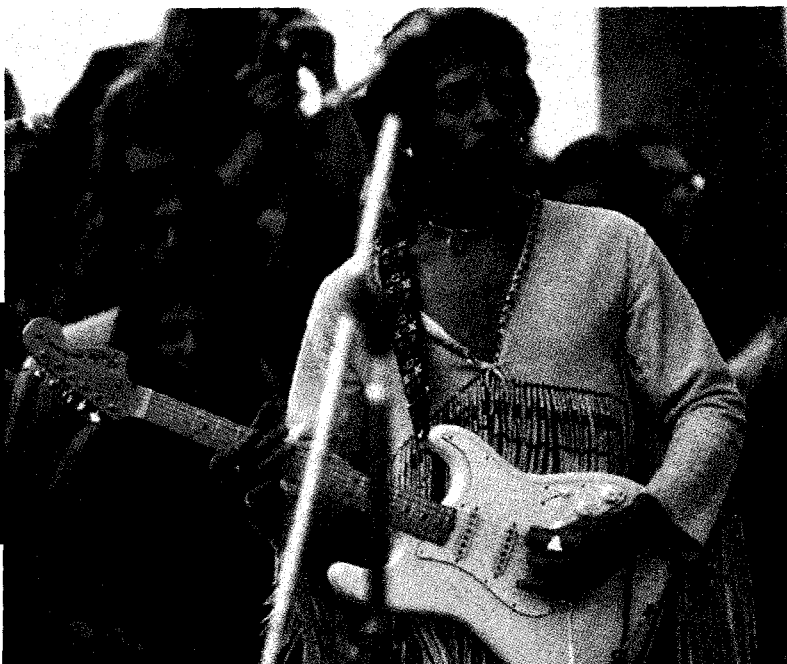


Zjawisko indukcji i indukcyjność

Wkrótce po pojawieniu się w połowie lat pięćdziesiątych muzyki rockowej, gitarzyści zastąpili gitary akustyczne gitarami elektrycznymi. Jednak dopiero Jimi Hendrix, który pojawił się na scenie w latach sześćdziesiątych, po raz pierwszy potraktował gitarę elektryczną jak instrument elektroniczny. Hendrix przeciągał kostką wzdłuż strun, ustawiał się ze swoją gitarą przed głośnikiem, aby podtrzymać sprzężenie zwrotne, a następnie dokładał do tego akordy. Hendrix wytyczył kierunek rozwoju muzyki rockowej, od prostych melodii śpiewanych przez Buddy'ego Holly'ego przez muzykę psychodeliczną późnych lat sześćdziesiątych, aż do wczesnego *heavy metalu* Led Zeppelin i nieokreślonej ekspresji Joy Division w latach siedemdziesiątych. Pomysły Hendrixa oddziałują na muzykę rockową do dnia dzisiejszego.

Co gitarę elektryczną odróżnia od gitary akustycznej i co umożliwiło Hendrixowi tak szerokie wykorzystanie tego instrumentu elektronicznego?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



31.1. Dwa symetryczne przypadki

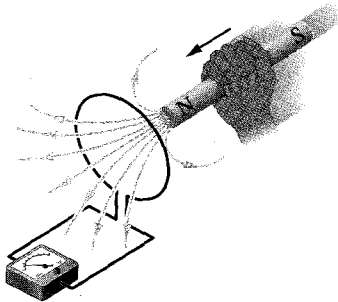
W paragrafie 29.8 powiedzieliśmy, że jeżeli umieścimy zamkniętą przewodzącą pętlę w polu magnetycznym i następnie przepuścimy przez nią prąd, to siły wynikające z działania pola magnetycznego wytworzą moment, który będzie usiłował obrócić pętlę:

$$\text{pętla z prądem} + \text{pole magnetyczne} \Rightarrow \text{moment siły.} \quad (31.1)$$

Przypuśćmy teraz, że obracamy pętlę ręcznie przy wyłączonym prądzie. Czy wystąpi zjawisko przeciwne do opisanego równaniem (31.1)? Innymi słowy, czy w takiej sytuacji pojawi się prąd w pętli:

$$\text{moment siły} + \text{pole magnetyczne} \Rightarrow \text{prąd?} \quad (31.2)$$

Odpowiedź jest twierdząca — w pętli rzeczywiście popłynie prąd. Przypadki opisane równaniami (31.1) i (31.2) są symetryczne. Prawo fizyczne, z którego wynika równanie (31.2), nazywamy *prawem indukcji Faradaya*. Podczas gdy równanie (31.1) jest podstawą działania silnika elektrycznego, równanie (31.2) i prawo Faradaya stanowią podstawę działania prądnicy. W tym rozdziale zajmiemy się prawem Faradaya i zjawiskiem, które jest przez nie opisane.



Rys. 31.1. Miernik wskazuje przepływ prądu w pętli z drutu, gdy magnes porusza się względem tej pętli

31.2. Dwa doświadczenia

Wykonajmy dwa proste doświadczenia, aby przygotować się do omówienia prawa indukcji Faradaya.

Pierwsze doświadczenie. Na rysunku 31.1 przedstawiono przewodzącą pętlę, połączoną z czułym miernikiem prądu. W układzie nie ma żadnego innego źródła siły elektromotorycznej (SEM), zatem prąd w obwodzie nie płynie. Jeśli jednak będziemy przesuwając magnes sztabkowy w kierunku pętli, nagle w obwodzie pojawi się prąd. Prąd znika, gdy magnes przestaje się poruszać. Jeżeli teraz zaczniemy odsuwać magnes od pętli, prąd znów popłynie, ale tym razem w przeciwnym kierunku. Wykonując takie doświadczenia przez pewien czas, odkrylibyśmy, że:

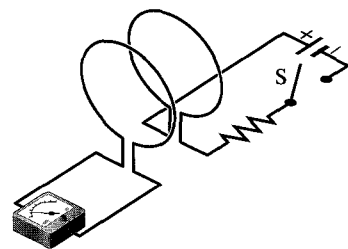
1. Prąd pojawia tylko wtedy, gdy występuje względny ruch pętli i magnesu (tzn. jeden z tych elementów porusza się względem drugiego). Prąd znika, gdy pętla i magnes przestają się poruszać względem siebie.
2. Szybszy ruch wytwarza prąd o większym natężeniu.
3. Jeśli przybliżanie północnego bieguna magnesu do pętli wytwarza prąd płynący np. w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to oddalanie tego bieguna powoduje przepływ prądu w kierunku przeciwnym. Przybliżanie lub oddalanie bieguna południowego do pętli również wywołuje przepływ prądu, ale w kierunkach przeciwnych niż przy ruchu bieguna północnego.

Prąd wytwarzany w pętli nazywamy **prądem indukowanym**, pracę przypadającą na jednostkę ładunku, wykonaną w celu wytworzenia prądu (czyli ruchu elektronów przewodnictwa, które tworzą ten prąd) nazywamy **indukowaną siłą**

elektromotoryczną (SEM), a zjawisko wytwarzania prądu i SEM nazywamy **zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej**.

Drugie doświadczenie. To doświadczenie wykonamy za pomocą układu, przedstawionego na rysunku 31.2 i złożonego z dwóch przewodzących pętli, które znajdują się blisko siebie, ale się nie stykają. Jeżeli zamkniemy klucz S, włączając prąd w pętli po prawej stronie, to miernik wskaże nagły, ale krótkotrwały przepływ prądu — prądu indukowanego — w pętli po lewej stronie. Jeśli teraz otworzymy klucz, to w pętli po lewej stronie pojawi się znów nagły i krótkotrwały prąd indukowany, tym razem jednak płynący w przeciwnym kierunku. Otrzymujemy prąd indukowany (a więc i SEM indukowaną) tylko wtedy, gdy natężenie prądu w pętli po prawej stronie się zmienia (podczas włączania lub wyłączania), a nie wtedy, gdy natężenie jest stałe (nawet gdy jest duże).

Indukowana SEM i indukowany prąd w tych doświadczeniach powstają najwyraźniej wtedy, gdy coś się zmienia — ale co jest tym „czymś”? Faraday znalazł odpowiedź na to pytanie.



Rys. 31.2. Miernik wskazuje przepływ prądu w pętli po lewej stronie w momencie, gdy klucz S jest zamykany (aby włączyć prąd w pętli po prawej stronie) lub otwierany (aby wyłączyć prąd w pętli po prawej stronie). Obie cewki są nieruchome

31.3. Prawo indukcji Faradaya

Faraday uświadomił sobie, że SEM i prąd mogą być indukowane w pętli, jak w naszych dwóch doświadczeniach, gdy zmienia się „ilość” pola magnetycznego przechodzącego przez pętlę. Faraday doszedł następnie do wniosku, że „ilość” pola magnetycznego może być zilustrowana za pomocą linii pola magnetycznego, przechodzących przez pętlę. **Prawo indukcji Faradaya**, sformułowane na podstawie naszych doświadczeń, brzmi następująco:

► SEM jest indukowana w pętli po lewej stronie rysunków 31.1 i 31.2, gdy zmienia się liczba linii pola magnetycznego, przechodzących przez pętlę.

Rzeczywista liczba linii pola, przechodzących przez pętlę nie ma znaczenia. Wartości indukowanej SEM i natężenia indukowanego prądu zależą od *szybkości*, z jaką ta liczba się zmienia.

W naszym pierwszym doświadczeniu (rys. 31.1) linie pola magnetycznego rozchodzą się z bieguna północnego magnesu. Tak więc w miarę przybliżania bieguna północnego do pętli, liczba linii pola przechodzących przez pętlę rośnie. Ten wzrost najwidoczniej wywołuje ruch elektronów przewodnictwa w pętli (indukowany prąd) i dostarcza energii dla tego ruchu (indukowana SEM). Gdy magnes przestaje się poruszać, liczba linii pola przechodzących przez pętlę przestaje się zmieniać, a indukowany prąd i indukowana SEM znikają.

W naszym drugim doświadczeniu (rys. 31.2), gdy klucz jest otwarty, prąd nie płynie i nie ma pola magnetycznego. Jednakże, gdy włączymy prąd w prawej pętli, wzrastające natężenie prądu wytwarza pole magnetyczne wokół tej pętli, a także pętli po lewej stronie. Gdy indukcja magnetyczna rośnie, liczba linii pola magnetycznego, przechodzących przez pętlę po lewej stronie również rośnie. Podobnie, jak w pierwszym doświadczeniu, ten wzrost najwidoczniej indukuje tam prąd i SEM. Gdy natężenie prądu w pętli po prawej stronie osiągnie końcową stałą

wartość, liczba linii pola przechodzących przez pętlę po lewej stronie przestaje się zmieniać, a indukowany prąd i indukowana SEM znikają.

Prawo Faradaya nie wyjaśnia, *dlaczego* prąd i SEM są indukowane w każdym z doświadczeń, jest to po prostu stwierdzenie, które pomaga nam zilustrować zjawisko indukcji.

Opis ilościowy

Aby zrobić użytek z prawa Faradaya, musimy wiedzieć, jak obliczyć „ilość pola magnetycznego” przechodzącego przez pętlę. W rozdziale 24, w podobnym przypadku obliczyliśmy „ilość pola elektrycznego” przechodzącego przez pewną powierzchnię. W tym celu zdefiniowaliśmy strumień elektryczny $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Teraz zdefiniujemy *strumień magnetyczny*: Wyobraź sobie, że pętla obejmująca powierzchnię S jest umieszczona w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$. Strumień magnetyczny jest wtedy równy:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{strumień magnetyczny przez powierzchnię } S). \quad (31.3)$$

Podobnie jak w rozdziale 24, $d\vec{S}$ jest wektorem o wartości dS i kierunku prostopadłym do elementu powierzchni dS .

Zastosujmy równanie (31.3) do przypadku szczególnego, w którym pętla leży w pewnej płaszczyźnie, a linie pola magnetycznego są prostopadłe do tej płaszczyzny. Możemy wtedy zapisać iloczyn skalarny w równaniu (31.3) jako $BdS \cos 0^\circ = BdS$. Jeżeli ponadto pole magnetyczne jest jednorodne, to B może być wyniesione przed znak całki, a wyrażenie $\int dS$, które pozostało, jest po prostu polem powierzchni S pętli. Zatem równanie (31.3) sprowadza się do:

$$\Phi_B = BS \quad (\vec{B} \perp S, \vec{B} \text{ jednorodne}). \quad (31.4)$$

Z równań (31.3) i (31.4) wynika, że jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest tesla razy metr kwadratowy. Taka jednostka nosi nazwę *webera* (w skrócie Wb):

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2. \quad (31.5)$$

Stosując pojęcie strumienia magnetycznego, możemy sformułować prawo Faradaya w bardziej ilościowy i użyteczny sposób:

➤ Wartość SEM $\mathcal{E}$ indukowanej w przewodzącej pętli jest równa szybkości, z jaką strumień magnetyczny, przechodzący przez tę pętlę zmienia się w czasie.

Jak zobaczymy w następnym paragrafie, indukowana SEM $\mathcal{E}$ usiłuje przeciwdziałać zmianie strumienia, tak więc prawo Faradaya możemy zapisać jako:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{prawo Faradaya}), \quad (31.6)$$

gdzie znak minus oznacza przeciwdziałanie. Często jednak pomijamy znak minus w równaniu (31.6), gdy poszukujemy tylko wartości bezwzględnej indukowanej SEM.

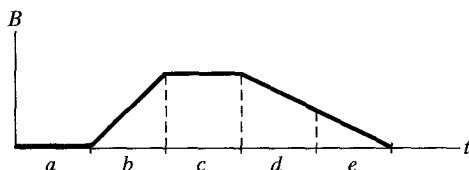
Jeżeli zmieniamy strumień pola magnetycznego w cewce złożonej z N zwojów, to indukowana SEM pojawia się w każdym zwoju i całkowita SEM, indukowana w cewce jest sumą tych cząstkowych indukowanych SEM. Jeżeli cewka jest ciasno nawinięta, tak że ten sam strumień pola magnetycznego Φ_B przenika przez wszystkie zwoje, to całkowita SEM indukowana w cewce jest równa:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{cewka o } N \text{ zwojach}). \quad (31.7)$$

Strumień magnetyczny przechodzący przez cewkę możemy zmienić w następujący sposób:

1. Przez zmianę wartości indukcji magnetycznej B pola w cewce.
2. Przez zmianę powierzchni cewki lub tej części powierzchni, która znajduje się w polu magnetycznym (np. powiększanie rozmiarów cewki lub przesuwanie jej względem obszaru, gdzie istnieje pole).
3. Przez zmianę kąta między kierunkiem wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$ a powierzchnią cewki (np. obracanie cewki, tak aby wektor indukcji $\vec{B}$ był najpierw prostopadły do płaszczyzny cewki, a następnie znalazł się w tej płaszczyźnie).

SPRAWDZIAN 1: Na wykresie przedstawiono wartości $B(t)$ dla jednorodnego pola magnetycznego, przechodzącego przez przewodzącą pętlę i prostopadłego do płaszczyzny pętli. U szereguj pięć przedziałów czasu na wykresie pod względem wartości SEM indukowanej w pętli, zaczynając od największej wartości.



Przykład 31.1

Długi solenoid S , pokazany w przekroju na rysunku 31.3, ma 220 zwojów/cm i płynie w nim prąd o natężeniu $I = 1,5$ A. Średnica solenoidu D jest równa 3,2 cm. W jego środku umieszczamy cewkę C o średnicy $d = 2,1$ cm, składającą się ze 130 ciasno ułożonych zwojów. Natężenie prądu w solenoidzie zmniejszamy do zera ze stałą szybkością, w ciągu 25 ms. Jaka jest wartość SEM, indukowanej w cewce C , podczas zmiany natężenia prądu w solenoidzie?

ROZWIĄZANIE:

Bierzemy pod uwagę następujące fakty:

- ➡ 1. Cewka C , umieszczona we wnętrzu solenoidu, znajduje się w polu magnetycznym, wytworzonym przez prąd płynący

w solenoidzie. Istnieje więc strumień magnetyczny Φ_B , przechodzący przez cewkę.

- ➡ 2. Natężenie prądu I maleje, zatem strumień Φ_B również maleje.

- ➡ 3. W miarę zmniejszania się Φ_B , w cewce C indukuje się SEM $\mathcal{E}$ zgodnie z prawem Faradaya.

Cewka składa się z więcej niż jednego zwoju, stosujemy więc prawo Faradaya w postaci równania (31.7) ($\mathcal{E} = -Nd\Phi_B/dt$), gdzie liczba zwojów N jest równa 130, a $d\Phi_B/dt$ jest szybkością zmian strumienia w każdym zwoju.

Natężenie prądu w solenoidzie zmienia się ze stałą szybkością, a więc strumień Φ_B również zmienia się ze stałą szybkością i dlatego możemy zapisać $d\Phi_B/dt$ jako $\Delta\Phi_B/\Delta t$. Tak więc, aby obliczyć $\Delta\Phi_B$, wystarczy znać końcową i początkową wartość strumienia. Końcowy strumień $\Phi_{B,\text{końc}}$ jest równy zero, gdyż

końcowe natężenie prądu w solenoidzie jest równe zeru. Aby wyznaczyć początkowy strumień $\Phi_{B,pocz}$, musimy wziąć pod uwagę dwa dodatkowe fakty:

🔑 4. Strumień, przenikający przez każdy zwoj cewki C, zależy od pola powierzchni S i ustawienia tego zwoju w polu magnetycznym $\vec{B}$ solenoidu. Pole $\vec{B}$ jest jednorodne, a jego linie są skierowane prostopadle do powierzchni S , zatem strumień można obliczyć ze wzoru (31.4) ($\Phi_B = BS$).

🔑 5. Wartość indukcji magnetycznej B we wnętrzu solenoidu zależy od natężenia prądu I płynącego w solenoidzie oraz od liczby zwojów n na jednostkę długości, zgodnie z równaniem (30.25) ($B = \mu_0 I n$).

Dla przypadku pokazanego na rysunku 31.3, S jest równe $\frac{1}{4}\pi d^2$ ($= 3,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$), a n wynosi 220 zwojów/cm, czyli 22 000 zwojów/m. Podstawiając równanie (30.25) do równania (30.4), otrzymujemy:

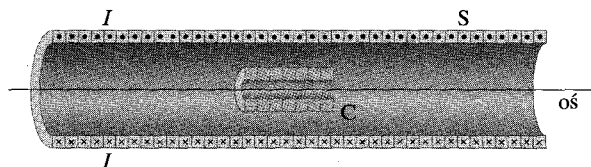
$$\begin{aligned}\Phi_{B,pocz} &= BS = (\mu_0 I n) S \\ &= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(1,5 \text{ A})(22\,000 \text{ zwojów/m}) \\ &\quad \cdot (3,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}.\end{aligned}$$

Możemy teraz napisać:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{\Phi_{B,końc} - \Phi_{B,pocz}}{\Delta t} \\ &= \frac{(0 - 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ Wb})}{25 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = -5,76 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/s} \\ &= -5,76 \cdot 10^{-4} \text{ V}.\end{aligned}$$

Interesuje nas tylko wartość bezwzględna, więc pomijamy znak minus w tym równaniu i w równaniu (31.7), pisząc:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= N \frac{d\Phi_B}{dt} = (130 \text{ zwojów})(5,76 \cdot 10^{-4} \text{ V}) = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ V} \\ &= 75 \text{ mV}.\end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 31.3. Przykład 31.1. Cewka C umieszczona jest we wnętrzu solenoidu S, w którym płynie prąd o natężeniu I

31.4. Reguła Lenza

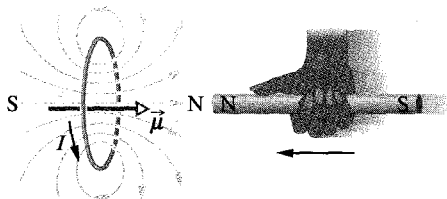
Wkrótce po odkryciu przez Faradaya prawa indukcji, Heinrich Friedrich Lenz sformułował regułę — zwaną obecnie **regułą Lenza** — umożliwiającą wyznaczenie kierunku prądu indukowanego w obwodzie:

➤ Prąd indukowany płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje.

