkich drutów, ułożonych równolegle).



Rys. 30.38. Zadanie 19

20. Oblicz indukcję magnetyczną $\vec{B}$ w punkcie P na rysunku 30.39 dla $I = 10$ A i $a = 8$ cm. (Patrz zadania 13 i 16)



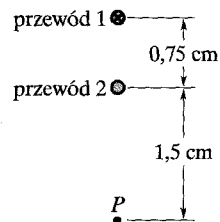
Rys. 30.39. Zadanie 20

30.2. Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem

21. Dwa długie równoległe przewody znajdują się w odległości 8 cm od siebie i płyną w nich prądy o takich samych natężeniach. Jakie muszą być wartości tych natężeń, aby indukcja magnetyczna pola w połowie odległości między przewodami miała wartość 300 μ T? Podaj odpowiedź dla prądów płynących: a) w tym samym kierunku, b) w przeciwnych kierunkach.

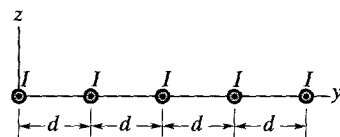
22. W dwóch długich równoległych przewodach, znajdujących się w odległości d od siebie, płyną w tym samym kierunku prądy o natężeniach I i $3I$. Znajdź punkt lub punkty, w których wytwarzane przez nie pola magnetyczne się znoszą.

23. Dwa długie, prostoliniowe, równoległe przewody, znajdujące się w odległości 0,75 cm od siebie, są prostopadłe do płaszczyzny rysunku 30.40. W przewodzie 1 płynie prąd o natężeniu 6,5 A, skierowany za płaszczyznę rysunku. Wyznacz natężenie i kierunek prądu w przewodzie 2, tak aby wypadkowa indukcja magnetyczna pola w punkcie P była równa zero.



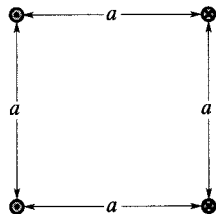
Rys. 30.40. Zadanie 23

24. Na rysunku 30.41 przedstawiono pięć długich równoległych przewodów, leżących w płaszczyźnie xy . W każdym przewodzie płynie prąd o natężeniu $I = 3$ A w dodatnim kierunku osi x . Odległość między sąsiednimi przewodami jest równa $d = 8$ cm. Używając wektorów jednostkowych, wyznacz siłę magnetyczną na jednostkę długości, wywieraną na każdy z tych pięciu przewodów przez pozostałe.



Rys. 30.41. Zadanie 24

25. Cztery długie przewody miedziane są ułożone równolegle do siebie, w ten sposób, że w przekroju poprzecznym wyznaczają wierzchołki kwadratu o boku $a = 20$ cm. W każdym przewodzie płynie prąd o natężeniu 20 A, w kierunku pokazanym na rysunku 30.42. Jaka jest wartość i kierunek wektora $\vec{B}$ w środku kwadratu?



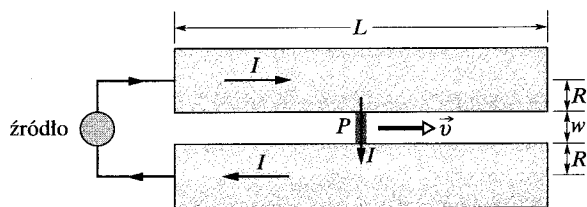
Rys. 30.42. Zadania 25, 26 i 27

26. Cztery płynące równoległe prądy o natężeniu I przecinają płaszczyznę w wierzchołkach kwadratu o boku a , jak na rysunku 30.42, przy czym *wszystkie* są skierowane przed płaszczyznę rysunku. Wyznacz wartość i kierunek siły na jednostkę długości, działającej na każdy przewód.

27. Wyznacz wartość i kierunek siły na jednostkę długości, działającej na lewy dolny przewód na rysunku 30.42, jeżeli prądy płyną w kierunkach wskazanych na tym rysunku. Natężenia prądów są równe I .