Ponadto kierunek indukowanej SEM jest taki jak kierunek prądu indukowanego. Aby zorientować się, co wynika z reguły Lenza, przeanalizujemy dwiema różnymi, ale równoważnymi metodami przypadek przedstawiony na rysunku 31.4, gdzie biegun północny magnesu jest przesuwany w kierunku przewodzącej pętli.

1. **Przeciwdziałanie ruchowi magnesu.** Przybliżanie północnego bieguna magnesu na rysunku 31.4 zwiększa strumień pola magnetycznego w pętli i w ten sposób indukuje w niej prąd. Wiemy na podstawie rysunku 30.21, że taka pętla zachowuje się jak dipol magnetyczny, który ma swój biegun północny i południowy, a magnetyczny moment dipolowy $\vec{\mu}$ jest skierowany od

Rys. 31.4. Reguła Lenza. Magnes przesuwany w kierunku pętli indukuje w niej prąd. Prąd ten wytwarza swoje własne pole magnetyczne, a dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$ jest zorientowany tak, aby przeciwdziałać ruchowi magnesu. Tak więc prąd indukowany musi płynąć w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jak pokazano na rysunku



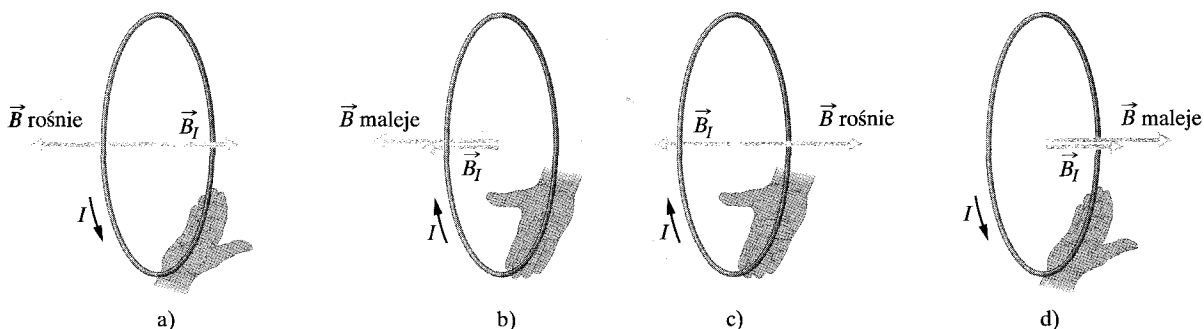
bieguna południowego do północnego. Aby *przeciwdziałać* wzrostowi strumienia pola magnetycznego, spowodowanego przybliżaniem magnesu, po stronie przybliżającego się bieguna północnego magnesu musi powstać biegun północny pętli, tak aby go odpychać (rys. 31.4). Zgodnie z regułą prawej dłoni dla $\vec{\mu}$ (rys. 30.21), prąd indukowany w pętli na rysunku 31.4 musi więc płynąć przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Jeżeli natomiast zaczniemy odsuwać magnes od pętli, będzie w niej nadal płynął prąd indukowany. Teraz jednak po stronie oddalającego się bieguna północnego magnesu powstanie biegun południowy pętli, tak aby przeciwdziałać ruchowi magnesu. Prąd indukowany będzie więc płynąć zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

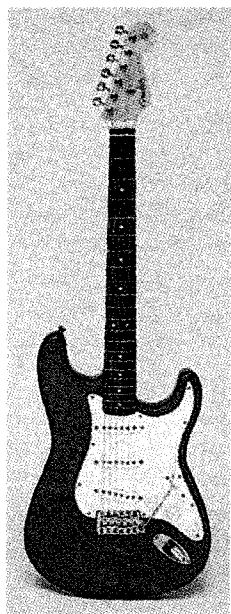
2. **Przeciwdziałanie zmianie strumienia.** Gdy magnes na rysunku 31.4 znajduje się początkowo w dużej odległości od pętli, strumień magnetyczny przechodzący przez pętlę jest znikomo mały. Gdy magnes zbliża się do pętli, strumień przenikający przez pętlę rośnie (na rysunku 31.4 zbliżamy do pętli biegun północny magnesu, a zatem linie jego pola magnetycznego są skierowane w lewo). Aby przeciwdziałać temu wzrostowi strumienia, prąd o natężeniu I musi wytworzyć swoje własne pole $\vec{B}_I$, skierowane wewnątrz pętli w prawo, jak pokazano na rysunku 31.5a. Tak więc skierowany w prawo strumień pola $\vec{B}_I$ przeciwdziała zwiększaniu się strumienia pola $\vec{B}$, skierowanego w lewo. Zgodnie z regułą prawej dłoni (rys. 30.21) prąd I na rysunku 31.5a musi więc płynąć przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zwróćmy uwagę, że strumień pola $\vec{B}_I$ zawsze przeciwdziała *zmianie* strumienia pola $\vec{B}$, ale nie zawsze znaczy to, że $\vec{B}_I$ jest skierowane przeciwnie do $\vec{B}$. Jeśli na przykład będziemy odsuwać magnes od pętli, strumień Φ_B wytworzony przez magnes będzie nadal skierowany w lewo, ale jego wartość będzie teraz malała. Strumień $\vec{B}_I$ musi więc być skierowany wewnątrz pętli w lewo, aby przeciwdziałać zmniejszaniu się strumienia Φ_B , jak pokazano na rysunku 31.5b. Zatem $\vec{B}_I$ i $\vec{B}$ będą teraz skierowane zgodnie.

Na rysunkach 31.5c i d przedstawiono przypadki, w których południowy biegun magnesu odpowiednio przybliża się i oddala od pętli.



Rys. 31.5. Prąd o natężeniu I , indukowany w pętli, ma taki kierunek, że pole magnetyczne $\vec{B}_I$ wytworzone przez ten prąd przeciwdziała *zmianie* pola magnetycznego $\vec{B}$, która ten prąd indukuje. Wektor indukcji $\vec{B}_I$ jest zawsze skierowany przeciwnie do wzrastającego wektora indukcji pola $\vec{B}$ (a) i (c), natomiast jest zawsze zgodny z kierunkiem malejącego wektora indukcji pola $\vec{B}$ (b) i (d). Reguła prawej dłoni wskazuje kierunek prądu indukowanego, w zależności od kierunku indukowanego pola

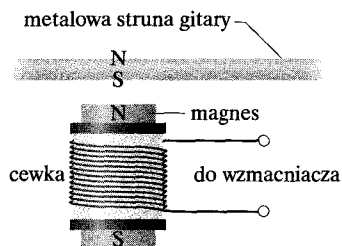


Gitary elektryczne

Na rysunku 31.6 przedstawiono gitarę elektryczną Fender Stratocaster, używaną przez Jimiego Hendrixa i wielu innych muzyków. Podczas gdy dźwięk drgających strun gitary akustycznej jest wzmacniany w pudle instrumentu, gitara elektryczna jest instrumentem wykonanym z litego materiału, w którym nie ma pudła. Zamiast tego, drgania metalowych strun są odbierane przez przetworniki elektryczne, które wysyłają sygnał do wzmacniacza i zestawu głośników.

Konstrukcja przetwornika została przedstawiona na rysunku 31.7. Przewód, który łączy instrument ze wzmacniaczem, jest nawinięty wokół małego magnesu. Pole magnetyczne magnesu indukuje biegun północny i południowy w odcinku metalowej struny tuż nad magnesem. Ten odcinek struny wytwarza więc swoje własne pole magnetyczne. Kiedy struna zostanie szarpnięta i pobudzona do drgań, jej ruch względem cewki zmienia strumień magnetyczny, przechodzący przez cewkę, indukując w niej prąd. Struna drga, zbliżając się i oddalając od cewki, zatem prąd indukowany zmienia kierunek z taką samą częstością, jak częstość drgań struny. Do wzmacniacza i głośnika przekazywany jest sygnał o tej częstości.

Rys. 31.6. Gitara Fender Stratocaster ma trzy zestawy po sześć przetworników (w szerokiej części korpusu). Dźwignia przełącznika na dole gitary umożliwia muzykowi wybór odpowiedniego zestawu przetworników, z których sygnał elektryczny wysyłany jest do wzmacniacza, a następnie do układu głośników

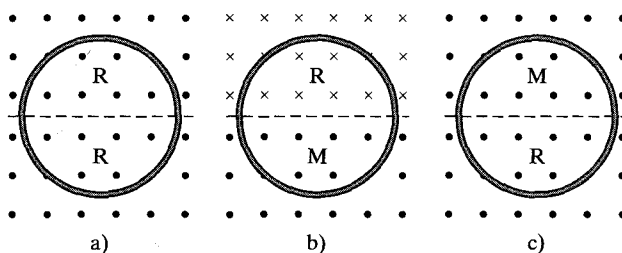


Rys. 31.7. Widok z boku przetwornika gitary elektrycznej. Pobudzenie do drgań metalowej struny (która zachowuje się jak magnes), powoduje zmianę strumienia magnetycznego, która indukuje prąd w cewce

Gitara Stratocaster ma trzy zestawy przetworników, umieszczonych w pobliżu dolnego końca strun (w szerokiej części korpusu). Zestaw, znajdujący się najbliżej dolnego końca, lepiej odbiera drgania strun o wysokich częstościach, natomiast zestaw położony najdalej końca lepiej odbiera drgania o niskich częstościach. Zmieniając położenie dźwigni przełącznika, muzyk może wybrać jeden lub kilka zestawów przetworników, które będą przekazywać drgania do wzmacniacza i głośników.

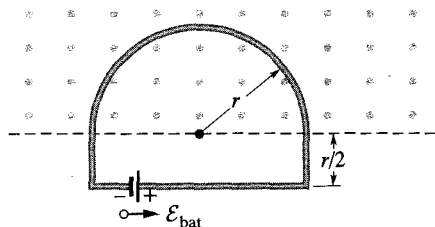
Aby uzyskać ciekawsze brzmienie muzyki, Hendrix czasem zmieniał liczbę zwojów w cewkach przetworników swojej gitary. W ten sposób zmieniał wielkość SEM indukowanej w cewkach, a więc względną czułość przetworników. Nawet bez stosowania tych dodatkowych środków gitara elektryczna daje znacznie większe w porównaniu z gitarą akustyczną możliwości wpływania na wytwarzane przez nią dźwięki.

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono trzy przypadki, w których identyczne przewodzące okrągłe pętle znajdują się w obszarach jednorodnego pola magnetycznego, którego wartość indukcji albo rośnie (R), albo maleje (M) z tą samą szybkością. W każdym przypadku linia przerywana pokrywa się ze średnicą. Uszereguj przypadki pod względem wartości natężenia prądu indukowanego w pętli, zaczynając od największej wartości.



Przykład 31.2

Na rysunku 31.8 przedstawiono przewodzącą pętlę, składającą się z półokręgu o promieniu $r = 0,2$ m i trzech odcinków. Półokrąg znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$, skierowanym przed płaszczyznę rysunku. Wartość indukcji jest dana wzorem $B = 4t^2 + 2t + 3$, gdzie B jest wyrażone w teslach, a t w sekundach. Do pętli dołączone jest źródło doskonałe o SEM $\mathcal{E}_{\text{bat}} = 2$ V. Opór pętli wynosi 2Ω .



Rys. 31.8. Przykład 31.2. Źródło jest dołączone do przewodzącej pętli, której część stanowi półokrąg o promieniu r , umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym. Wektor indukcji magnetycznej jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a jego wartość zmienia się w czasie

a) Jaka jest wartość i kierunek SEM $\mathcal{E}_{\text{ind}}$, indukowanej w pętli przez pole $\vec{B}$ w chwili $t = 10$ s?

ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Zgodnie z prawem Faradaya wartość $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ jest równa szybkości $d\Phi_B/dt$, z jaką zmienia się strumień magnetyczny, przechodzący przez pętlę.

➡ 2. Strumień przechodzący przez pętlę zależy od pola powierzchni S pętli oraz od jej ustawienia w polu magnetycznym $\vec{B}$. Pole $\vec{B}$ jest jednorodne, a wektor $\vec{B}$ jest prostopadły do płaszczyzny pętli, zatem strumień dany jest wzorem (31.4) ($\Phi_B = BS$). Korzystając z tego równania i biorąc pod uwagę, że tylko wartość indukcji pola B zmienia się w czasie (a nie pole powierzchni S), możemy napisać prawo Faradaya (31.6) w postaci:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = S \frac{dB}{dt}.$$

➡ 3. Strumień przenika przez pętlę tylko wewnątrz obszaru półkolistego, więc pole powierzchni S w tym równaniu jest równe $\frac{1}{2}\pi r^2$. Podstawiając ten wynik oraz wyrażenie dla B , otrzymujemy:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = S \frac{dB}{dt} = \frac{\pi r^2}{2} \frac{d}{dt}(4t^2 + 2t + 3) = \frac{\pi r^2}{2}(8t + 2).$$

Zatem w chwili $t = 10$ s:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{\pi(0,2 \text{ m})^2}{2}[8(10) + 2] = 5,152 \text{ V} \approx 5,2 \text{ V. (odpowiedź)}$$

Aby wyznaczyć kierunek $\mathcal{E}_{\text{ind}}$, zauważ najpierw, że strumień przechodzący przez pętlę na rysunku 31.8 jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a jego wartość rośnie w czasie. Zatem pole indukowane B_I (wytworzone przez prąd indukowany) musi przeciwdziałać temu wzrostowi i dlatego musi być skierowane za płaszczyznę rysunku. Stosując regułę prawej dłoni (rys. 30.7c), dochodzimy do wniosku, że prąd indukowany musi płynąć w pętli zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Tak więc indukowana SEM $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ musi być skierowana również zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

b) Ile wynosi natężenie prądu, płynącego w pętli w chwili $t = 10$ s?

ROZWIĄZANIE:

➡ Dwie SEM powodują ruch ładunków wokół pętli. Indukowana SEM $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ wytwarza w pętli prąd, płynący w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, natomiast SEM źródła $\mathcal{E}_{\text{bat}}$ wytwarza prąd, płynący w kierunku przeciwnym. Wartość $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ jest większa niż $\mathcal{E}_{\text{bat}}$, zatem wypadkowa SEM $\mathcal{E}_{\text{wyp}}$ jest skierowana zgodnie z ruchem wskazówek zegara, podobnie jak całkowity prąd w pętli. Aby obliczyć natężenie prądu dla $t = 10$ s, korzystamy z równania (28.2) ($I = \mathcal{E}/R$):

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{wyp}}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}} - \mathcal{E}_{\text{bat}}}{R} = \frac{5,152 \text{ V} - 2 \text{ V}}{2 \Omega} = 1,58 \text{ A} \approx 1,6 \text{ A. (odpowiedź)}$$

Przykład 31.3

Na rysunku 31.9 przedstawiono prostokątną ramkę z drutu, umieszczoną w niejednorodnym i zmieniającym się w czasie polu magnetycznym $\vec{B}$. Wektor indukcji $\vec{B}$ jest skierowany prostopadle do płaszczyzny rysunku, a jego wartość wynosi $B = 4t^2x^2$, gdzie B jest wyrażone w teslach, t w sekundach, a x w metrach. Szerokość ramki jest równa $W = 3$ m, a wysokość $H = 2$ m. Jaka jest wartość i kierunek SEM $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ indukowanej w ramce w chwili $t = 0,1$ s?

ROZWIĄZANIE:

➡ Wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ zmienia się w czasie, zatem strumień magnetyczny Φ_B przechodzący przez ramkę również zmienia się w czasie. ➡ Zmienny w czasie strumień indukuje w ramce SEM $\mathcal{E}$, zgodnie z prawem Faradaya, które możemy zapisać (pomijając znak), jako $\mathcal{E} = d\Phi_B/dt$.

Aby zastosować to prawo, musimy znać wyrażenie, określające strumień Φ_B w dowolnej chwili t . Jednakże, ➡ nie możemy w tym celu zastosować równania (31.4) ($\Phi_B = BS$), gdyż

pole B nie jest jednorodne w obszarze objętym pętlą. Zamiast tego musimy zastosować równanie (31.3) ($\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$).

Na rysunku 31.9 wektor $\vec{B}$ jest prostopadły do płaszczyzny ramki (a zatem równoległy do wektora powierzchni $d\vec{S}$), tak więc iloczyn skalarny w równaniu (31.3) jest równy BdS . Pole magnetyczne jest funkcją współrzędnej x , ale nie jest funkcją y , zatem za element powierzchni dS możemy przyjąć pole powierzchni pionowego paska o wysokości H i szerokości dx (jak pokazano na rysunku 31.9). Wtedy $dS = Hdx$, a strumień, przenikający przez ramkę jest równy:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B dS = \int BH dx = \int 4t^2 x^2 H dx.$$

Traktując w tym całkowaniu t jako stałą i podstawiając granice całkowania $x = 0$ i $x = 3$ m, otrzymujemy:

$$\Phi_B = 4t^2 H \int_0^3 x^2 dx = 4t^2 H \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 72t^2,$$

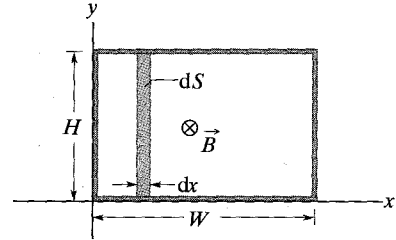
gdzie podstawiliśmy $H = 2$ m, a wartość Φ_B jest wyrażona w weberach. Możemy teraz zastosować prawo Faradaya do obliczenia wartości bezwzględnej $\mathcal{E}$ w dowolnej chwili t :

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(72t^2)}{dt} = 144t,$$

gdzie $\mathcal{E}$ jest wyrażone w woltach. Dla $t = 0,1$ s

$$\mathcal{E} = (144 \text{ V/s})(0,1 \text{ s}) \approx 14 \text{ V.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Strumień pola $\vec{B}$, przechodzący przez pętlę, jest skierowany za płaszczyznę rysunku 31.9, a jego wartość rośnie, gdyż wartość indukcji pola B rośnie w czasie. Zgodnie z regułą Lenza, pole B_I , wytworzone przez prąd indukowany musi się przeciwstawiać temu wzrostowi i dlatego jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Reguła prawej dłoni przedstawiona na rysunku 31.5 mówi zatem, że prąd indukowany płynie w pętli w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a więc tak samo skierowana jest indukowana SEM $\mathcal{E}$.



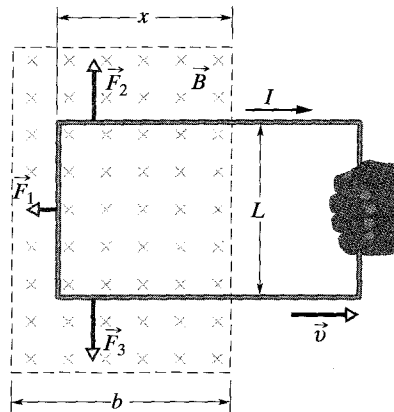
Rys. 31.9. Przykład 31.3. Zamknięta przewodząca ramka, o szerokości W i wysokości H , znajduje się w niejednorodnym, zmieniającym się w czasie polu magnetycznym, o wektorze indukcji skierowanym za płaszczyznę rysunku. Aby zastosować prawo Faradaya, posłużymy się pionowym paskiem o wysokości H , szerokości dx i polu powierzchni dS

31.5. Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

Zgodnie z regułą Lenza, niezależnie od tego, czy przybliżasz, czy oddalasz magnes od pętli na rysunku 31.1, siła magnetyczna przeciwstawia się ruchowi magnesu. Oznacza to, że siła, jaką działasz, wykonuje pracę dodatnią. Jednocześnie w przewodniku, z którego wykonana jest pętla, wydzielą się energia termiczna, gdyż prąd, indukowany w pętli w wyniku ruchu magnesu, napotyka opór elektryczny materiału. Innymi słowy energia, którą przekazujesz do zamkniętego układu pętla + magnes, działając siłą, przekształca się w końcu w energię termiczną. (Pomijamy tutaj energię wypromieniowaną przez pętlę podczas zjawiska indukcji w postaci fal elektromagnetycznych). Im szybciej przesuwasz magnes, tym szybciej siła, którą przykładasz, wykonuje pracę, a więc tym większa jest szybkość, z jaką dostarczona przez ciebie energia jest przekształcana w energię termiczną w pętli. Oznacza to, że przekazywana wtedy moc jest większa.