28. Na rysunku 30.43 przedstawiono schemat działa szynowego. Pocisk P znajduje się między dwiema szerokimi szynami o kołowym przekroju poprzecznym. Prąd ze źródła płynie przez szyny i przewodzący pocisk (bezpiecznik nie jest używany). a) Niech w oznacza odległość między szynami, R — promień szyny, a I — natężenie prądu. Wykaż, że siła działająca na pocisk jest skierowana wzdłuż szyn w prawo i jest dana przybliżonym wzorem:

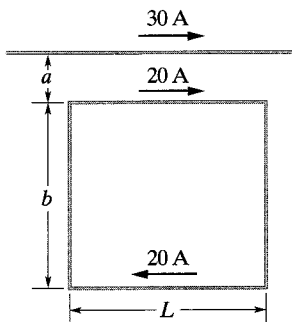
$$F = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi} \ln \frac{w + R}{R}.$$



Rys. 30.43. Zadanie 28

b) Załóż, że początkowo pocisk spoczywa w lewym końcu szyn, i wyznacz prędkość v , z jaką jest wyrzucany po prawej stronie. Przyjmij, że $I = 450$ kA, $w = 12$ mm, $R = 6,7$ cm, $L = 4$ m, a masa pocisku jest równa $m = 10$ g.

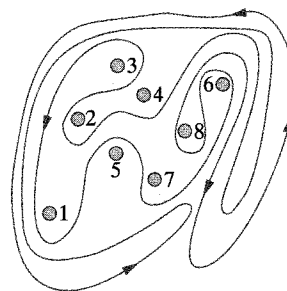
29. W długim prostym przewodzie na rysunku 30.44 płynie prąd o natężeniu 30 A, a w prostokątnej ramce prąd o natężeniu 20 A. Oblicz wypadkową siłę, działającą na ramkę. Przyjmij $a = 1$ cm, $b = 8$ cm i $L = 30$ cm.



Rys. 30.44. Zadanie 29

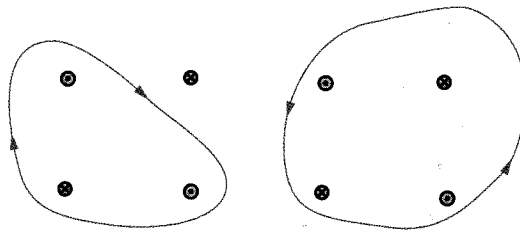
30.3. Prawo Ampère'a

30. Ośiem przewodów przecina prostopadle płaszczyznę rysunku w punktach, pokazanych na rysunku 30.45. W przewodzie oznaczonym liczbą całkowitą k ($k = 1, 2, \dots, 8$) płynie prąd o natężeniu kI . W przewodach, oznaczonych nieparzystą liczbą k prąd płynie przed płaszczyznę rysunku, natomiast w przewodach, oznaczonych parzystą liczbą k prąd płynie za płaszczyznę rysunku. Oblicz wartość całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ wzdłuż zamkniętego konturu, w kierunku wskazanym na rysunku.



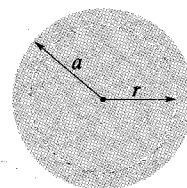
Rys. 30.45. Zadanie 30

31. W każdym z ośmiu przewodów na rysunku 30.46 płynie prąd o natężeniu 2 A, skierowany za lub przed płaszczyznę rysunku. Zaznaczono dwa kontury całkowania dla całki krzywoliniowej $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$. Jaka jest wartość całki dla konturu: a) po lewej stronie, b) po prawej stronie?



Rys. 30.46. Zadanie 31

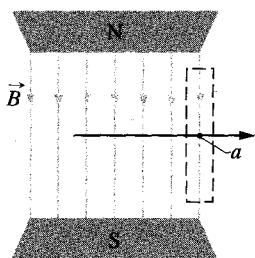
32. Na rysunku 30.47 przedstawiono przekrój poprzeczny długiego cylindrycznego przewodnika o promieniu a , w którym płynie równomiernie rozłożony prąd o natężeniu I . Przyjmij $a = 2$ cm, $I = 100$ A i sporządź wykres $B(r)$ w zakresie $0 < r < 6$ cm.