Niezależnie od tego, w jaki sposób prąd jest indukowany w pętli, energia jest zawsze przekształcana podczas tego procesu w energię termiczną, gdyż w pętli istnieje opór elektryczny. (Wyjątkiem jest przypadek, gdy pętla jest wykonana z nadprzewodnika). Na przykład na rysunku 31.2, gdy zamykamy klucz S , a prąd jest przez chwilę indukowany w pętli po lewej stronie, energia dostarczona ze źródła jest przekształcana w energię termiczną w pętli.

Na rysunku 31.10 przedstawiono inny przypadek, w którym powstaje prąd indukowany. Część prostokątnej przewodzącej ramki o szerokości L znajduje się



Rys. 31.10. Zamknięta przewodząca ramka jest wyciągana ze stałą prędkością $\vec{v}$ z obszaru, w którym istnieje pole magnetyczne. Podczas ruchu ramki indukuje się w niej prąd o natężeniu I , płynący w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Na odcinki ramki znajdujące się nadal w polu magnetycznym działają siły $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$

w jednorodnym polu magnetycznym, o wektorze indukcji skierowanym prostopadłe do płaszczyzny ramki za tę płaszczyznę. Takie pole może być wytworzone np. przez duży elektromagnes. Linie przerywane na rysunku 31.10 wskazują umowne granice obszaru pola magnetycznego; pola rozproszone na brzegach tego obszaru są pominięte. Twoim zadaniem jest przesuwanie ramki w prawo ze stałą prędkością $\vec{v}$.

Sytuacje przedstawione na rysunkach 31.10 i 31.1 nie różnią się od siebie w istotny sposób. W obydwa przypadkach pole magnetyczne i przewodząca ramka poruszają się względem siebie, a strumień pola, przechodzący przez ramkę, zmienia się w czasie. Prawdą jest, że na rysunku 31.1 strumień ulega zmianie, gdyż zmienia się wektor $\vec{B}$, natomiast na rysunku 31.10 strumień ulega zmianie, gdyż zmienia się ta część powierzchni ramki, która wciąż znajduje się w polu magnetycznym. Ta różnica nie jest jednak istotna, natomiast zasadniczą różnicą między dwoma układami jest to, że dla układu na rysunku 31.10 obliczenia wykonuje się znacznie łatwiej. Obliczmy więc teraz szybkość, z jaką wykonujesz pracę mechaniczną, gdy przesuwasz ramkę ruchem jednostajnym, jak na rysunku 31.10.

Jak zobaczysz, należy przyłożyć stałą siłę $\vec{F}$ do ramki, aby przesuwać ją ze stałą prędkością $\vec{v}$, gdyż przeciwstawia się temu siła magnetyczna o takiej samej wartości, działająca na ramkę w przeciwnym kierunku. Z równania (7.48) wynika, że szybkość, z jaką wykonywana jest praca (moc) jest równa:

$$P = Fv, \quad (31.8)$$

gdzie F jest wartością przyłożonej siły. Chcielibyśmy znaleźć wyrażenie opisujące P , w zależności od wartości indukcji magnetycznej B i właściwości ramki, a mianowicie jej rozmiaru L i oporu R stawianego prądowi.

W miarę przesuwania ramki w prawo na rysunku 31.10 maleje część jej powierzchni, znajdująca się w polu magnetycznym. Tak więc strumień przechodzący przez ramkę również maleje i w ramce powstaje prąd indukowany. To właśnie obecność tego prądu jest przyczyną powstawania siły, która zgodnie z regułą Lenza przeciwstawia się ruchowi ramki.

Aby wyznaczyć natężenie prądu, zastosujemy najpierw prawo Faradaya. Jeśli x oznacza długość tej części ramki, która wciąż znajduje się w polu magnetycznym, to pole powierzchni tej części jest równe Lx . Zatem zgodnie z równaniem (31.4), wartość strumienia przechodzącego przez ramkę jest równa:

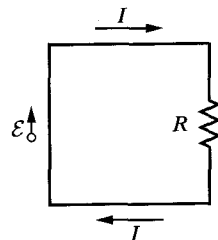
$$\Phi_B = BS = BLx. \quad (31.9)$$

Gdy x maleje, maleje również strumień. Zgodnie z prawem Faradaya zmniejszanie się strumienia indukuje SEM w pętli. Pomijając znak minus w równaniu (31.6) i stosując równanie (31.9), możemy zapisać wartość SEM jako:

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BLx) = BL \frac{dx}{dt} = BLv, \quad (31.10)$$

gdzie dx/dt zastąpiliśmy prędkością v , z jaką porusza się ramka.

Na rysunku 31.11 pokazano ramkę jako obwód elektryczny: indukowana SEM $\mathcal{E}$ przedstawiona jest po lewej stronie, a całkowity opór R ramki — po prawej stronie rysunku. Kierunek prądu indukowanego o natężeniu I wynika z reguły prawej dłoni, jak na rysunku 31.5b. SEM o wartości $\mathcal{E}$ musi mieć ten sam kierunek.



Rys. 31.11. Obwód zastępczy poruszającej się ramki, przedstawionej na rysunku 31.10

Aby wyznaczyć wartość natężenia prądu indukowanego, nie możemy zastosować drugiego prawa Kirchhoffa, ponieważ, jak zobaczymy w paragrafie 31.6, dla indukowanej SEM nie możemy zdefiniować różnicy potencjałów. Możemy jednak zastosować równanie $I = \mathcal{E}/R$, podobnie jak zrobiliśmy to w przykładzie 31.2. Wykorzystując równanie (31.10), otrzymujemy:

$$I = \frac{BLv}{R}. \quad (31.11)$$

Trzy odcinki ramki na rysunku 31.10, przez które płynie prąd, znajdują się w polu magnetycznym, zatem na te odcinki będą działały siły do nich prostopadłe. Wiemy z równania 29.26, że siły te mogą być zapisane w postaci:

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}. \quad (31.12)$$

Siły działające na trzy odcinki ramki na rysunku 31.10 są oznaczone jako $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$. Zauważ jednak, że ze względu na symetrię, siły $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ mają jednakowe wartości i są przeciwnie skierowane, a więc wzajemnie się równoważą. Pozostaje tylko siła $\vec{F}_1$, która jest skierowana przeciwnie do siły $\vec{F}$, jaką działasz na ramkę. Tak więc $\vec{F} = -\vec{F}_1$.

Zauważ, że kąt między wektorem $\vec{B}$ i wektorem długości $\vec{L}$ jest równy 90° dla odcinka po lewej stronie ramki. Biorąc to pod uwagę oraz korzystając z równania (31.12) w celu wyznaczenia wartości $\vec{F}_1$, możemy napisać:

$$F = F_1 = ILB \sin 90^\circ = ILB. \quad (31.13)$$

Podstawiając równanie (31.11) do równania (31.13), otrzymujemy więc

$$F = \frac{B^2 L^2 v}{R}. \quad (31.14)$$

Ponieważ B , L i R są stałymi, więc prędkość v , z jaką przesuwamy ramkę, będzie stała, o ile wartość siły, jaką działamy na ramkę, będzie również stała.

Podstawiając równanie (31.14) do równania (31.8), możemy znaleźć szybkość, z jaką wykonujesz pracę, starając się wyciągnąć ramkę z obszaru pola magnetycznego:

$$P = Fv = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \quad (\text{szybkość wykonywania pracy}). \quad (31.15)$$

Na zakończenie naszych rozważań, wyznaczmy szybkość wydzielania się energii termicznej w ramce, podczas wyciągania jej ze stałą prędkością z obszaru pola magnetycznego. Obliczamy ją z równania (27.22):

$$P = I^2 R. \quad (31.16)$$

Podstawiając zamiast I wyrażenie (31.11), otrzymujemy:

$$P = \left(\frac{BLv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \quad (\text{szybkość wydzielania się energii termicznej}), \quad (31.17)$$

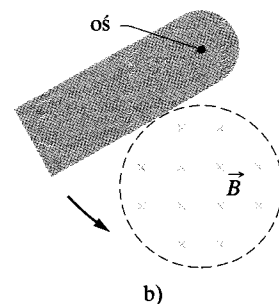
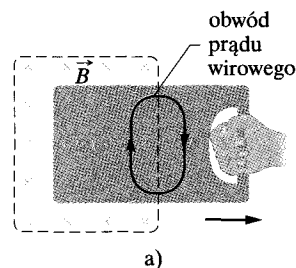
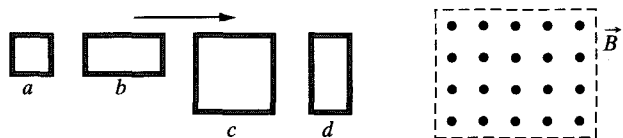
czyli wyrażenie dokładnie równe szybkości wykonywania pracy nad ramką (równanie (31.15)). Tak więc praca, wykonywana podczas przesuwania ramki w polu magnetycznym ulega w całości przekształceniu w energię termiczną w ramce.

Prądy wirowe

Wyobraź sobie, że przewodzącą ramkę z rysunku 31.10 zastąpiliśmy litą przewodzącą płytą. Jeżeli teraz spróbujemy usunąć płytę z obszaru pola magnetycznego, podobnie jak zrobiliśmy to z ramką (rys. 31.12a), to w wyniku względnego ruchu pola i płyty popłynie w niej prąd indukowany. Tak więc znów, w wyniku istnienia prądów indukowanych, napotkamy siłę przeciwdziałającą ruchowi płyty i będziemy musieli wykonać pracę. Jednakże elektrony przewodnictwa, które tworzą prąd indukowany w płycie, nie muszą poruszać się wzdłuż jednego toru, jak w przypadku pętli. Elektrony krążą wewnątrz płyty, jak gdyby znalazły się w wirze wodnym. Taki prąd nazywamy *prądem wirowym*. Możemy go przedstawić, jak na rysunku 31.12a, *jak gdyby* płynął wzdłuż pojedynczego toru.

Podobnie jak w przypadku przewodzącej pętli (rys. 31.10), prąd indukowany w płycie powoduje, że energia mechaniczna zostaje rozproszona w postaci energii termicznej. Rozpraszanie jest bardziej widoczne w układzie przedstawionym na rysunku 31.12b. Przewodząca płyta, która może swobodnie obracać się wokół osi, waha się, przechodząc przez obszar pola magnetycznego. Za każdym razem, gdy płyta dostaje się w obszar pola lub go opuszcza, część energii mechanicznej płyty przekształcana jest w energię termiczną. Po kilku wahaniach cała energia mechaniczna zostaje zużyta, a ogrzana płyta po prostu pozostaje bez ruchu zawieszona na osi.

SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono cztery ramki z drutu, o długości boków równej albo L , albo $2L$. Wszystkie cztery ramki poruszają się z taką samą stałą prędkością, przechodząc przez obszar jednorodnego pola magnetycznego $\vec{B}$, o indukcji skierowanej przed płaszczyznę rysunku. U szereguj cztery ramki pod względem maksymalnej wartości indukowanej SEM w czasie ich ruchu w polu, zaczynając od największej wartości.

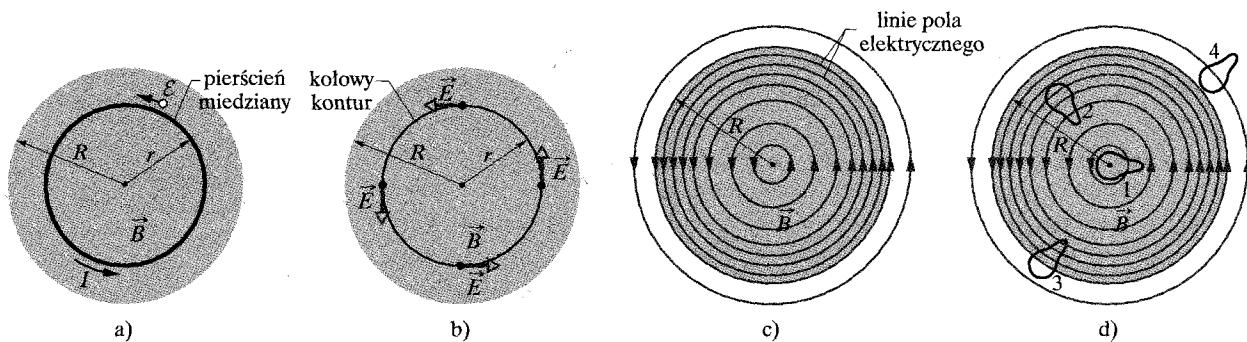


Rys. 31.12. a) Podczas usuwania przewodzącej płyty z obszaru pola magnetycznego indukują się w niej *prądy wirowe*. Pokazano umowny obwód zamknięty, w którym płynie prąd wirowy. b) Przewodząca płyta może wahać się wokół osi, przechodząc przez obszar pola magnetycznego. Gdy płyta dostaje się w obszar pola lub go opuszcza, indukują się w niej prądy wirowe

31.6. Indukowane pola elektryczne

Wyobraź sobie, że pierścień miedziany o promieniu r umieszczamy w jednorodnym zewnętrznym polu magnetycznym, jak pokazano na rysunku 31.13a. Pole zajmuje walcowy obszar o promieniu R , przy czym pomijamy pola rozproszone. Przypuśćmy, że zwiększamy ze stałą szybkością wartość indukcji magnetycznej, być może zwiększając odpowiednio natężenie prądu w uzwojeniu elektromagnesu, który to pole wytwarza. Strumień magnetyczny wewnątrz pierścienia będzie się również zmieniał ze stałą szybkością i zgodnie z prawem Faradaya w pierścieniu pojawi się indukowana SEM, a więc popłynie prąd indukowany. Na podstawie reguły Lenza możemy wywnioskować, że kierunek prądu indukowanego na rysunku 31.13a będzie przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Jeżeli w pierścieniu miedzianym płynie prąd, to wzdłuż tego pierścienia musi istnieć pole elektryczne, które jest potrzebne, aby wykonać pracę przy przemieszczaniu elektronów przewodnictwa. Co więcej, źródłem tego pola elektrycznego



Rys. 31.13. a) Gdy indukcja magnetyczna zwiększa się ze stałą szybkością, w pierścieniu miedzianym o promieniu r pojawia się prąd indukowany o stałym natężeniu. b) Indukowane pole elektryczne istnieje nawet wtedy, gdy usuniemy pierścień. Pole elektryczne pokazane jest w czterech punktach. c) Całkowity rozkład pola elektrycznego, przedstawiony w postaci linii pola. d) Cztery podobne kontury zamknięte o takim samym polu powierzchni. Wzdłuż konturów 1 i 2, które leżą całkowicie w obszarze zmieniającego się pola magnetycznego, indukują się jednakowe SEM. Mniejsza SEM jest indukowana wzdłuż konturu 3, który tylko częściowo leży w tym obszarze. Natomiast SEM nie jest indukowana wzdłuż konturu 4, który znajduje się całkowicie poza obszarem pola magnetycznego

musi być zmienny strumień magnetyczny. To **indukowane pole elektryczne $\vec{E}$** rzeczywiście istnieje, podobnie jak pole elektryczne, wytworzone przez ładunki nieruchome. Obydwa pola działają siłą $q_0 \vec{E}$ na cząstkę o ładunku q_0 .

Rozumując w ten sposób, dochodzimy do użytecznego i pouczającego sformułowania prawa indukcji Faradaya:

➤ Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne.

Uderzającą cechą tego sformułowania jest to, że pole elektryczne jest indukowane nawet wtedy, gdy nie ma pierścienia miedzianego.

Aby uściślić te pojęcia, przeanalizujmy rysunek 31.13b, który jest bardzo podobny do rysunku 31.13a, z wyjątkiem tego, że miedziany pierścień został zastąpiony kołowym konturem o promieniu r . Podobnie jak poprzednio zakładamy, że wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ rośnie ze stałą szybkością dB/dt . Z właściwości symetrii wynika, że wektor natężenia pola elektrycznego, indukowanego w różnych punktach konturu musi być do niego styczny, jak pokazano na rysunku 31.13b¹. Zatem kołowy kontur jest jednocześnie linią pola. Kontur o promieniu r nie jest czymś szczególnym, tak więc linie pola elektrycznego wytworzonego przez zmieniające się pole magnetyczne muszą tworzyć układ współśrodkowych okręgów, jak pokazano na rysunku 31.13c.

Gdy wartość indukcji magnetycznej *rośnie* w czasie, istnieje pole elektryczne, przedstawione na rysunku 31.13c w postaci linii pola o kształcie okręgów. Gdy wartość indukcji magnetycznej jest *stała* w czasie, pole elektryczne nie jest indukowane. Gdy wartość indukcji magnetycznej *maleje* w czasie (ze stałą szybkością), linie pola elektrycznego są znów współśrodkowymi okręgami, jak na rysunku 31.13c, ale tym razem są skierowane przeciwnie. To właśnie mamy na myśli, mówiąc: „Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne”.

¹Z właściwości symetrii wynika, że możliwe jest także, aby linie pola $\vec{E}$ były skierowane *radialnie*, a nie stycznie do konturu. Jednakże istnienie takich radialnych linii oznaczałoby, że wokół osi symetrii istnieją rozłożone symetrycznie swobodne ładunki, na których mogłyby się zaczynać i kończyć linie pola elektrycznego. Takich ładunków jednak nie ma.

Nowe sformułowanie prawa Faradaya

Wyobraźmy sobie cząstkę o ładunku q_0 , poruszającą się po kołowym torze, przedstawionym na rysunku 31.13b. Praca W , wykonana nad cząstką przez indukowane pole elektryczne, podczas jednego okrążenia wynosi $\mathcal{E}q_0$, gdzie $\mathcal{E}$ jest indukowaną SEM, równą pracy na jednostkę ładunku, wykonanej podczas ruchu ładunku próbnego po okręgu. Z drugiej strony praca jest równa:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q_0 E)(2\pi r), \quad (31.18)$$

gdzie $q_0 E$ jest wartością siły, działającej na ładunek próbny, a $2\pi r$ jest długością drogi, wzdłuż której ta siła działa. Porównując obydwa wyrażenia określające pracę W i skracając q_0 po obydwu stronach, otrzymujemy:

$$\mathcal{E} = 2\pi r E. \quad (31.19)$$

Możemy napisać równanie (31.18) w bardziej ogólnej postaci, która umożliwia obliczenie pracy, wykonanej nad cząstką o ładunku q_0 , poruszającą się wzdłuż dowolnego konturu zamkniętego:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (31.20)$$

(Kółko oznacza, że należy wykonać całkowanie wzdłuż konturu zamkniętego). Podstawiając $\mathcal{E}q_0$ zamiast W , otrzymujemy:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (31.21)$$

Ta całka redukuje się do wyrażenia (31.19), jeśli obliczymy ją w szczególnym przypadku, przedstawionym na rysunku 31.13b.

Równanie (31.21) pozwala na rozszerzenie pojęcia indukowanej SEM. Dotychczas indukowana SEM oznaczała pracę na jednostkę ładunku, wykonaną w celu podtrzymania prądu, indukowanego przez zmienny strumień magnetyczny. Indukowana SEM mogła również oznaczać pracę na jednostkę ładunku, wykonaną nad naładowaną cząstką, poruszającą się po torze zamkniętym, w zmiennym polu magnetycznym. Jednakże z równania (31.21) i z rysunku 31.13b wynika, że indukowana SEM może istnieć również wtedy, gdy nie ma prądu ani cząstki. Indukowana SEM jest sumą (a ściślej mówiąc całką) wielkości $\vec{E} \cdot d\vec{s}$, obliczoną wzdłuż zamkniętego konturu, gdzie $\vec{E}$ jest polem elektrycznym, indukowanym przez zmienne pole magnetyczne, a $d\vec{s}$ jest wektorowym elementem długości wzdłuż konturu zamkniętego.

Łącząc równanie (31.21) oraz prawo Faradaya (31.6) ($\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$), możemy napisać to prawo w postaci:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{prawo Faradaya}). \quad (31.22)$$

To równanie oznacza po prostu, że zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne. Zmienne pole magnetyczne występuje po prawej stronie tego równania, a pole elektryczne — po lewej.

Prawo Faradaya w postaci równania (31.22) może być zastosowane do *dowolnego* zamkniętego konturu, który można narysować w zmiennym polu magnetycznym. Na rysunku 31.13d przedstawiono przykładowo cztery takie kontury, o takim samym kształcie i polu powierzchni, umieszczone w różnych miejscach w zmiennym polu magnetycznym. Dla konturów 1 i 2 indukowane SEM $\mathcal{E}$ ($= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$) są takie same, gdyż obydwa kontury leżą całkowicie w obszarze pola magnetycznego i dlatego $d\Phi_B/dt$ ma w obydwu przypadkach taką samą wartość. Ten wniosek jest prawdziwy, mimo iż wektory natężenia pola elektrycznego w punktach, położonych wzdłuż każdego z konturów są różne, jak wskazują kształty linii pola elektrycznego na rysunku. Dla konturu 3 indukowana SEM ma mniejszą wartość, gdyż wartość strumienia Φ_B , objętego konturem (a więc i wartość $d\Phi_B/dt$) jest mniejsza. Dla konturu 4 indukowana SEM jest równa zeru, mimo iż w każdym punkcie konturu istnieje pole elektryczne.

Nowe spojrzenie na potencjał elektryczny

Indukowane pola elektryczne są wytwarzane nie przez ładunki nieruchome (statyczne), tylko przez zmienny strumień magnetyczny. Choć pola elektryczne, wytwarzane tymi dwoma sposobami, działają tak samo na cząstki naładowane, istnieje między nimi ważna różnica. Najprostszym przejawem tej różnicy jest fakt, że linie indukowanego pola elektrycznego tworzą zamknięte pętle, jak na rysunku 31.13c, natomiast linie pola wytworzonego przez ładunki statyczne nigdy nie są zamknięte, gdyż muszą zaczynać się na ładunkach dodatnich, a kończyć na ładunkach ujemnych.

Ogólnie mówiąc, różnica między polami elektrycznymi, wytwarzanymi przez indukcję i przez ładunki statyczne może być określona następująco:

► Potencjał elektryczny można zdefiniować tylko dla pól elektrycznych wytwarzanych przez ładunki statyczne. Nie można go zdefiniować dla pól elektrycznych wytwarzanych przez indukcję.

To stwierdzenie może być zrozumiałe, jeśli rozważymy, co dzieje się z naładowaną cząstką, która wykonuje jedno okrążenie po kołowym torze, przedstawionym na rysunku 31.13b. Cząstka wyruszyła z pewnego punktu i po powrocie do tego samego punktu okazało się, że działała na nią SEM $\mathcal{E}$ o wartości np. 5 V. Oznacza to, że nad cząstką została wykonana praca, równa 5 J na każdy 1 C jej ładunku ($1 \text{ V} = 1 \text{ J}/1 \text{ C}$), a więc cząstka powinna znaleźć się teraz w punkcie o potencjale większym o 5 V. Jednakże jest to niemożliwe, gdyż cząstka znajduje się z powrotem w tym samym punkcie, w którym potencjał nie może mieć przecież jednocześnie dwóch różnych wartości. Wynika stąd wniosek, że potencjału nie można zdefiniować dla pól elektrycznych, wytworzonych przez zmienne pola magnetyczne.

Możemy spojrzeć na to bardziej ogólnie, przytaczając równanie (25.18), które definiuje różnicę potencjałów między punktem początkowym a końcowym w polu elektrycznym $\vec{E}$:

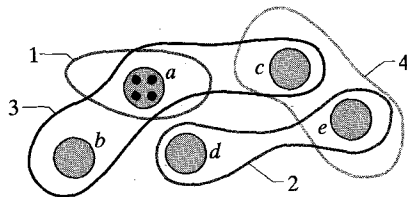
$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (31.23)$$

W rozdziale 25 nie mówiliśmy jeszcze o prawie indukcji Faradaya, tak więc pola elektryczne, zastosowane do wyprowadzenia równania (25.18) pochodzą od ładunków statycznych. Jeśli w równaniu (31.23) punkt początkowy pokrywa się z punktem końcowym, to łączący je kontur jest zamkniętą pętlą, wartości V_{pocz} i $V_{\text{końc}}$ są takie same, a równanie (31.23) redukuje się do:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (31.24)$$

Jednakże w obecności zmiennego strumienia magnetycznego ta całka *nie jest* równa zero, ale zgodnie z równaniem (31.22) jest równa $-\frac{d\Phi_B}{dt}$. Zatem przypisanie potencjału elektrycznego indukowanemu polu elektrycznemu doprowadziło nas do sprzeczności. Wynika stąd wniosek, że potencjał elektryczny nie ma sensu fizycznego dla pól elektrycznych, związanych ze zjawiskiem indukcji.

SPRAWDZIAN 4: Na rysunku przedstawiono pięć oznaczonych literami obszarów, w których istnieje jednorodne pole magnetyczne, skierowane albo przed płaszczyznę rysunku (jak w obszarze *a*), albo za płaszczyznę rysunku. Wartość indukcji magnetycznej rośnie z tą samą stałą szybkością we wszystkich pięciu obszarach. Przekroje wszystkich obszarów mają jednakowe pola. Na rysunku przedstawiono również cztery ponumerowane tor, wzdłuż których całka $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ma wartość podaną niżej w pewnych jednostkach. Ustal, czy pola magnetyczne w obszarach *b–e* są skierowane za, czy przed płaszczyznę rysunku.



Tor:	1	2	3	4
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$	1 jed.	2 jed.	3 jed.	0

Przykład 31.4

Przyjmij, że na rysunku 31.13b $R = 8,5$ cm, a $dB/dt = 0,13$ T/s.

a) Znajdź wyrażenie, określające wartość natężenia E indukowanego pola elektrycznego w punktach, znajdujących się w obszarze pola magnetycznego, w odległości r od środka. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $r = 5,2$ cm.

ROZWIĄZANIE:

➡ Zgodnie z prawem Faradaya, pole elektryczne jest indukowane przez zmienne pole magnetyczne. Aby obliczyć wartość natężenia pola E , stosujemy prawo Faradaya w postaci równania (31.22). Naszym celem jest wyznaczenie natężenia E w punktach, leżących w obszarze pola magnetycznego, dlatego wybieramy kołowy kontur całkowania o promieniu $r \leq R$. Korzystając z właściwości symetrii, można przyjąć, że natężenie pola E na rysunku 31.13b jest w każdym punkcie styczne do konturu. Wektorowy element długości $d\vec{s}$ jest również wszędzie styczny do konturu, więc iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ w równaniu (31.22) musi mieć wartość $E ds$ we wszystkich punktach tego konturu. Możemy także przyjąć, korzystając z właściwości symetrii, że natężenie E ma

taką samą wartość we wszystkich punktach kołowego konturu całkowania. Zatem lewa strona równania (31.22) przyjmuje postać:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint E ds = E \oint ds = E(2\pi r). \quad (31.25)$$

(Całka $\oint ds$ jest równa obwodowi $2\pi r$ kołowego konturu całkowania).

W następnym etapie musimy obliczyć prawą stronę równania (31.22). Indukcja $\vec{B}$ pola, przechodzącego przez powierzchnię S , objętą konturem całkowania jest stała i skierowana prostopadle do tej powierzchni, zatem strumień magnetyczny jest dany równaniem (31.4):

$$\Phi_B = BS = B(\pi r^2). \quad (31.26)$$

Podstawiając to równanie oraz równanie (31.25) do równania (31.22) i opuszczając znak minus, otrzymujemy:

$$E(2\pi r) = (\pi r^2) \frac{dB}{dt},$$

czyli

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (31.27)$$

Równanie (31.27) określa wartość natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie, dla którego $r \leq R$, czyli w obszarze, w którym istnieje pole magnetyczne. Podstawiając dane, otrzymujemy wartość natężenia pola $\vec{E}$ dla $r = 5,2$ cm:

$$E = \frac{(5,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{2} (0,13 \text{ T/s}) = 0,0034 \text{ V/m} = 3,4 \text{ mV/m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Znajdź wyrażenie, określające wartość natężenia E indukowanego pola elektrycznego w punktach, znajdujących się poza obszarem pola magnetycznego, w odległości r od środka. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $r = 12,5$ cm.

ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Możemy również tutaj zastosować rozumowanie przedstawione w punkcie (a), z tym wyjątkiem, że wybieramy kontur całkowania o promieniu $r \geq R$, gdyż zamierzamy obliczyć wartość natężenia E w punktach, znajdujących się poza obszarem pola magnetycznego. Postępując, jak w punkcie (a), otrzymamy znów równanie (31.25), jednak równanie (31.26) przyjmuje inną postać, gdyż kontur całkowania znajduje się teraz poza obszarem pola magnetycznego.

➡ 2. Wykorzystujemy więc fakt, że strumień magnetyczny, objęty przez nowy kontur jest strumieniem przechodzącym przez powierzchnię πR^2 obszaru pola magnetycznego. Dlatego:

$$\Phi_B = BS = B(\pi R^2). \quad (31.28)$$

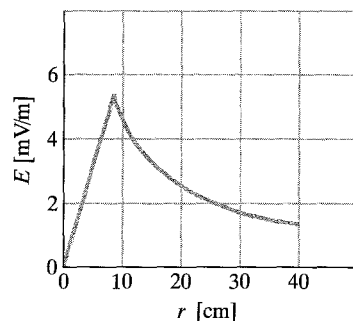
Podstawiając to równanie i równanie (31.25) do równania (31.22) (bez znaku minus), a następnie rozwiązując je względem E , otrzymujemy

$$E = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (31.29)$$

Ponieważ E nie jest równe zero, widzimy, że pole elektryczne jest indukowane również w punktach poza obszarem zmiennego pola magnetycznego. Jest to ważny wynik, dzięki któremu (jak się przekonamy w paragrafie 33.11) możliwe jest działanie transformatora. Po podstawieniu danych, z równania (31.29) otrzymujemy wartość E dla $r = 12,5$ cm:

$$E = \frac{(8,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(12,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})} (0,13 \text{ T/s}) = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ V/m} = 3,8 \text{ mV/m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Równania (31.27) i (31.29) muszą dać i oczywiście dają ten sam wynik dla $r = R$. Na rysunku 31.14 przedstawiono wykres $E(r)$, wykonany na podstawie tych dwóch równań.



Rys. 31.14. Wykres natężenia indukowanego pola elektrycznego $E(r)$ dla danych jak w przykładzie 31.4

31.7. Cewki i indukcja

Przekonaliśmy się w rozdziale 26, że kondensator może służyć do wytworzenia pola elektrycznego o zadanej z góry wartości natężenia. Przyjęliśmy wtedy układ równoległych płyt, jako podstawowy rodzaj kondensatora. Podobnie **cewka**, oznaczona na schemacie obwodu symbolem $\text{---}\text{---}\text{---}$, może być zastosowana do wytworzenia pola magnetycznego o zadanej wartości indukcji. Będziemy traktować długi solenoid (dokładniej: krótki odcinek w pobliżu środka długiego solenoidu) jako podstawowy rodzaj cewki.

Jeżeli przepuścimy prąd o natężeniu I przez uzwojenie cewki (solenoidu), to prąd wytworzy strumień magnetyczny Φ_B w środkowej części cewki. **Indukcyjność** cewki definiujemy jako:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (\text{definicja indukcyjności}), \quad (31.30)$$

gdzie N jest liczbą zwojów. O uzwojeniu cewki mówimy, że jest *sprzężone* przez wspólny strumień, a iloczyn $N\Phi_B$ nazywamy *magnetycznym strumieniem*

sprężonym. Indukcyjność L jest zatem miarą strumienia sprężonego, wytworzonego przez cewkę na jednostkę natężenia prądu.

Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest tesla razy metr kwadratowy, zatem jednostką indukcyjności jest tesla razy metr kwadratowy na amper ($\text{T} \cdot \text{m}^2/\text{A}$). Taka jednostka nosi nazwę **henr** (H), od nazwiska amerykańskiego fizyka Josepha Henry'ego, niezależnego odkrywcy prawa indukcji, współczesnego Faradayowi. Zatem:

$$1 \text{ henr} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}. \quad (31.31)$$

Do końca tego rozdziału będziemy zakładać, że w pobliżu wszystkich omawianych cewek, niezależnie od ich układu przestrzennego, nie ma żadnych materiałów magnetycznych, takich jak żelazo. Takie materiały mogłyby zniekształcić pole magnetyczne cewki.

Indukcyjność solenoidu

Przeanalizujmy długi solenoid o polu przekroju równym S . Ile wynosi indukcyjność na jednostkę długości w pobliżu środka tego solenoidu?

Aby zastosować równanie (31.30), definiujące indukcyjność, musimy obliczyć strumień sprężony, wytworzony przez prąd o danym natężeniu, płynący w uzwojeniu solenoidu. Rozważmy odcinek solenoidu o długości l , znajdujący się w pobliżu jego środka. Strumień sprężony w tej części solenoidu jest równy:

$$N\Phi_B = (nl)(BS),$$

gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości solenoidu, a B jest wartością indukcji magnetycznej we wnętrzu solenoidu.

Wartość indukcji B jest dana równaniem (30.25):

$$B = \mu_0 In,$$

tak więc z równania (31.30) otrzymujemy:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{(nl)(BS)}{I} = \frac{(nl)(\mu_0 In)(S)}{I} = \mu_0 n^2 l S. \quad (31.32)$$

Zatem indukcyjność na jednostkę długości dla długiego solenoidu w pobliżu jego środka wynosi:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \quad (\text{solenoid}). \quad (31.33)$$

Indukcyjność, podobnie jak pojemność, zależy tylko od kształtu elementu. Zależność od kwadratu liczby zwojów na jednostkę długości jest czymś, czego należało się spodziewać. Jeżeli np. zwiększymy trzykrotnie n , to nie tylko zwiększymy trzykrotnie liczbę zwojów, ale również zwiększymy trzykrotnie strumień ($\Phi_B = BS = \mu_0 InS$) przechodzący przez każdy zwoj, mnożąc w ten sposób strumień sprężony, a więc i indukcyjność L , przez czynnik 9.

Jeżeli długość solenoidu jest znacznie większa od jego promienia, to wyrażenie (31.32) jest dobrym przybliżeniem indukcyjności solenoidu. To przybliżenie nie uwzględnia rozchodzenia się linii pola magnetycznego w pobliżu końców

solenoidu, tak samo jak wzór na pojemność kondensatora płaskiego ($C = \epsilon_0 S/d$) nie uwzględnia rozproszonych pól elektrycznych w pobliżu brzegów płytek kondensatora.

Pamiętając, że n jest liczbą zwojów na jednostkę długości, wnioskujemy z równania (31.32), że indukcyjność może być zapisana jako iloczyn przenikalności magnetycznej μ_0 i wielkości o wymiarze długości. Oznacza to, że μ_0 może być wyrażone w henrach na metr:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m.} \quad (31.34)$$

31.8. Samoindukcja

Jeżeli dwie cewki znajdują się blisko siebie, to prąd o natężeniu I , płynący w jednej z nich wytwarza strumień magnetyczny Φ_B , przechodzący również przez drugą cewkę. Przekonaliśmy się, że jeśli zmienimy ten strumień, zmieniając natężenie prądu, to zgodnie z prawem Faradaya w drugiej cewce pojawi się indukowana SEM. Jednak indukowana SEM pojawi się również w pierwszej cewce.

► Indukowana SEM $\mathcal{E}_L$ występuje w każdej cewce, w której natężenie prądu się zmienia.

Takie zjawisko (patrz rys. 31.15) nazywamy **samoindukcją**, a pojawiająca się SEM jest nazywana **SEM samoindukcji**. Podlega ona prawu Faradaya tak samo jak każda indukowana SEM. Z równania (31.30) wynika, że dla dowolnej cewki:

$$N\Phi_B = LI. \quad (31.35)$$

Z prawa Faradaya wynika, że:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}. \quad (31.36)$$

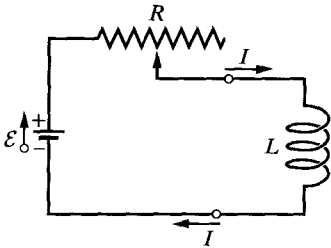
Łącząc równania (31.35) i (31.36), możemy napisać:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{SEM samoindukcji}). \quad (31.37)$$

Tak więc w dowolnej cewce, solenoidzie lub toroidzie pojawia się SEM samoindukcji, jeżeli tylko natężenie prądu zmienia się w czasie. Wartość natężenia prądu nie wpływa na wartość indukowanej SEM, istotna jest natomiast szybkość zmian natężenia prądu.

Kierunek SEM samoindukcji wynika z reguły Lenza. Znak minus w równaniu (31.37) wskazuje, że zgodnie z tą regułą SEM samoindukcji $\mathcal{E}_L$ ma taki kierunek, aby przeciwstawiać się zmianie natężenia prądu I . Znak minus możemy opuścić, jeżeli interesuje nas tylko wartość bezwzględna $\mathcal{E}_L$.

Przypuśćmy, że natężenie I prądu płynącego w cewce rośnie w czasie z szybkością dI/dt (rys. 31.16a). Zgodnie z regułą Lenza ten wzrost natężenia prądu jest „zmianą”, której musi przeciwstawić się samoindukcja. Aby takie przeciwdziałanie mogło wystąpić, w cewce musi pojawić się SEM samoindukcji,



Rys. 31.15. Jeżeli zmieniamy natężenie prądu w cewce, przesuując suwak opornika, to *podczas zmiany natężenia prądu* pojawia się w cewce SEM samoindukcji $\mathcal{E}_L$

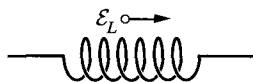
skierowana tak jak na rysunku, aby przeciwstawić się wzrostowi natężenia prądu. Jeżeli natężenie prądu będzie malało (rys. 31.16b), to SEM samoindukcji będzie skierowana tak, aby przeciwstawić się spadkowi natężenia prądu czyli tak jak przedstawiono na rysunku.

Przekonał się w paragrafie 31.6, że nie możemy zdefiniować potencjału elektrycznego dla pola elektrycznego (a więc i SEM), jeśli te wielkości są indukowane przez zmienny strumień magnetyczny. Oznacza to, że w przypadku SEM samoindukcji, powstającej w cewce na rysunku 31.15, nie możemy określić potencjału wewnątrz cewki, czyli tam, gdzie strumień się zmienia. Jednak nadal możemy definiować potencjał w punktach obwodu, znajdujących się poza cewką, czyli tam, gdzie pola elektryczne zostały wytworzone przez ładunki i związane z nimi potencjały elektryczne.

W szczególności możemy zdefiniować wynikającą z samoindukcji różnicę potencjałów U_L z *obydwu stron cewki*, czyli między jej doprowadzeniami, o których zakładamy, że znajdują się poza obszarem zmieniającego się strumienia. Jeżeli cewka jest *cewką idealną* (o znikomo małym oporze), to wartość U_L jest równa wartości SEM samoindukcji $\mathcal{E}_L$.