Rys. 30.47. Zadanie 32

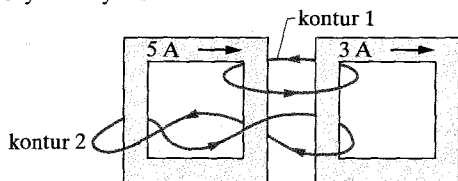
33. Wykaż, że wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ pola jednorodnego nie może nagle spaść do zera (jak mógłby na to wskazywać brak linii na prawo od punktu a na rysunku 30.48), gdy poruszamy się prostopadle do wektora $\vec{B}$, np. wzdłuż poziomej strzałki na rysunku. (Wskazówka: Zastosuj prawo Ampère'a do pro-

stokątnego konturu, zaznaczonego linią przerywaną). W rzeczywistych magnesach zawsze występuje pole rozproszone, co oznacza, że indukcja $\vec{B}$ zmierza do zera stopniowo. Zmodyfikuj przebieg linii pola magnetycznego, tak aby rysunek przedstawiał bardziej realną sytuację.



Rys. 30.48. Zadanie 33

34. W dwóch kwadratowych przewodzących ramkach płyną prądy o natężeniach 5 A i 3 A, jak pokazano na rysunku 30.49. Jaka jest wartość całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ dla każdego z dwóch zamkniętych konturów zaznaczonych na rysunku?



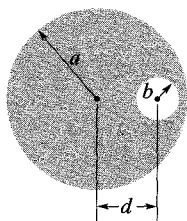
Rys. 30.49. Zadanie 34

35. Gęstość prądu wewnątrz długiego, pełnego, walcowego przewodu o promieniu a jest skierowana wzdłuż osi i zmienia się liniowo wraz z odległością r od osi, zgodnie z zależnością $J = J_0 r/a$. Wyznacz wartość indukcji magnetycznej pola wewnątrz przewodu.

36. W długim prostym przewodzie o promieniu 3 mm płynie prąd stały, rozłożony równomiernie w przekroju prostopadłym do osi przewodu. Jeżeli gęstość prądu wynosi 100 A/m^2 , to jaka jest wartość indukcji magnetycznej pola w odległości: a) 2 mm od osi, b) 4 mm od osi?

37. Na rysunku 30.50 przedstawiono przekrój długiego walcowego przewodnika o promieniu a , zawierającego długie walcowe wydrążenie o promieniu b . Osie przewodnika i wydrążenia są równoległe i znajdują się w odległości d od siebie. Prąd o natężeniu I jest równomiernie rozłożony na zacięniowanej powierzchni. a) Zastosuj zasadę superpozycji, aby wykazać, że wartość indukcji magnetycznej w środku wydrążenia jest równa:

$$B = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2 - b^2)}.$$

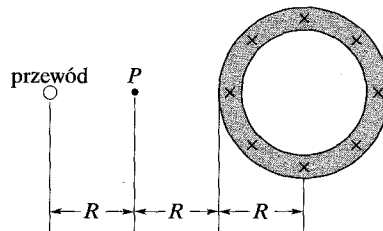


Rys. 30.50. Zadanie 37

b) Omów dwa przypadki szczególne $b = 0$ i $d = 0$. c) Zastosuj prawo Ampère'a, aby wykazać, że pole magnetyczne w wydrążeniu jest jednorodne. (Wskazówka: Potraktuj walcowe wydrążenie

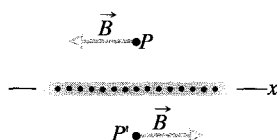
jako wynik nałożenia pełnego walca (bez wydrążenia), w którym płynie prąd w jednym kierunku, i walca o promieniu b , w którym płynie prąd w przeciwnym kierunku, przy czym gęstość prądu w obydwu walcach jest taka sama).

38. W długiej okrągłej rurze o zewnętrznym promieniu równym R płynie równomiernie rozłożony prąd o natężeniu I , skierowany za płaszczyznę rysunku 30.51. Przewód biegnie równoległe do rury w odległości $3R$, licząc od środka rury do środka przewodu. Wyznacz wartość i kierunek prądu płynącego w przewodzie, tak aby indukcja magnetyczna wypadkowego pola w punkcie P miała taką samą wartość, jak wypadkowego pola magnetycznego w środku rury, ale była przeciwnie skierowana.