Jeżeli natomiast uzwojenie cewki ma opór r , zastępujemy w myśli cewkę cewką idealną o SEM samoindukcji równej $\mathcal{E}_L$ oraz opornikiem r (który znajduje się poza obszarem zmieniającego się strumienia). Podobnie, jak w przypadku rzeczywistego źródła o SEM $\mathcal{E}$ i oporze wewnętrznym r , różnica potencjałów na zaciskach rzeczywistej cewki różni się od jej SEM. Jeżeli nie powiemy wprost, że cewki są rzeczywiste, to będziemy zakładać, że cewki omawiane tutaj są cewkami idealnymi.

SPRAWDZIAN 5: Na rysunku przedstawiono SEM $\mathcal{E}$ indukowaną w cewce. Który z podpunktów opisuje poprawnie prąd płynący w cewce: a) stały i skierowany w prawo, b) stały i skierowany w lewo, c) rosnący i skierowany w prawo, d) malejący i skierowany w prawo, e) rosnący i skierowany w lewo, f) malejący i skierowany w lewo?



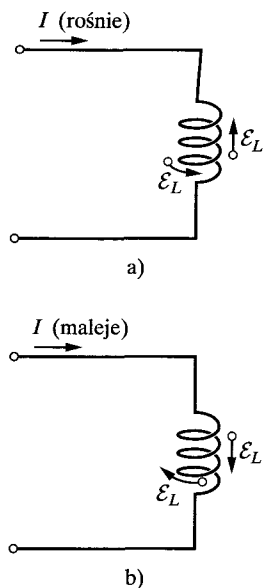
31.9. Obwody RL

Z paragrafu 28.8 dowiedział się, że jeśli nagle przyłożymy SEM $\mathcal{E}$ do obwodu o jednym oczku zawierającego opornik R i kondensator C , to ładunek na kondensatorze nie osiągnie natychmiast swojej wartości $C\mathcal{E}$ w stanie równowagi, ale będzie zmierzał do niej w sposób wykładniczy:

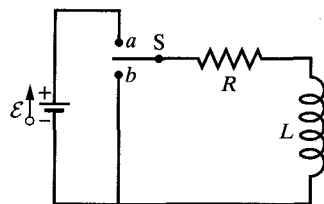
$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_C}). \quad (31.38)$$

Szybkość gromadzenia się ładunku jest określona pojemnościową stałą czasową τ_C , zdefiniowaną w równaniu (28.33) jako:

$$\tau_C = RC. \quad (31.39)$$



Rys. 31.16. a) Natężenie prądu I rośnie, a w cewce powstaje SEM samoindukcji $\mathcal{E}_L$ i ma taki kierunek, że przeciwstawia się wzrostowi natężenia prądu. Strzałkę oznaczającą $\mathcal{E}_L$ możemy narysować wzdłuż pojedynczego zwoju cewki lub obok cewki. Obie możliwości są pokazane na rysunku. b) Natężenie prądu I maleje, a SEM samoindukcji ma taki kierunek, że przeciwstawia się spadkowi natężenia prądu



Rys. 31.17. Obwód RL . Gdy klucz S jest połączony z punktem a , natężenie prądu rośnie i dąży do granicznej wartości $\mathcal{E}/R$

Jeżeli nagle odłączymy SEM od tego samego obwodu, to ładunek nie zniknie natychmiast, ale będzie zmierzał do zera w sposób wykładniczy:

$$q = q_0 e^{-t/\tau_c}. \quad (31.40)$$

Stała czasowa τ_c opisuje zarówno zanikanie, jak i gromadzenie się ładunku.

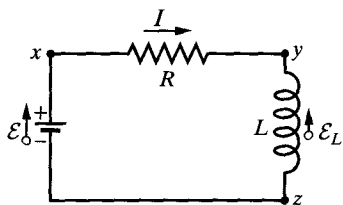
Podobne opóźnienie wzrostu (lub spadku) natężenia prądu pojawi się podczas włączania (lub wyłączania) SEM $\mathcal{E}$ w obwodzie o jednym oczku złożonym z opornika R i cewki L . Na przykład gdy klucz S na rysunku 31.17 zamyka obwód w punkcie a , natężenie prądu w oporniku zaczyna rosnąć. Gdyby nie było cewki, natężenie prądu wzrosłoby bardzo szybko do stałej wartości $\mathcal{E}/R$. Jednak ze względu na obecność cewki, w obwodzie pojawia się SEM samoindukcji $\mathcal{E}_L$. Zgodnie z regułą Lenza, ta SEM przeciwstawia się wzrostowi natężenia prądu, co oznacza, że jest przeciwnie skierowana niż SEM źródła. Tak więc prąd w oporniku płynie pod wpływem różnicy dwóch SEM, jednej stałej $\mathcal{E}$ źródła i drugiej zmiennej $\mathcal{E}_L (= -LdI/dt)$, wynikającej z samoindukcji. Tak długo, jak długo istnieje $\mathcal{E}_L$, natężenie prądu płynącego przez opornik będzie mniejsze niż $\mathcal{E}/R$.

Wraz z upływem czasu natężenie prądu rośnie coraz wolniej, a wartość SEM samoindukcji, proporcjonalna do dI/dt , maleje. Zatem natężenie prądu w obwodzie zmierza asymptotycznie do wartości $\mathcal{E}/R$.

Możemy uogólnić ten wynik w sposób następujący:

➤ Początkowo cewka przeciwdziała zmianom natężenia płynącego przez nią prądu. Po dłuższym czasie cewka działa jak zwykły przewód, łączący elementy obwodu.

Zbadamy teraz to zjawisko od strony ilościowej. Jeżeli klucz na rysunku 31.17 zamyka obwód w punkcie a , to obwód jest równoważny obwodowi, przedstawionemu na rysunku 31.18. Zastosujemy do tego obwodu drugie prawo Kirchhoffa, wychodząc z punktu x na rysunku i poruszając się, podobnie jak płynie prąd o natężeniu I , w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.



Rys. 31.18. Obwód przedstawiony na rysunku 31.17, z kluczem, ustawionym w położeniu a . Stosujemy drugie prawo Kirchhoffa w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, zaczynając w punkcie x

1. *Opornik.* Poruszamy się wzdłuż opornika, zgodnie z kierunkiem prądu o natężeniu I , tak więc potencjał elektryczny maleje o IR . Zatem przechodząc od punktu x do punktu y , obserwujemy zmianę potencjału, równą $-IR$.
2. *Cewka.* Natężenie prądu I ulega zmianie, tak więc w cewce pojawia się SEM samoindukcji $\mathcal{E}_L$. Wartość bezwzględna $\mathcal{E}_L$ wynika z równania (31.37) i wynosi LdI/dt . Na rysunku 31.18 $\mathcal{E}_L$ jest skierowane do góry, gdyż prąd płynie w dół przez cewkę, a jego natężenie I rośnie. Zatem przechodząc od punktu y do punktu z , a więc przeciwnie do kierunku $\mathcal{E}_L$, obserwujemy zmianę potencjału, równą $-LdI/dt$.
3. *Źródło.* Wracając od punktu z do punktu wyjścia x , obserwujemy zmianę potencjału, równą $+\mathcal{E}$, związaną z SEM źródła.

Tak więc z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że:

$$-IR - L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E} = 0,$$

czyli

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E} \quad (\text{obwód } RL). \quad (31.41)$$

Równanie (31.41) jest równaniem różniczkowym zawierającym zmienną I oraz jej pierwszą pochodną dI/dt . Aby rozwiązać to równanie, poszukujemy takiej funkcji $I(t)$, która po podstawieniu $I(t)$ i jej pierwszej pochodnej spełnia równanie (31.41), a także spełnia warunek początkowy $I(0) = 0$.

Równanie (31.41), wraz z warunkiem początkowym, ma dokładnie taką samą postać, jak równanie (28.29), opisujące obwód RC , jeżeli q zastąpimy przez I , R przez L , a $1/C$ przez R . Rozwiązanie równania (31.41) musi więc mieć dokładnie taką samą postać jak rozwiązanie równania (28.30), jeśli dokonamy tych samych podstawień. To rozwiązanie jest dane wyrażeniem:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}), \quad (31.42)$$

które możemy napisać jako:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}), \quad (\text{wzrost natężenia prądu}). \quad (31.43)$$

Indukcyjna stała czasowa τ_L jest równa:

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad (\text{stała czasowa}). \quad (31.44)$$

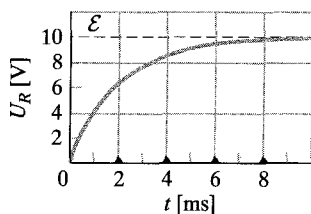
Przeanalizujmy wyrażenie (31.43) w dwóch przypadkach: w chwili zamknięcia klucza ($t = 0$) oraz po upływie długiego czasu od zamknięcia klucza ($t \rightarrow \infty$). Jeżeli podstawimy $t = 0$ do równania (31.43), to funkcja wykładnicza przyjmie wartość $e^{-0} = 1$. Tak więc z równania (31.43) wynika, że natężenie prądu jest w chwili początkowej równe $I = 0$, czego należało się spodziewać. Jeśli następnie będziemy zmierzać z t do nieskończoności, to funkcja wykładnicza będzie zmierzać do $e^{-\infty} = 0$. Zatem z równania (31.43) wynika, że natężenie prądu zmierza do wartości stanu ustalonego $\mathcal{E}/R$.

Możemy także przeanalizować różnice potencjałów, występujące w obwodzie. Na rysunku 31.19 pokazano, jak zmienia się w czasie różnica potencjałów $U_R (= IR)$ na oporniku i różnica potencjałów $U_L (= LdI/dt)$ na cewce, dla pewnych szczególnych wartości $\mathcal{E}$, L i R . Porównaj ten rysunek z analogicznym rysunkiem dla obwodu RC (rys. 28.14).

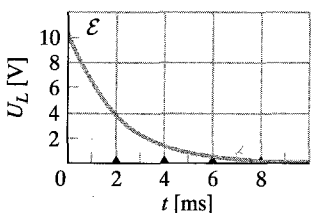
Aby wykazać, że wielkość $\tau_L (= L/R)$ ma wymiar czasu, przekształcamy jednostkę henr na om w następujący sposób:

$$1 \frac{\text{H}}{\Omega} = 1 \frac{\text{H}}{\Omega} \left(\frac{1 \text{ V} \cdot \text{s}}{1 \text{ H} \cdot \text{A}} \right) \left(\frac{1 \Omega \cdot \text{A}}{1 \text{ V}} \right) = 1 \text{ s}.$$

Wyrażenie w pierwszym nawiasie jest współczynnikiem przeliczeniowym, wynikającym z równania (31.37), natomiast wyrażenie w drugim nawiasie jest współczynnikiem przeliczeniowym, wynikającym z zależności $U = IR$.



a)



b)

Rys. 31.19. Zależność od czasu: a) różnicy potencjałów U_R na oporniku, w obwodzie przedstawionym na rysunku 31.18, b) różnicy potencjałów U_L na cewce w tym samym obwodzie. Małe trójkąciki przedstawiają kolejne przedziały czasowe, równe indukcyjnej stałej czasowej $\tau_L = L/R$. Wykres został sporządzony dla $R = 2000 \, \Omega$, $L = 4 \, \text{H}$ oraz $\mathcal{E} = 10 \, \text{V}$

Fizyczne znaczenie stałej czasowej wynika z równania (31.43). Jeżeli podstawimy do tego równania $t = \tau_L = L/R$, to otrzymamy:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-1}) \approx 0,63 \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (31.45)$$

Tak więc stała czasowa τ_L oznacza czas, jaki musi upłynąć, aby natężenie prądu w obwodzie osiągnęło około 63% swojej końcowej wartości w stanie ustalonym $\mathcal{E}/R$. Różnica potencjałów U_R na oporniku jest proporcjonalna do natężenia prądu I , zatem wykres natężenia prądu rosnącego w funkcji czasu ma taki sam kształt, jak wykres U_R na rysunku 31.19a.

Załóżmy, że klucz S zamyka obwód w punkcie a dostatecznie długo, tak aby natężenie prądu osiągnęło stan ustalony $\mathcal{E}/R$. Jeżeli teraz przestawimy klucz w położenie b , to źródło zostanie odłączone od obwodu. (Przełączenie do punktu b musi w rzeczywistości nastąpić na chwilę przed przzerwaniem połączenia z punktem a . Taki klucz jest nazywany kluczem *bezprzerwowym*).

Przy braku źródła, natężenie prądu płynącego przez opornik będzie się zmniejszało. Prąd nie może jednak przestać płynąć natychmiast; jego natężenie będzie stopniowo malało do zera. Równanie różniczkowe, opisujące zmniejszanie się natężenia można wyprowadzić, podstawiając $\mathcal{E} = 0$ w równaniu (31.41):

$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0. \quad (31.46)$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego, spełniające warunki początkowe $I(0) = I_0 = \mathcal{E}/R$, może być napisane przez analogię do równań (28.35) i (28.36):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L} = I_0 e^{-t/\tau_L} \quad (\text{zmniejszanie się natężenia prądu}). \quad (31.47)$$

Widzisz, że ta sama stała czasowa τ_L decyduje zarówno o zwiększaniu się natężenia prądu (równanie (31.43)), jak i jego zmniejszaniu (równanie (31.47)).

W równaniu (31.47) I_0 oznacza natężenie prądu w chwili $t = 0$. W naszym przypadku było to $\mathcal{E}/R$, ale równie dobrze może to być jakakolwiek inna wartość początkowa.

Przykład 31.5

Na rysunku 31.20a przedstawiono obwód, składający się z trzech identycznych oporników o oporze $R = 9 \, \Omega$, dwóch identycznych cewek o indukcyjności $L = 2 \, \text{mH}$ i źródła doskonałego o SEM $\mathcal{E} = 18 \, \text{V}$.

a) Jakie będzie natężenie prądu I , płynącego przez źródło tuż po zamknięciu klucza?

ROZWIĄZANIE:

➡ Tuż po zamknięciu klucza, każda cewka będzie usiłowała przeciwdziałać zmianie natężenia płynącego przez nią prądu. Natężenie prądu w każdej z cewek jest równe zeru przed zamknięciem klucza, a więc będzie ono także równe zeru chwilę później. Zatem bezpośrednio po zamknięciu klucza cewka zachowuje się

jak przerwa w obwodzie, co pokazano na rysunku 31.20b. Mamy więc obwód o jednym oczku, dla którego drugie prawo Kirchhoffa daje:

$$\mathcal{E} - IR = 0.$$

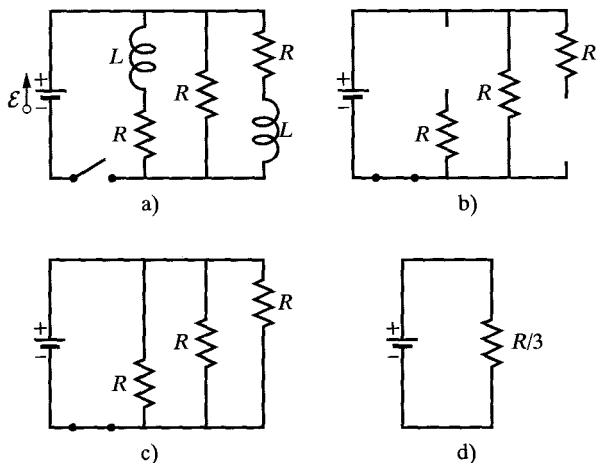
Podstawiając dane, otrzymujemy:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{18 \, \text{V}}{9 \, \Omega} = 2 \, \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jakie będzie natężenie prądu I , płynącego przez źródło po długim czasie od zamknięcia klucza?

ROZWIĄZANIE:

➡ Po długim czasie od zamknięcia klucza natężenia prądów osiągają stan ustalony, a cewki działają jak zwykłe przewody

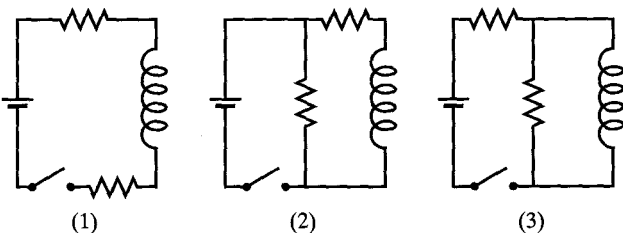


Rys. 31.20. Przykład 31.5. a) Obwód RL o wielu oczkach, z otwartym kluczem. b) Obwód równoważny tuż po zamknięciu klucza. c) Obwód równoważny po upływie długiego czasu. d) Obwód o jednym oczku równoważny obwodowi (c)

połączeniowe, co pokazano na rysunku 31.20c. Mamy więc obwód z trzema identycznymi opornikami, połączonymi równolegle. Z równania (28.20) wynika, że opór równoważny wynosi $R_{rw} = R/3 = (9 \Omega)/3 = 3 \Omega$. Drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu równoważnego, pokazanego na rysunku 31.20d, daje $\mathcal{E} - IR_{rw} = 0$, stąd:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{rw}} = \frac{18 \text{ V}}{3 \Omega} = 6 \text{ A.} \quad (\text{odpowiedź}).$$

SPRAWDZIAN 6: Na rysunku przedstawiono trzy obwody, składające się z takich samych źródeł, cewek i oporników. Uszereguj obwody ze względu na natężenia prądu płynącego przez źródło: a) tuż po zamknięciu klucza, b) po upływie długiego czasu, rozpoczynając od największej wartości.



Przykład 31.6

Solenoid ma indukcyjność 53 mH i opór $0,37 \Omega$. Ile czasu upłynie do momentu, w którym natężenie prądu osiągnie połowę końcowej wartości w stanie ustalonym, jeżeli solenoid dołączymy do źródła?

ROZWIĄZANIE:

1. Możemy w myśli podzielić solenoid na opór i indukcyjność, połączone szeregowo ze źródłem, jak na rysunku 31.18. Zastosowanie drugiego prawa Kirchhoffa prowadzi wtedy do równania (31.41), którego rozwiązaniem jest wyrażenie (31.43), opisujące natężenie prądu I w obwodzie.

2. Zgodnie z tym rozwiązaniem, natężenie prądu I rośnie wykładniczo od zera do końcowej wartości w stanie ustalonym $\mathcal{E}/R$. Niech t_0 oznacza czas potrzebny do tego, aby natężenie prądu I osiągnęło połowę wartości końcowej. Z równania (31.43) otrzymujemy wówczas:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t_0/\tau_L}).$$

Rozwiązujemy to równanie względem t_0 , skracając $\mathcal{E}/R$, przenosząc funkcję wykładniczą na jedną stronę i obliczając logarytm naturalny z obydwu stron. Otrzymujemy wtedy:

$$t_0 = \tau_L \ln 2 = \frac{L}{R} \ln 2 = \frac{53 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{0,37 \Omega} \ln 2 = 0,1 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

31.10. Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

Gdy odsuwamy od siebie dwie cząstki naładowane różnoimiennie, możemy powiedzieć, że w polu elektrycznym, wytwarzanym przez te cząstki, gromadzona jest elektryczna energia potencjalna. Energię tę można odzyskać, jeżeli pozwolimy, aby cząstki znów zbliżyły się do siebie. W ten sam sposób możemy rozpatrywać energię zmagazynowaną w polu magnetycznym.