Rys. 30.51. Zadanie 38

39. Na rysunku 30.52 przedstawiono przekrój przez nieskończoną przewodzącą płytę, w której płynie prąd o gęstości liniowej λ , mierzonej w kierunku osi x . Prąd płynie prostopadle przed płaszczyznę rysunku. a) Zastosuj prawo Biota-Savarta i symetrię, aby wykazać, że dla wszystkich punktów P , znajdujących się nad płytą i dla wszystkich punktów P' pod nią, wektory indukcji $\vec{B}$ są równoległe do płyty i skierowane, jak na rysunku. b) Zastosuj prawo Ampère'a, aby wykazać, że $B = \frac{1}{2}\mu_0\lambda$ we wszystkich punktach P i P' .



Rys. 30.52. Zadania 39 i 44

30.4. Solenoidy i toroidy

40. W solenoidzie o długości 95 cm i promieniu 2 cm, składającym się z 1200 zwojów, płynie prąd o natężeniu 3,6 A. Oblicz wartość indukcji magnetycznej wewnątrz solenoidu.

41. W solenoidzie o 200 zwojach, mającym długość 25 cm i średnicę 10 cm, płynie prąd o natężeniu 0,3 A. Oblicz wartość indukcji magnetycznej B wewnątrz solenoidu.

42. W solenoidzie o długości 1,3 m i średnicy 2,6 cm płynie prąd o natężeniu 18 A. Wartość indukcji magnetycznej wewnątrz solenoidu jest równa 23 mT. Oblicz długość drutu, z którego nawinięty jest solenoid.

43. „Toroid” o przekroju w kształcie kwadratu o boku 5 cm i promieniu wewnętrznym 15 cm ma 500 zwojów, przez które płynie prąd o natężeniu 0,8 A. („Toroid” powstał z „kwadratowego solenoidu” — a nie okrągłego, jak na rysunku 30.16 — zgiętego w kształcie obwarzanka). Ile wynosi indukcja magnetyczna pola wewnątrz „toroidu” w odległości od środka równej: a) promieniowi wewnętrznemu, b) promieniowi zewnętrznemu?

44. Potraktuj idealny solenoid jako cienki walcowy przewód, w którym prąd przypadający na jednostkę długości, mierzoną równoległe do osi walca, ma gęstość liniową λ . a) Stosując takie przybliżenie, wykaż, że wartość indukcji magnetycznej wewnątrz idealnego solenoidu może być zapisana jako $B = \mu_0 \lambda$. Wartość ta jest równa *zmianie* indukcji $\vec{B}$, jaką obserwujemy, przechodząc przez ściankę solenoidu od wnętrza na zewnątrz. b) Wykaż, że taka sama zmiana występuje, gdy przechodzimy przez nieskończoną płaską płytę przewodzącą prąd, jak na rysunku 30.52 (patrz zadanie 39). Czy dziwi cię taka zgodność?

45. W paragrafie 30.4 wykazaliśmy, że indukcja magnetyczna pola wewnątrz toroidu w dowolnej odległości r od jego środka jest równa:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}.$$

Wykaż, że w miarę poruszania się od dowolnego punktu, znajdującego się tuż przy ścianie wewnątrz toroidu, do punktu tuż przy ścianie na zewnątrz, napotkasz *zmianę* indukcji pola $\vec{B}$ równą dokładnie $\mu_0 \lambda$. Wielkość λ oznacza tutaj gęstość liniową prądu, mierzoną wzdłuż obwodu okręgu o promieniu r wewnątrz toroidu. Porównaj ten wynik z podobnym wynikiem, otrzymanym w zadaniu 44. Czy taka zgodność nie jest zaskakująca?