Aby wyprowadzić wzór, opisujący ilościowo zmagazynowaną energię, przeanalizujmy ponownie rysunek 31.18, na którym przedstawiono źródło SEM $\mathcal{E}$

połączone z opornikiem R i cewką L . Równanie (31.41), które przytaczamy tu jeszcze raz:

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + IR, \quad (31.48)$$

jest równaniem różniczkowym, opisującym wzrost natężenia prądu w tym obwodzie. Przypominamy, że równanie to wynika bezpośrednio z drugiego prawa Kirchhoffa, które z kolei wyraża zasadę zachowania energii w obwodzie o jednym oczku. Jeżeli pomnożymy obie strony równania (31.48) przez I , to otrzymamy równanie:

$$\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} + I^2 R, \quad (31.49)$$

które ma następującą interpretację fizyczną dotyczącą pracy i energii:

1. Jeżeli ładunek dq przepływa przez źródło SEM o wartości $\mathcal{E}$ w czasie dt , to źródło wykonuje nad tym ładunkiem pracę $\mathcal{E}dq$. Szybkość, z jaką źródło wykonuje pracę, wynosi $(\mathcal{E}dq)/dt$, czyli $\mathcal{E}I$. Tak więc lewa strona równania (31.49) wyraża szybkość, z jaką źródło SEM dostarcza energię do pozostałych części obwodu.
2. Ostatni składnik po prawej stronie równania (31.49) wyraża szybkość, z jaką energia wydzielą się na oporniku w postaci energii termicznej.
3. Z zasady zachowania energii wynika, że energia, która jest dostarczona do obwodu, ale nie wydzielą się w postaci energii termicznej, musi być zmagazynowana w polu magnetycznym cewki. Równanie (31.49) opisuje zasadę zachowania energii w obwodach RL , a więc środkowy składnik musi wyrażać szybkość dE_B/dt gromadzenia energii w polu magnetycznym.

Tak więc:

$$\frac{dE_B}{dt} = LI \frac{dI}{dt}. \quad (31.50)$$

Możemy napisać to równanie w postaci:

$$dE_B = LI dI.$$

Całkując obie strony, otrzymujemy:

$$\int_0^{E_B} dE_B = \int_0^I LI dI,$$

czyli:

$$E_B = \frac{1}{2} LI^2 \quad (\text{energia magnetyczna}). \quad (31.51)$$

Jest to wyrażenie, określające całkowitą energię zmagazynowaną w cewce L , w której płynie prąd o natężeniu I . Zauważ podobieństwo tego wyrażenia do analogicznego wyrażenia określającego energię zmagazynowaną w kondensatorze o pojemności C i ładunku q

$$E_E = \frac{q^2}{2C}. \quad (31.52)$$

(Zmienna I^2 jest odpowiednikiem q^2 , a stała L jest odpowiednikiem $1/C$).

Przykład 31.7

Cewka ma indukcyjność 53 mH i opór 0,35 Ω .

a) Ile wynosi energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki, gdy przyłożymy do niej SEM 12 V, a natężenie prądu osiągnie stan ustalony?

ROZWIĄZANIE:

➡ Energia zmagazynowana w dowolnej chwili w polu magnetycznym cewki zależy od natężenia prądu, płynącego przez cewkę w tej samej chwili, zgodnie z równaniem (31.51) ($E_B = \frac{1}{2}LI^2$). Tak więc, aby wyznaczyć energię $E_{B\infty}$, zgromadzoną w stanie ustalonym, musimy najpierw obliczyć natężenie prądu w tym stanie. Z równania (31.43) wynika, że natężenie prądu w stanie ustalonym jest równe:

$$I_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12 \text{ V}}{0,35 \Omega} = 34,3 \text{ A.} \quad (31.53)$$

Stąd po podstawieniu otrzymujemy:

$$E_{B\infty} = \frac{1}{2}LI_\infty^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(53 \cdot 10^{-3} \text{ H})(34,3 \text{ A})^2 = 31 \text{ J.}$$

(odpowiedź)

b) Po jakim czasie, licząc w stałych czasowych, w polu magnetycznym zostanie zmagazynowana energia równa połowie energii w stanie ustalonym?

ROZWIĄZANIE:

➡ Stosujemy rozumowanie, jak w części (a). Teraz jednak musimy odpowiedzieć na pytanie: dla jakiego czasu t spełnione

jest równanie:

$$E_B = \frac{1}{2}E_{B\infty}.$$

Korzystając dwukrotnie z równania (31.51), możemy napisać ten warunek w następującej postaci:

$$\frac{1}{2}LI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}LI_\infty^2,$$

czyli

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)I_\infty. \quad (31.54)$$

Jednakże I jest wyznaczone w równaniu (31.43), a I_∞ (patrz równanie (31.53)) jest równe $\mathcal{E}/R$, tak więc równanie (31.54) przyjmuje postać:

$$\frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}R}.$$

Po skróceniu $\mathcal{E}/R$ i przekształceniu tego równania możemy napisać:

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,293,$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{t}{\tau_L} = -\ln 0,293 = 1,23,$$

czyli

$$t \approx 1,2\tau_L. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zatem energia zmagazynowana w cewce osiągnie połowę wartości w stanie ustalonym po upływie 1,2 stałych czasowych od momentu przyłożenia SEM.

31.11. Gęstość energii pola magnetycznego

Rozważmy odcinek l w pobliżu środka długiego solenoidu o polu przekroju S . Przez solenoid płynie prąd o natężeniu I , a objętość solenoidu o długości l jest równa Sl . Energia E_B zmagazynowana przez odcinek solenoidu o długości l musi znajdować się całkowicie w tej objętości, gdyż pole magnetyczne na zewnątrz solenoidu jest w przybliżeniu równe zero. Ponadto zmagazynowana energia musi być rozłożona równomiernie we wnętrzu solenoidu, gdyż pole magnetyczne jest tam (w przybliżeniu) jednorodne.

Zatem energia zmagazynowana w jednostce objętości wynosi:

$$u_B = \frac{E_B}{Sl}.$$

Ponieważ

$$E_B = \frac{1}{2}LI^2,$$

więc

$$u_B = \frac{LI^2}{2Sl} = \frac{L}{l} \frac{I^2}{2S}.$$

L oznacza tutaj indukcyjność odcinka solenoidu długości l .

Podstawiając wyrażenie L/l z równania (31.33), otrzymujemy:

$$u_B = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2, \quad (31.55)$$

gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości. Korzystając z równania (30.25) ($B = \mu_0 In$), możemy zapisać *gęstość energii* jako:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{gęstość energii magnetycznej}). \quad (31.56)$$

To równanie określa gęstość zmagazynowanej energii w dowolnym punkcie, w którym indukcja magnetyczna jest równa B . Choć wyprowadziliśmy to równanie, rozpatrując szczególnie przypadek solenoidu, równanie (31.56) jest słuszne dla wszystkich pól magnetycznych, bez względu na to, w jaki sposób zostały wytworzone. Równanie to można porównać z równaniem (26.23):

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad (31.57)$$

które określa gęstość energii (w próżni) w dowolnym punkcie w polu elektrycznym. Zauważ, że zarówno u_B , jak i u_E są proporcjonalne do kwadratów wielkości opisujących odpowiednio pola B i E .

✓ **SPRAWDZIAN 7:** W tabeli podano liczbę zwojów na jednostkę długości, natężenie prądu i pole przekroju dla trzech solenoidów. Uszereguj solenoidy pod względem gęstości energii magnetycznej wewnątrz każdego z nich, zaczynając od największej wartości.

Solenoid	Liczba zwojów na jednostkę długości	Natężenie prądu	Pole przekroju
<i>a</i>	$2n_1$	I_1	$2S_1$
<i>b</i>	n_1	$2I_1$	S_1
<i>c</i>	n_1	I_1	$6S_1$

Przykład 31.8

Długi kabel koncentryczny (rys. 31.21) składa się z dwóch cienkościennych współśrodkowych przewodów w kształcie walców o promieniach a i b . W przewodzie wewnętrznym płynie prąd o natężeniu I , a przewód zewnętrzny stanowi drogę powrotną dla tego prądu.

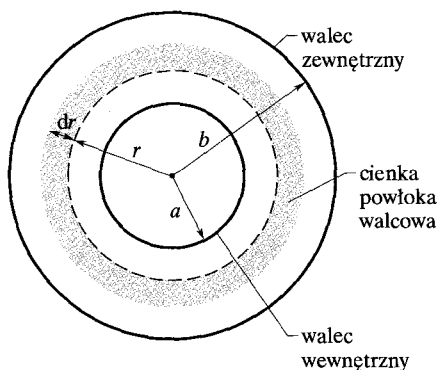
a) Oblicz energię, zmagazynowaną w polu magnetycznym w odcinku kabla o długości l .

ROZWIĄZANIE:

Rozwiązując to niełatwe zadanie, bierzemy pod uwagę następujące fakty:

1. Całkowita energia E_B , zmagazynowana w polu magnetycznym, może być obliczona z gęstości energii u_B pola.
2. Gęstość energii zależy od wartości indukcji magnetycznej, zgodnie z równaniem (31.56) ($u_B = B^2/2\mu_0$).
3. Ze względu na symetrię walcową kabla, możemy obliczyć indukcję B z prawa Ampère'a dla danego natężenia prądu I .

Obliczenie indukcji B : Aby wykorzystać powyższe fakty, najpierw zastosujemy prawo Ampère'a, wybierając kołowy kontur całkowania o promieniu r takim, że $a < r < b$ (kontur znajduje się między dwoma przewodami, jak pokazuje linia przerywana na rysunku 31.21). Jedynym prądem objętym konturem jest prąd o natężeniu I płynący w przewodzie wewnętrznym. Zatem prawo



Rys. 31.21. Przykład 31.8. Przekrój poprzeczny długiego kabla koncentrycznego, składającego się z dwóch cienkościennych przewodzących walców, wewnętrznego o promieniu a i zewnętrznego o promieniu b

Ampère'a można zapisać w postaci:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I. \quad (31.58)$$

Następnie możemy uprościć całkę, gdyż ze względu na symetrię walcową wektor indukcji $\vec{B}$ jest styczny do konturu i ma taką samą wartość w każdym jego punkcie. Wybierzmy kierunek całkowania zgodnie z kierunkiem linii pola magnetycznego wzdłuż konturu. Możemy wtedy zastąpić $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ wyrażeniem $B ds \cos 0 = B ds$ i wynieść B przed znak całki. Pozostaje więc całka $\oint ds$, która daje po prostu obwód $2\pi r$ konturu. Zatem równanie (31.58) upraszcza się do postaci:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I,$$

czyli:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (31.59)$$

Obliczenie u_B : Aby otrzymać gęstość energii, podstawiamy równanie (31.59) do równania (31.56):

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}. \quad (31.60)$$

Obliczenie E_B : Zauważ, że u_B nie jest stałe w obszarze między dwoma walcowymi przewodami, lecz zależy od odległości r od osi. Tak więc aby wyznaczyć całkowitą energię E_B , zma-

gazynowaną między przewodami, musimy scałkować u_B w tym obszarze.

Obszar między przewodami ma symetrię walcową względem osi kabla, zatem rozważmy objętość dV walcowej powłoki, umieszczonej między przewodami. Powłoka ma promień wewnętrzny r , promień zewnętrzny $r + dr$ (rys.31.21) i długość l . Pole przekroju poprzecznego powłoki jest iloczynem jej obwodu $2\pi r$ i grubości dr . Zatem objętość dV powłoki jest równa $(2\pi r)(dr)l$, tzn. $dV = 2\pi r l dr$.

Wszystkie punkty powłoki znajdują się w przybliżeniu w takiej samej odległości r od osi, a więc gęstość energii we wszystkich tych punktach jest w przybliżeniu taka sama. Tak więc całkowita energia dE_B , zawarta w powłoce o objętości dV jest opisana wzorem:

$$\text{energia} = \left(\frac{\text{energia na jednostkę objętości}}{\text{objętość}} \right) (\text{objętość})$$

czyli

$$dE_B = u_B dV.$$

Podstawiając wyrażenie (31.60) w miejsce u_B oraz $2\pi r l dr$ w miejsce dV , otrzymujemy:

$$dE_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} (2\pi r l) dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}.$$

Aby wyznaczyć całkowitą energię, zgromadzoną między przewodami, całkujemy to równanie w obszarze między przewodami:

$$E_B = \int dE_B = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (31.61)$$

Energia nie jest gromadzona na zewnątrz przewodu zewnętrznego, ani wewnątrz przewodu wewnętrznego, ponieważ indukcja magnetyczna jest równa zero w obydwu tych obszarach, co można wykazać za pomocą prawa Ampère'a.

b) Oblicz energię zmagazynowaną na jednostkę długości kabla, jeżeli $a = 1,2$ mm, $b = 3,5$ mm, a $I = 2,7$ A.

ROZWIĄZANIE:

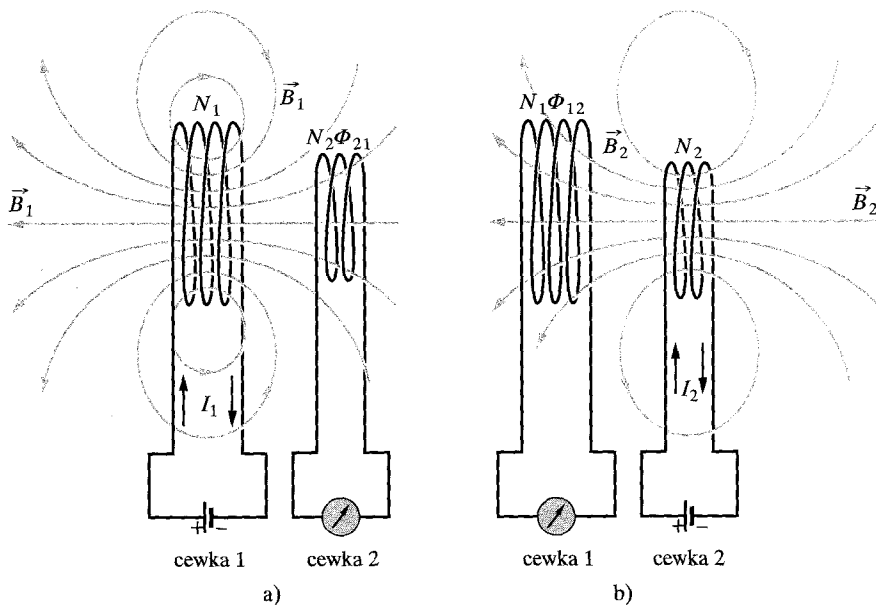
Z równania (31.61) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{E_B}{l} &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m})(2,7 \text{ A})^2}{4\pi} \ln \frac{3,5 \text{ mm}}{1,2 \text{ mm}} \\ &= 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ J/m} = 780 \text{ nJ/m}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

31.12. Indukcja wzajemna

W tym paragrafie powrócimy do przypadku dwóch oddziałujących ze sobą cewek, omawianego po raz pierwszy w paragrafie 31.2. Teraz potraktujemy ten przypadek w sposób trochę bardziej ogólny. Widzieliśmy już, że jeśli dwie cewki znajdują się blisko siebie, jak na rysunku 31.2, to prąd stały o natężeniu I w jednej

Rys. 31.22. Indukcja wzajemna. a) Jeżeli natężenie prądu w cewce 1 będzie się zmieniać, to w cewce 2 powstanie indukowana SEM. b) Jeżeli natężenie prądu w cewce 2 będzie się zmieniać, to w cewce 1 powstanie indukowana SEM



cewce wytwarza strumień magnetyczny Φ , który przenika przez drugą cewkę (*sprzęgając się z drugą cewką*). Jeżeli natężenie prądu I zmienia się w czasie, to zgodnie z prawem Faradaya w drugiej cewce pojawi się SEM $\mathcal{E}$. Nazywamy to zjawisko **indukcją wzajemną**, aby wskazać na wzajemne oddziaływanie dwóch cewek, w odróżnieniu od *samoindukcji*, występującej w jednej cewce.

Spójrzmy teraz na zjawisko indukcji wzajemnej z ilościowego punktu widzenia. Na rysunku 31.22a przedstawiono dwie okrągłe, ciasno nawinięte cewki, położone blisko siebie i mające wspólną oś symetrii. W cewce 1, dołączonej do zewnętrznego źródła, płynie stały prąd o natężeniu I_1 , który wytwarza pole magnetyczne, przedstawione na rysunku za pomocą linii pola $\vec{B}_1$. Cewka 2 jest dołączona do czułego miernika, ale nie jest zasilana ze źródła. Strumień magnetyczny Φ_{21} (czyli strumień przechodzący przez cewkę 2, ale związany z prądem w cewce 1) sprzęga się z N_2 zwojami cewki 2.

Definiujemy indukcyjność wzajemną M_{21} cewki 2 względem cewki 1 za pomocą równania:

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}, \quad (31.62)$$

które ma taką samą postać, jak równanie (31.30) ($L = N\Phi/I$), będące definicją indukcyjności. Równanie (31.62) może być zapisane jako:

$$M_{21} I_1 = N_2 \Phi_{21}.$$

Jeżeli teraz w jakiś sposób spowodujemy, że natężenie prądu I_1 będzie się zmieniać w czasie, to:

$$M_{21} \frac{dI_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}.$$

Prawa strona tego równania, zgodnie z prawem Faradaya, jest równa wartości bezwzględnej SEM $\mathcal{E}_2$, która pojawia się w cewce 2, w wyniku zmiany natężenia prądu w cewce 1. Zatem przy uwzględnieniu znaku minus, wskazującego

kierunek SEM, otrzymujemy równanie:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad (31.63)$$

które można porównać z równaniem (31.37), opisującym samoindukcję ($\mathcal{E} = -LdI/dt$).

Zamieńmy teraz rolami cewki 1 i 2, jak na rysunku 31.22b. Innymi słowy, dołączamy cewkę 2 do źródła zewnętrznego, a prąd o natężeniu I_2 , płynący w tej cewce, wytwarza strumień magnetyczny Φ_{12} , sprzężony z cewką 1. Jeżeli natężenie prądu I_2 będzie się zmieniać w czasie, to rozumując jak poprzednio, otrzymamy:

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (31.64)$$

Widzimy więc, że SEM indukowana w jednej z cewek jest proporcjonalna do szybkości zmian natężenia prądu w drugiej cewce. Mogłoby się wydawać, że stałe proporcjonalności M_{21} i M_{12} są różne. Przyjmujemy jednak bez dowodu, że są one w istocie takie same, więc wskaźniki nie będą już potrzebne. (Ten wniosek jest prawdziwy, ale wcale nie jest oczywisty). Mamy więc:

$$M_{21} = M_{12} = M, \quad (31.65)$$

a równania (31.63) i (31.64) możemy napisać jako:

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (31.66)$$

oraz

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}. \quad (31.67)$$

Indukcja jest więc rzeczywiście wzajemna. Jednostką M (podobnie jak L) w układzie SI jest henr.

Przykład 31.9

Na rysunku 31.23 przedstawiono dwie okrągłe ciasno nawinięte cewki. Mniejsza cewka (o promieniu R_2 i o N_2 zwojach) umieszczona jest współosiowo i w jednej płaszczyźnie z większą cewką (o promieniu R_1 i o N_1 zwojach).

a) Wyprowadź wzór, opisujący indukcyjność wzajemną M tego układu cewek przy założeniu, że $R_1 \gg R_2$.

ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Indukcyjność wzajemna M tego układu cewek jest równa stosunkowi strumienia sprzężonego ($N\Phi$) w jednej z cewek do natężenia prądu I w drugiej cewce, wytwarzającego ten strumień. Powinniśmy zatem założyć, że w cewkach płyną prądy, a następnie obliczyć strumień sprzężony w jednej z cewek.

Pole magnetyczne, wytworzone przez mniejszą cewkę, a obejmujące większą cewkę jest niejednorodne — nie ma stałej wielkości ani kierunku. Tak więc strumień przenikający przez większą cewkę, a wytworzony przez mniejszą cewkę jest niejednorodny i trudny do obliczenia. Natomiast mniejsza cewka jest dostatecznie mała, aby przyjąć, że przenikające przez nią pole magnetyczne wytworzone przez większą cewkę jest w przybliżeniu jednorodne. Zatem strumień przepływający przez mniejszą cewkę, a wytworzony przez większą cewkę jest również w przybliżeniu jednorodny. Stąd, aby wyznaczyć M , zakładamy, że w większej cewce płynie prąd o natężeniu I_1 i obliczamy strumień sprzężony $N_2\Phi_{21}$ w mniejszej cewce:

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}. \quad (31.68)$$

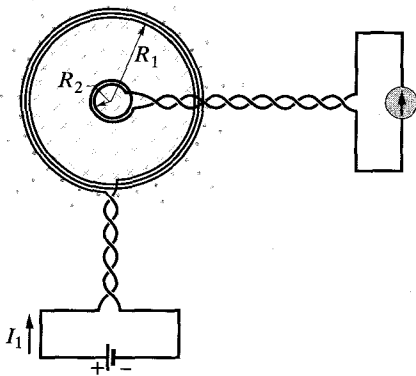
➡ 2. Z równania (31.4) wynika, że strumień Φ_{21} przepływający przez każdy zwój mniejszej cewki jest równy:

$$\Phi_{21} = B_1 S_2,$$

gdzie B_1 jest wartością indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez większą cewkę w miejscu, gdzie znajduje się mniejsza cewka, a $S_2 (= \pi R_2^2)$ jest polem powierzchni jednego zwoju. Tak więc strumień sprzężony w mniejszej cewce (o N_2 zwojach) jest równy:

$$N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 S_2. \quad (31.69)$$

➔ 3. Aby wyznaczyć B_1 w miejscu zajmowanym przez mniejszą cewkę, możemy zastosować równanie (31.28), podstawiając z równe zero, gdyż obie cewki znajdują się w jednej płaszczyźnie. Zgodnie z tym równaniem, każdy zwoj większej cewki wytwarza pole magnetyczne o indukcji $\mu_0 I_1 / 2R_1$ w miejscu, w którym znajduje się mniejsza cewka. Zatem wartość indukcji całkowitego pola magnetycznego wytworzonego w tym miejscu przez większą



Rys. 31.23. Przykład 31.9. Mała cewka jest umieszczona w środku dużej cewki. Możemy wyznaczyć indukcyjność wzajemną cewek, gdy założymy, że w dużej cewce płynie prąd o natężeniu I_1

cewkę (o N_1 zwojach) wynosi:

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}. \quad (31.70)$$

Podstawienie wyrażenia (31.70) w miejsce B_1 oraz πR_2^2 w miejsce S_2 w równaniu (31.69) daje:

$$N_2 \Phi_{21} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^2 I_1}{2R_1}.$$

Podstawiając ten wynik do równania (31.68), otrzymujemy więc:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (31.71)$$

b) Jaka jest wartość M dla $N_1 = N_2 = 1200$ zwojów, $R_2 = 1,1$ cm, a $R_1 = 15$ cm?

ROZWIĄZANIE:

Z równania (31.71) wynika, że:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(\pi)(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m})(1200)(1200)(0,011 \text{ m})^2}{(2)(0,15 \text{ m})} \\ &= 2,29 \cdot 10^{-3} \text{ H} \approx 2,3 \text{ mH}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Rozważmy teraz przypadek, w którym zamieniamy cewki rolami, tzn. zakładamy, że w mniejszej cewce płynie prąd o natężeniu I_2 i usiłujemy obliczyć M z równania (31.62) w postaci:

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}.$$

Obliczenie Φ_{12} , czyli niejednorodnego strumienia pola magnetycznego mniejszej cewki, przenikającego przez większą cewkę, nie jest rzeczą łatwą. Gdybyśmy wykonali obliczenia numeryczne za pomocą komputera, otrzymalibyśmy jednak, jak poprzednio, M równe 2,3 mH! Zapamiętaj jednak, że równość (31.65) ($M_{21} = M_{12} = M$) wcale nie jest tak łatwo wykazać.

Podsumowanie

Strumień magnetyczny Strumień magnetyczny Φ_B , przechodzący przez powierzchnię S w polu magnetycznym $\vec{B}$ jest zdefiniowany jako:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (31.3)$$

gdzie całka jest obliczana po powierzchni. Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest weber, przy czym $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$. Jeżeli $\vec{B}$ jest prostopadłe do powierzchni i jednorodne w obrębie tej powierzchni, to równanie (31.3) przyjmuje postać:

$$\Phi_B = BS \quad (\vec{B} \perp S, \vec{B} \text{ jednorodne}). \quad (31.4)$$

Prawo indukcji Faradaya Jeżeli strumień magnetyczny Φ_B , przechodzący przez powierzchnię ograniczoną zamkniętą przewodzącą pętlą, zmienia się w czasie, to w pętli pojawia się prąd oraz SEM. To zjawisko nazywamy *indukcją elektromagnetyczną*. Indukowana SEM wynosi:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{prawo Faradaya}). \quad (31.6)$$

Jeżeli zastąpimy pętlę ciasno nawiniętą cewką o N zwojach, to otrzymamy indukowaną SEM równą

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (31.7)$$

Reguła Lenza Prąd indukowany ma taki kierunek, że pole magnetyczne wytwarzane przez ten prąd przeciwstawia się zmianie strumienia magnetycznego, która indukuje prąd. Indukowana SEM ma taki sam kierunek, jak prąd indukowany.

SEM i indukowane pole elektryczne SEM jest indukowana przez zmienny strumień magnetyczny nawet wtedy, gdy ramka, wewnątrz której strumień się zmienia, jest hipotetyczną krzywą, a nie rzeczywistym przewodnikiem. Zmienny strumień magnetyczny indukuje pole elektryczne $\vec{E}$ w każdym punkcie krzywej, a indukowana SEM jest związana z wektorem $\vec{E}$ zależnością:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (31.21)$$

gdzie całkujemy wzdłuż zamkniętej krzywej. Korzystając z równania (31.21), możemy zapisać prawo Faradaya w najbardziej ogólnej postaci:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{prawo Faradaya}). \quad (31.22)$$

Istotą prawa Faradaya jest to, że *zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne $\vec{E}$* .

Cewki Cewka jest elementem, który może być wykorzystany do wytworzenia w pewnym obszarze pola magnetycznego o znanej indukcji. Jeżeli w każdym z N zwojów cewki płynie prąd o natężeniu I , to strumień magnetyczny sprzęga te zwoje. **Indukcyjność** L cewki jest zdefiniowana jako:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (\text{definicja indukcyjności}). \quad (31.30)$$

Jednostką indukcyjności w układzie SI jest **henr**, przy czym:

$$1 \text{ henr} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}. \quad (31.31)$$

Dla długiego solenoidu o polu powierzchni przekroju S i n zwojach na jednostkę długości, indukcyjność na jednostkę długości w pobliżu środka solenoidu wynosi:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \quad (\text{solenoid}). \quad (31.33)$$

Samoindukcja Jeżeli natężenie prądu I , płynącego przez cewkę zmienia się w czasie, to w cewce jest indukowana SEM. Ta SEM

samoindukcji jest równa:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{SEM samoindukcji}). \quad (31.37)$$

Kierunek $\mathcal{E}_L$ możemy wyznaczyć na podstawie reguły Lenza: SEM samoindukcji działa tak, aby przeciwstawić się zmianie, która ją wywołała.

Szeregowe obwody RL Jeżeli przyłożymy stałą SEM do obwodu o jednym oczku, zawierającego opór R i indukcyjność L , to natężenie prądu będzie rosło do wartości stacjonarnej $\mathcal{E}/R$ zgodnie z równaniem:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}) \quad (\text{wzrost natężenia prądu}). \quad (31.43)$$

Wielkość τ_L ($= L/R$) decyduje o szybkości narastania natężenia prądu i jest nazywana **indukcyjną stałą czasową**. Gdy odłączymy źródło stałej SEM, natężenie prądu będzie zanikać, począwszy od wartości I_0 , zgodnie z równaniem:

$$I = I_0 e^{-t/\tau_L} \quad (\text{zmniejszanie się natężenia prądu}). \quad (31.47)$$

Energia magnetyczna Jeżeli w cewce o indukcyjności L płynie prąd o natężeniu I , to w polu magnetycznym cewki zmagazynowana jest energia:

$$E_B = \frac{1}{2} L I^2 \quad (\text{energia magnetyczna}). \quad (31.51)$$

Jeżeli B oznacza wartość indukcji magnetycznej w dowolnym punkcie (wewnątrz cewki lub gdzie indziej), to gęstość zmagazynowanej energii jest w tym punkcie równa:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{gęstość energii magnetycznej}). \quad (31.56)$$

Indukcja wzajemna Jeżeli dwie cewki (oznaczone jako 1 i 2) znajdują się blisko siebie, to prąd o zmiennym natężeniu w jednej z cewek indukuje SEM w drugiej cewce. Indukcja wzajemna jest opisana równaniami:

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}. \quad (31.66)$$

oraz

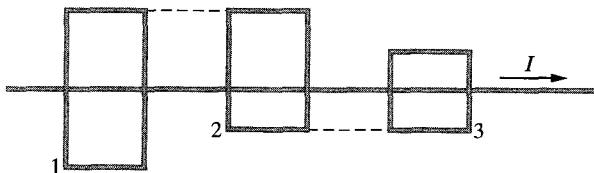
$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}, \quad (31.67)$$

gdzie M (mierzone w henrach) jest indukcyjnością wzajemną układu cewek.

Pytania

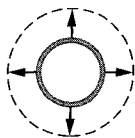
1. Na rysunku 31.24 przedstawiono długi prosty przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I . Przewód biegnie obok trzech prostokątnych ramek o długościach boków L , $1,5L$ i $2L$, nie stykając się z nimi. Ramki są umieszczone w takiej odległości, aby nawzajem

na siebie nie oddziaływały. Ramki 1 i 3 są położone symetrycznie w stosunku do długiego przewodu. Uszereguj ramki pod względem indukowanego w nich natężenia prądu, zaczynając od największej wartości, jeżeli natężenie prądu I : a) jest stałe, b) rośnie.



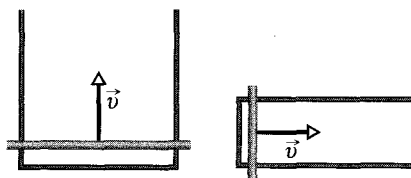
Rys. 31.24. Pytanie 1

2. Jeżeli kołowy przewód na rysunku 31.25, znajdujący się w jednorodnym polu magnetycznym, zwiększy swoją średnicę na skutek rozszerzalności cieplnej, to prąd indukowany popłynie w nim w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Czy pole magnetyczne jest skierowane za, czy przed płaszczyznę rysunku?



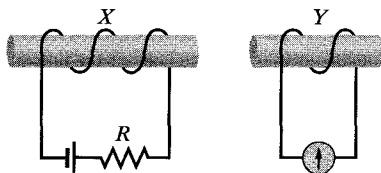
Rys. 31.25. Pytanie 2

3. Na rysunku 31.26 przedstawiono dwa obwody, w których przewodzący pręt jest przesuwany wzdłuż przewodu w kształcie litery U z taką samą prędkością v , w takim samym jednorodnym polu magnetycznym. Równoległe odcinki przewodu są od siebie oddalone o $2L$ w obwodzie 1 i o L w obwodzie 2. Prąd indukowany w obwodzie 1 płynie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. a) Czy pole magnetyczne jest skierowane za, czy przed płaszczyznę rysunku? b) Czy prąd indukowany w obwodzie 2 płynie zgodnie, czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara? c) Czy SEM indukowana w obwodzie 1 jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak w obwodzie 2?



Rys. 31.26. Pytanie 3

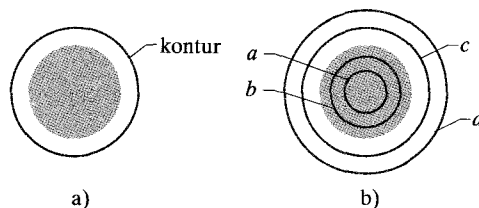
4. Na rysunku 31.27 przedstawiono dwie cewki nawinięte wokół nieprzewodzących prętów. Cewka X jest dołączona do źródła i opornika o regulowanym oporze. Jaki jest kierunek prądu indukowanego, płynącego przez amperomierz dołączony do cewki Y, gdy: a) cewka Y jest przesuwana w kierunku cewki X, b) natężenie prądu w cewce X jest zmniejszane, a względne położenia obydwu cewek pozostają bez zmian?



Rys. 31.27. Pytanie 4

5. Na rysunku 31.28a przedstawiono obszar w kształcie koła, w którym jednorodne pole magnetyczne o wartości indukcji rosnącej w czasie jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Przedstawiono również kołowy kontur, wzdłuż którego mamy obliczyć wartość całki $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$. W tabeli podano (dla trzech różnych przypadków) początkową wartość indukcji magnetycznej, przyrost tej wartości oraz czas, w którym ten przyrost nastąpił. U szereguj przypadki pod względem wartości natężenia pola elektrycznego, indukowanego wzdłuż konturu, zaczynając od największej wartości.

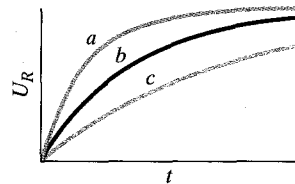
Przypadek	Indukcja początkowa	Przyrost	Czas
a	B_1	ΔB_1	Δt_1
b	$2B_1$	$\Delta B_1/2$	Δt_1
c	$B_1/4$	ΔB_1	$\Delta t_1/2$



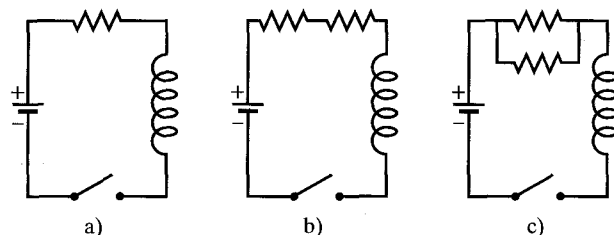
Rys. 31.28. Pytania 5 i 6

6. Na rysunku 31.28b przedstawiono obszar w kształcie koła, w którym jednorodne pole magnetyczne o wartości indukcji malejącej w czasie jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Przedstawiono również cztery kontury w kształcie okręgów. U szereguj kontury całkowania pod względem wartości $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, zaczynając od największej wartości.

7. Na rysunku 31.29 przedstawiono zależność od czasu różnicy potencjałów U_R na oporniku w trzech obwodach, połączonych jak na rysunku 31.18. Obwody zawierają taki sam opór R i SEM $\mathcal{E}$, ale różnią się wartością indukcyjności L . U szereguj obwody pod względem wartości L , zaczynając od największej.



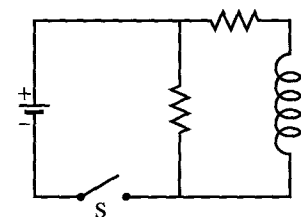
Rys. 31.29. Pytanie 7



Rys. 31.30. Pytanie 8

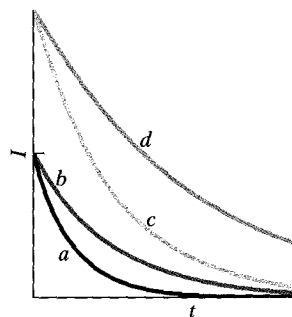
8. Na rysunku 31.30 przedstawiono trzy obwody, składające się z jednakowych źródeł, cewek i oporników. Uszereguj obwody pod względem czasu, jaki musi upłynąć od momentu zamknięcia klucza do momentu, gdy natężenie prądu osiągnie 50% wartości w stanie ustalonym, zaczynając od najdłuższego czasu.

9. Na rysunku 31.31 przedstawiono obwód, zawierający dwa takie same oporniki i cewkę idealną. Czy natężenie prądu płynącego przez środkowy opornik będzie mniejsze, większe, czy takie samo, jak w drugim oporniku: a) tuż po zamknięciu klucza S, b) po upływie długiego czasu od zamknięcia klucza S, c) tuż po ponownym otwarciu klucza S, d) po upływie długiego czasu od ponownego otwarcia klucza S?



Rys. 31.31. Pytanie 9

10. Klucz w obwodzie na rysunku 31.17 został połączony z punktem a, a następnie, po dłuższym czasie, został przełączony do punktu b. Natężenie prądu płynącego w cewce w wyniku tego przełączenia jest przedstawione na rysunku 31.32, dla czterech zestawów wartości oporu R i indukcyjności L : 1) R_0 i L_0 , 2) $2R_0$ i L_0 , 3) R_0 i $2L_0$, 4) $2R_0$ i $2L_0$. Przyporządkuj zestawy danych poszczególnym wykresom.



Rys. 31.32. Pytanie 10

Zadania

Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

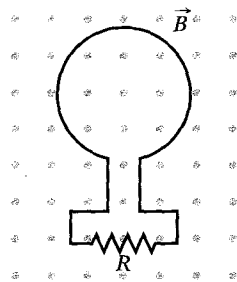
Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

31.4 Reguła Lenza

1. Antena telewizyjna, pracująca w zakresie UHF ma kształt ramki o średnicy 11 cm. Pole magnetyczne sygnału telewizyjnego jest skierowane prostopadle do płaszczyzny ramki, a w pewnej chwili wartość indukcji magnetycznej zmienia się z szybkością 0,16 T/s. Pole magnetyczne jest jednorodne. Jaka SEM jest indukowana w antenie?

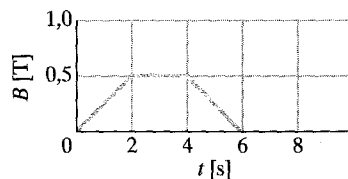
2. Mała pętla o polu powierzchni S znajduje się wewnątrz długiego solenoidu o n zwojach na jednostkę długości, w którym płynie prąd o natężeniu I . Oś symetrii pętli pokrywa się z osią solenoidu. Oblicz SEM indukowaną w pętli, jeżeli $I = I_0 \sin \omega t$.

3. Strumień magnetyczny, przenikający przez pętlę, pokazaną na rysunku 31.33 rośnie zgodnie z zależnością $\Phi_B = 6t^2 + 7t$, gdzie Φ_B jest wyrażone w miliweberach, a t w sekundach. a) Jaka jest wartość SEM indukowanej w pętli, gdy $t = 2$ s? b) W jakim kierunku płynie prąd przez opornik R?



Rys. 31.33. Zadania 3 i 11

4. Pojedyncza ramka z drutu, o promieniu 12 cm i oporze 8,5 Ω , znajduje się w polu magnetycznym, o indukcji zmieniającej się w czasie w sposób pokazany na rysunku 31.34. Oblicz SEM w ramce jako funkcję czasu. Weź pod uwagę przedziały czasu: a) od $t = 0$ do $t = 2$ s, b) od $t = 2$ s do $t = 4$ s, (c) od $t = 4$ s do $t = 6$ s. Jednorodne pole magnetyczne jest prostopadłe do płaszczyzny ramki.



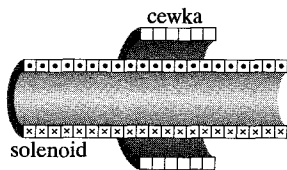
Rys. 31.34. Zadanie 4

5. Jednorodne pole magnetyczne jest prostopadłe do płaszczyzny kołowej ramki o średnicy 10 cm, wykonanej z drutu miedzianego o średnicy 2,5 mm. a) Oblicz opór drutu (patrz tabela 27.1.) b) Z jaką szybkością pole magnetyczne powinno się zmieniać w czasie, aby w ramce pojawił się prąd indukowany o natężeniu 10 A?

6. Natężenie prądu w solenoidzie z przykładu 31.1 zmienia się nie tak, jak w tym przykładzie, ale zgodnie z zależnością $I = 3t + 1t^2$, gdzie I jest wyrażone w amperach, a t w sekundach. a) Wykreśl SEM, indukowaną w cewce jako funkcję czasu od $t = 0$ do $t = 4$ s. b) Opór cewki wynosi 0,15 Ω . Ile wynosi natężenie prądu w cewce w chwili $t = 2$ s?