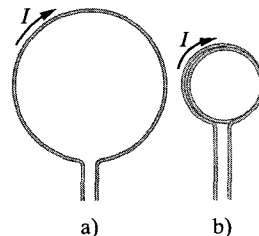
46. Długi solenoid ma 100 zwojów/cm i płynie w nim prąd o natężeniu I . Elektron porusza się wewnątrz solenoidu po okręgu o promieniu 2,3 cm w płaszczyźnie prostopadłej do osi solenoidu. Prędkość elektronu wynosi $0,046c$ (c — prędkość światła). Oblicz natężenie prądu I w solenoidzie.

47. W długim solenoidzie o 10 zwojach/cm i promieniu 7 cm płynie prąd o natężeniu 20 mA, natomiast w prostym przewodzie, ułożonym wzdłuż osi solenoidu płynie prąd o natężeniu 6 A. W jakiej odległości od osi linie wypadkowego pola magnetycznego tworzą kąt 45° z kierunkiem osi? b) Jaka jest tam wartość indukcji magnetycznej pola?

30.5. Cewka z prądem jako dipol magnetyczny

48. Na rysunku 30.53a przedstawiono odcinek przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu I . Przewód został wygięty w taki sposób, że tworzy okrągłą cewkę o jednym zwoju. Na rysunku 30.53b taki sam odcinek przewodu został zagięty ciasniej, tworząc

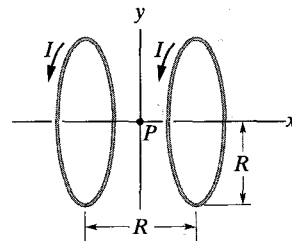
cewkę z dwóch zwojach i o promieniu dwa razy mniejszym. a) Jeżeli B_a i B_b są wartościami indukcji magnetycznej w środku każdej z cewek, to jaki jest stosunek B_b/B_a ? b) Jaki jest stosunek momentów dipolowych μ_b/μ_a obydwu cewek?



Rys. 30.53. Zadanie 48

49. Jaki jest dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$ solenoidu, opisanego w zadaniu 41?

50. Na rysunku 30.54 przedstawiono układ zwany cewkami Helmholtza. Układ ten składa się z dwóch cewek w kształcie okręgów o promieniu R , umieszczonych współosiowo w odległości R od siebie. Każda z cewek ma N zwojów i płyną w nich w tych samych kierunkach prądy o takim samym natężeniu I . Oblicz wartość wypadkowej indukcji magnetycznej w punkcie P , położonym w połowie odległości między cewkami.



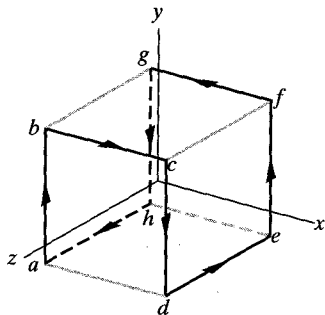
Rys. 30.54. Zadania 50, 53 i 55

51. Student zbudował krótki elektromagnes, nawijając 300 zwojów drutu na drewniany walec o średnicy $d = 5$ cm. Po dołączeniu źródła w uzwojeniu płynie prąd o natężeniu 4 A. a) Jaki jest moment magnetyczny tego urządzenia? b) W jakiej odległości $z \gg d$, mierzonej wzdłuż osi, indukcja magnetyczna pola tego dipola będzie miała wartość $5 \mu\text{T}$ (czyli w przybliżeniu jedną dziesiątą indukcji magnetycznej pola ziemskiego)?

52. Wartość $B(x)$ indukcji magnetycznej w punktach położonych na osi kwadratowej ramki o boku a jest podana w zadaniu 15. a) Wykaż, że to pole magnetyczne jest dla $x \gg a$ takie samo, jak pole dipola magnetycznego (patrz równanie (30.29)). b) Jaki jest dipolowy moment magnetyczny tej ramki?

53. W dwóch cewkach, z których każda ma 300 zwojów i promień R , płynie prąd o natężeniu I . Cewki są ustawione w odległości R od siebie, jak na rysunku 30.54. Dla $R = 5$ cm i $I = 50$ A narysuj wykres wartości wypadkowej indukcji magnetycznej B , w funkcji odległości x , mierzonej wzdłuż osi x , w zakresie od $x = -5$ cm do $x = 5$ cm, przyjmując $x = 0$ w punkcie P , leżącym w połowie odległości między cewkami. (Takie cewki wytwarzają w punkcie P pole magnetyczne o szczególnie dużej jednorodności). (Wskazówka: Patrz równanie (30.28)).

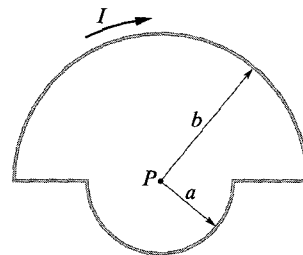
54. Prąd o natężeniu 6 A płynie w zamkniętym obwodzie $abcdefgha$ wzdłuż ośmiu spośród dwunastu krawędzi sześcianu o długości 10 cm, jak pokazano na rysunku 30.55. a) Dlaczego można traktować ten obwód jako superpozycję trzech kwadratowych ramek $bcf gb$, $abgha$ i $cdefc$? (Wskazówka: Narysuj prądy, płynące w tych kwadratowych ramkach). b) Skorzystaj z tego faktu, aby wyznaczyć wartość i kierunek dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ dla całego obwodu zamkniętego. c) Oblicz $\vec{B}$ w punktach o współrzędnych $(x, y, z) = (0, 5 \text{ m}, 0)$ i $(5 \text{ m}, 0, 0)$.



Rys. 30.55. Zadanie 54

55. Przyjmij, że w zadaniu 50 (rys. 30.54) odległość między cewkami jest zmienną s , niekoniecznie równą promieniowi cewki R . a) Wykaż, że pierwsza pochodna wartości indukcji wypadkowego pola magnetycznego cewek (dB/dx) jest równa zero w punkcie P , położonym w połowie odległości między cewkami, niezależnie od wartości s . Dlaczego można spodziewać się tego na podstawie symetrii układu? b) Wykaż, że druga pochodna (d^2B/dx^2) jest również równa zero w punkcie P , ale pod warunkiem, że $s = R$. To tłumaczy jednorodność pola B w otoczeniu punktu P dla tej szczególnej odległości między cewkami.

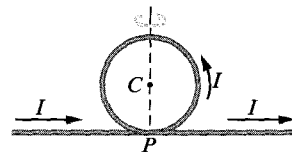
56. Z kawałka drutu wykonano zamknięty obwód pokazany na rysunku 30.56. W obwodzie płynie prąd o natężeniu I . a) Wyznacz wartość i kierunek indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w punkcie P . b) Wyznacz dipolowy moment magnetyczny obwodu.



Rys. 30.56. Zadanie 56

57. W pętli o kształcie okręgu o promieniu 12 cm płynie prąd o natężeniu 15 A. Płaska cewka o promieniu 0,82 cm i 50 zwojach, w której płynie prąd o natężeniu 1,3 A, jest umieszczona w środku pętli. a) Wyznacz wektor $\vec{B}$ pola wytwarzanego przez cewkę w jej środku. b) Jaki moment siły działa na cewkę? Przyjmij, że płaszczyzny pętli i cewki są wzajemnie prostopadłe i że pole magnetyczne, wytworzone przez pętlę jest w przybliżeniu jednorodne w obszarze zajęty przez cewkę.

58. a) Długi przewód wygięto w pętlę w sposób pokazany na rysunku 30.57, przy czym w punkcie P części przewodu się nie stykają. Promień okrągłej części jest równy R . Wyznacz wartość i kierunek indukcji $\vec{B}$ w środku C okrągłej części, gdy prąd o natężeniu I płynie we wskazanym kierunku. b) Wyobraź sobie, że okrągłą część obwodu obracamy bez zmiany kształtu wokół zaznaczonej średnicy, aż do momentu, w którym płaszczyzna okręgu będzie prostopadła do prostych odcinków obwodu. Dipolowy moment magnetyczny związany z okrągłą częścią obwodu będzie teraz zgodny z kierunkiem prądu w odcinkach prostych. Wyznacz w tym przypadku indukcję $\vec{B}$ w punkcie C .



Rys. 30.57. Zadanie 58