7. Na rysunku 31.35 cewka o 120 zwojach, promieniu 1,8 cm i oporze 5,3 Ω jest umieszczona na zewnątrz solenoidu z przykładu 31.1. Jakie będzie natężenie prądu indukowanego w cewce, jeżeli

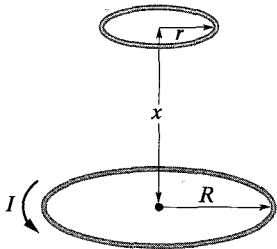
natężenie prądu w solenoidzie będzie się zmieniać, jak w tym przykładzie?



Rys. 31.35. Zadanie 7

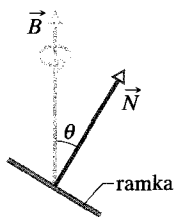
8. Elastyczny przewód został rozciągnięty i tworzy kołową ramkę o promieniu 12 cm. Płaszczyzna ramki jest prostopadła do jednorodnego pola magnetycznego o wartości indukcji 0,8 T. Po zwolnieniu naciągu promień ramki zaczyna się zmniejszać z chwilową prędkością 75 cm/s. Jaka SEM jest w tym momencie indukowana w ramce?

9. Na rysunku 31.36 przedstawiono dwie równoległe ramki o wspólnej osi. Mniejsza ramka (o promieniu r) znajduje się nad większą ramką (o promieniu R), tak że ich środki znajdują się w odległości $x \gg R$. Wskutek tego pole magnetyczne, wytworzone przez prąd o natężeniu I , płynący w większej ramce, jest niemal jednorodne, w obszarze zajmowanym przez mniejszą ramkę. Załóżmy, że x rośnie ze stałą prędkością $dx/dt = v$. a) Wyznacz strumień magnetyczny przenikający przez powierzchnię ograniczoną mniejszą ramką jako funkcję x . (Wskazówka: Patrz równanie (30.29)). W mniejszej ramce wyznacz: b) indukowaną SEM, c) kierunek prądu indukowanego.



Rys. 31.36. Zadanie 9

10. Kołowa ramka o średnicy 10 cm (widziana z boku na rysunku 31.37) jest umieszczona w taki sposób, że jej normalna $\vec{N}$ tworzy kąt $\theta = 30^\circ$ z kierunkiem jednorodnego pola magnetycznego o wartości indukcji 0,5 T. Ramka jest obracana w taki sposób, że $\vec{N}$ zakreśla powierzchnię stożka wokół kierunku pola, ze stałą szybkością 100 obrotów/min. Kąt θ pozostaje stały podczas tego ruchu. Jaka jest SEM indukowana w ramce?



Rys. 31.37. Zadanie 10

11. Załóż, że strumień magnetyczny przechodzący przez ramkę na rysunku 31.33 jest równy $\Phi_B(0)$ w chwili $t = 0$. Przyjmij następnie, że zarówno wartość, jak i kierunek wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$ zmienia się w bliżej nieokreślony, ale ciągły sposób, tak że w chwili t strumień jest równy $\Phi_B(t)$. a) Wykaż, że całkowity ładunek $q(t)$, przepływający przez opornik R w czasie t wynosi:

$$q(t) = \frac{1}{R} [\Phi_B(0) - \Phi_B(t)]$$

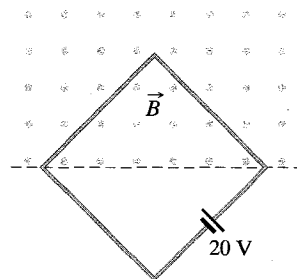
i nie zależy od sposobu, w jaki zmienia się $\vec{B}$. b) Jeżeli w szczególnym przypadku $\Phi_B(t) = \Phi_B(0)$, to $q(t) = 0$. Czy natężenie prądu indukowanego musi być równe zero w całym przedziale czasu od 0 do t ?

12. Mała kołowa ramka o polu powierzchni 2 cm^2 jest umieszczona w płaszczyźnie dużej kołowej ramki o promieniu 1 m, tak że ich środki się pokrywają. Natężenie prądu w dużej ramce jest zmieniane równomiernie od 200 A do -200 A (co oznacza także zmianę kierunku prądu) w ciągu 1 s, rozpoczynając od $t = 0$. a) Ile wynosi indukcja magnetyczna w środku małej ramki, pola wytworzonego przez prąd płynący w dużej ramce w chwili $t = 0$, $t = 0,5 \text{ s}$ i $t = 1 \text{ s}$? b) Jaka SEM jest indukowana w małej ramce w chwili $t = 0,5 \text{ s}$? (Wewnętrzna ramka jest mała, więc przyjmij, że pole $\vec{B}$, pochodzące od dużej ramki jest jednorodne w obszarze zajmowanym przez małą ramkę).

13. Sto zwojów izolowanego drutu miedzianego nawinięto na drewniany walcowy rdzeń o polu przekroju poprzecznego równym $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Końce uzwojenia są dołączone do opornika. Całkowity opór obwodu jest równy 13Ω . Ile ładunku przepłynie przez obwód, jeżeli indukcja przyłożonego z zewnątrz, jednorodnego, podłużnego pola magnetycznego w rdzeniu zmieni się od 1,6 T w jednym kierunku do 1,6 T w kierunku przeciwnym? (Wskazówka: Patrz zadanie 11).

14. W pewnym miejscu wektor indukcji magnetycznej pola ziemskiego ma wartość $B = 0,59$ gausów i jest nachylony w dół pod kątem 70° do poziomu. Płaska, ułożona poziomo cewka z drutu ma promień 10 cm, 1000 zwojów i całkowity opór 85Ω . Do cewki jest dołączony miernik o oporze 140Ω . Cewkę obrócono wokół średnicy o pół obrotu, tak że znów jest ułożona poziomo. Ile ładunku przepłynęło przez miernik podczas obrotu cewki? (Wskazówka: Patrz zadanie 11).

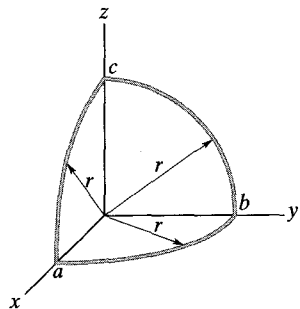
15. Ramka z drutu w kształcie kwadratu o boku 2 m jest ułożona prostopadłe do linii jednorodnego pola magnetycznego, przy czym połowa powierzchni ramki znajduje się w polu, jak pokazano na rysunku 31.38. W obwodzie ramki znajduje się źródło o SEM równej 20 V i o znikomym małym oporze wewnętrznym. Jeżeli wartość indukcji pola zmienia się w czasie zgodnie z zależnością $B = 0,042 - 0,87t$, gdzie B jest wyrażone w teslach, a t w sekundach, to: a) jaka jest całkowita SEM w obwodzie, b) w którym kierunku płynie prąd przez źródło?



Rys. 31.38. Zadanie 15

16. Kawałek drutu został wygięty w kształcie trzech łuków, każdy o promieniu $r = 10 \text{ cm}$, jak pokazano na rysunku 31.39. Każdy łuk jest ćwiartką okręgu, przy czym ab leży w płaszczyźnie xy , bc w płaszczyźnie yz , a ca w płaszczyźnie zx . a) Je-

śli kierunek wektora indukcji magnetycznej jednorodnego pola jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi x , to jaka jest wartość SEM, wytworzonej w obwodzie, gdy B rośnie z szybkością 3 mT/s? b) Jaki jest kierunek prądu w łuku bc ?

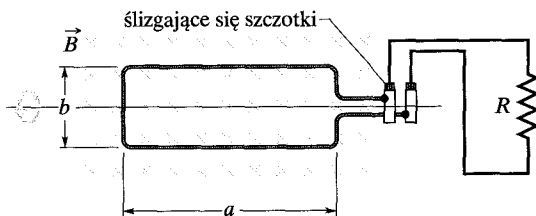


Rys. 31.39. Zadanie 16

17. Prostokątna cewka o N zwojach, długości a i szerokości b jest obracana z częstotliwością ν w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$, jak pokazano na rysunku 31.40. Cewka jest połączona z obracającymi się wraz z nią pierścieniami, po których ślizgają się metalowe szczotki w celu zapewnienia kontaktu elektrycznego. a) Wykaż, że SEM indukowana w cewce jest funkcją czasu postaci:

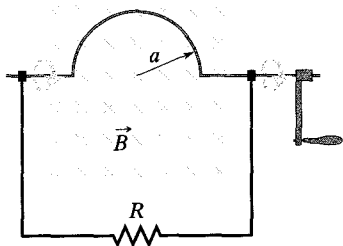
$$\mathcal{E} = 2\pi\nu NabB \sin(2\pi\nu t) = \mathcal{E}_0 \sin(2\pi\nu t).$$

Tak właśnie działają powszechnie używane prądnice prądu zmiennego. b) Zaprojektuj ramkę, która będzie wytwarzać SEM $\mathcal{E}_0 = 300$ V podczas wirowania z prędkością 50 obrotów/s w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 1,2 T.



Rys. 31.40. Zadanie 17

18. Sztynny przewód wygięty w kształcie półkoła jest obracany z częstotliwością ν w jednorodnym polu magnetycznym, jak pokazano na rysunku 31.41. Jaka jest: a) częstota, b) amplituda zmiennej SEM, indukowanej w obwodzie?

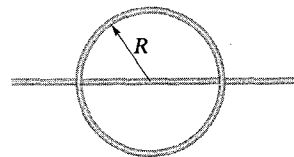


Rys. 31.41. Zadanie 18

19. Prądnica składa się ze 100 zwojów drutu, nawiniętych w kształcie prostokątnej ramki o bokach 50 cm i 30 cm, umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 3,5$ T.

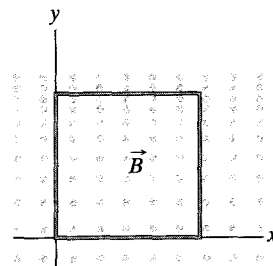
Jaka jest maksymalna wartość wytwarzanej SEM, gdy pętla wiruje z prędkością 1000 obrotów/min wokół osi prostopadłej do kierunku $\vec{B}$?

20. Na rysunku 31.42 przedstawiono zamkniętą przewodzącą ramkę z drutu, w kształcie okręgu o promieniu $R = 2$ m. Ramka ma opór 4Ω , a środek okręgu znajduje się w punkcie, przez który przechodzi długi prosty przewód. W chwili $t = 0$ prąd w przewodzie płynie w prawo, a jego natężenie jest równe $I = 5 \text{ A} - (2 \text{ A/s}^2)t^2$. (Prosty przewód jest izolowany, tak więc nie ma połączenia elektrycznego między nim a ramką). Jakie jest natężenie i kierunek prądu indukowanego w ramce dla $t > 0$?



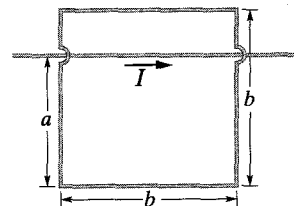
Rys. 31.42. Zadanie 20

21. Na rysunku 31.43 przedstawiono kwadratową przewodzącą ramkę, której boki mają długość 2 cm. Pole magnetyczne jest skierowane przed płaszczyznę rysunku; wartość jego indukcji jest dana wzorem $B = 4t^2$, gdzie B jest wyrażone w teslach, t w sekundach, a y w metrach. Wyznacz SEM w ramce dla $t = 2,5$ s i podaj jej kierunek.



Rys. 31.43. Zadanie 21

22. W układzie, pokazanym na rysunku 31.44, $a = 12$ cm, $b = 16$ cm. Natężenie prądu w długim prostym przewodzie jest dane zależnością $I = 4,5t^2 - 10t$, gdzie I jest wyrażone w amperach, a t w sekundach. a) Oblicz SEM w kwadratowej ramce dla $t = 3$ s. b) Jaki jest kierunek prądu indukowanego w ramce?

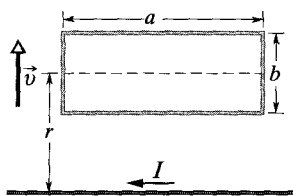


Rys. 31.44. Zadanie 22

23*. W dwóch długich równoległych przewodach miedzianych o średnicy 2,5 mm płyną w przeciwnych kierunkach prądy o natężeniu 10 A. a) Zakładając, że osie przewodów są oddalone o 20 mm, oblicz strumień magnetyczny na metr, istniejący w obszarze między tymi osiami. b) Jaka część strumienia znajduje się wewnątrz przewodów? c) Wykonaj polecenie z punktu (a) dla prądów płynących w tym samym kierunku.

24. Prostokątna przewodząca ramka o długości a , szerokości b i oporze R jest umieszczona w pobliżu nieskończenie długiego przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu I , jak pokazano na

rysunku 31.45. Odległość od przewodu do osi ramki jest równa r . Oblicz: a) wartość strumienia magnetycznego przechodzącego przez ramkę, b) natężenie prądu w ramce, gdy oddala się ona od długiego przewodu z prędkością v .



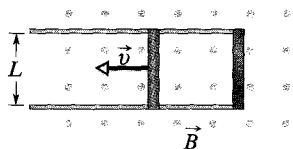
Rys. 31.45. Zadanie 24

31.5 Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

25. Odcinek drutu miedzianego o długości 50 cm i o średnicy 1 mm tworzy kołową ramkę, umieszczoną prostopadle do kierunku wektora indukcji, którego wartość rośnie ze stałą szybkością 10 mT/s. Z jaką szybkością wydziela się w ramce energia termiczna?

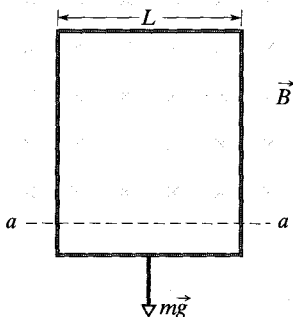
26. Antena w kształcie ramki o polu powierzchni S i oporze R jest ustawiona prostopadle do kierunku wektora indukcji jednorodnego pola magnetycznego $\vec{B}$. Wartość indukcji maleje liniowo do zera w przedziale czasu Δt . Wyprowadź wzór, określający całkowitą energię, rozpraszaną w ramce.

27. Metalowy pręt jest przesuwany z prędkością $\vec{v}$ po dwóch metalowych szynach, połączonych na jednym końcu metalowym paskiem, jak pokazano na rysunku 31.46. Pole magnetyczne o indukcji $B = 0,35$ T jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. a) Jaka SEM jest indukowana w obwodzie, jeśli szyny są oddalone o 25 cm, a prędkość pręta jest równa 55 cm/s? b) Ile wynosi natężenie prądu płynącego w pręcie, jeśli ma on opór 18 Ω , a opór szyn i paska jest znikomo mały? c) Z jaką szybkością energia jest przekształcana w energię termiczną?



Rys. 31.46. Zadania 27 i 29

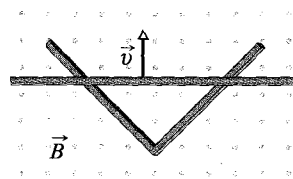
28. Na rysunku 31.47 długa prostokątna przewodząca ramka o szerokości L , oporze R i masie m jest początkowo zawieszona w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$, skierowanym poziomo za płaszczyznę rysunku. Pole istnieje tylko powyżej linii aa . Gdy ramka zaczyna spadać, porusza się ruchem przyspieszonym, aż do osiągnięcia pewnej prędkości granicznej v_g . Pomijając opór powietrza, oblicz prędkość graniczną.



Rys. 31.47. Zadanie 28

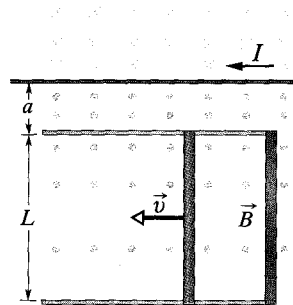
29. Przewodzący pręt, pokazany na rysunku 31.46, ma długość L i jest przesuwany bez tarcia ze stałą prędkością $\vec{v}$ po poziomych przewodzących szynach. Szyny połączone są na jednym końcu metalowym paskiem. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji $\vec{B}$, skierowane przed płaszczyznę rysunku, przenika przez obszar, w którym porusza się pręt. Przyjmij, że $L = 10$ cm, $v = 5$ m/s, a $B = 1,2$ T. a) Jaka jest wartość i kierunek SEM, indukowanej w pręcie? b) Ile wynosi natężenie prądu, płynącego w obwodzie? Przyjmij, że opór pręta jest równy 0,4 Ω , a opór szyn i paska metalowego jest znikomo mały. c) Z jaką szybkością wydziela się energia termiczna w pręcie? d) Jaka siła musi być przyłożona z zewnątrz do pręta, aby jego ruch odbywał się ze stałą prędkością? e) Z jaką szybkością siła zewnętrzna wykonuje pracę nad prętem? Porównaj ten wynik z wynikiem, otrzymanym w punkcie (c).

30. Dwie proste przewodzące szyny tworzą kąt prosty w punkcie, w którym ich końce się łączą. Przewodzący pręt, połączony elektrycznie z szynami rozpoczyna ruch w wierzchołku kąta w chwili $t = 0$ i porusza się ze stałą prędkością 5,2 m/s, jak pokazano na rysunku 31.48. Pole magnetyczne o indukcji $B = 0,35$ T jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Oblicz: a) strumień magnetyczny, przechodzący przez trójkąt, utworzony z szyn i pręta w chwili $t = 3$ s, b) SEM wzdłuż obwodu trójkąta w tej samej chwili. c) Jeżeli zapiszemy SEM jako $\mathcal{E} = at^n$, gdzie a i n są stałymi, to jaka jest wartość n ?



Rys. 31.48. Zadanie 30

31. Na rysunku 31.49 przedstawiono pręt długości L , poruszany ze stałą prędkością v wzdłuż poziomych przewodzących szyn. Pole magnetyczne, w którym porusza się pręt, nie jest jednorodne, ale jest wytworzone przez prąd o natężeniu I , płynący w długim przewodzie równoległym do szyn. Przyjmij, że $v = 5$ m/s, $a = 10$ mm, $L = 10$ cm, a $I = 100$ A. a) Oblicz SEM indukowaną w pręcie. b) Ile wynosi natężenie prądu płynącego w przewodzącej ramce? Przyjmij, że opór pręta jest równy 0,4 Ω , a opór szyn i paska metalowego łączącego je po prawej stronie jest znikomo mały. c) Z jaką szybkością energia termiczna jest wydzielana w pręcie? d) Jaka siła zewnętrzna musi działać na pręt, aby jego ruch zachodził ze stałą prędkością? e) Z jaką szybkością siła zewnętrzna wykonuje pracę nad prętem? Porównaj ten wynik z wynikiem otrzymanym w punkcie (c).

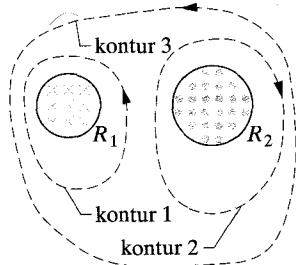


Rys. 31.49. Zadanie 31

31.6 Indukowane pola elektryczne

32. Na rysunku 31.50 przedstawiono dwa obszary R_1 i R_2 w kształcie kół o promieniach $r_1 = 20$ cm i $r_2 = 30$ cm. W obszarze R_1

istnieje jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B_1 = 50$ mT, skierowane za płaszczyznę rysunku, a w obszarze R_2 — jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B_2 = 75$ mT skierowane przed płaszczyznę rysunku (pomiń jakiegokolwiek pola rozproszone). Wartości indukcji obydwu pól maleją z szybkością 8,5 mT/s. Oblicz całkę $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ wzdłuż każdego z trzech konturów, zaznaczonych linią przerywaną.

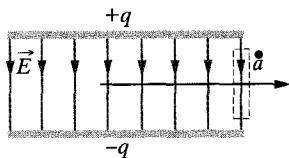


Rys. 31.50. Zadanie 32

33. Długi solenoid ma średnicę 12 cm. Prąd o natężeniu I , płynący w uzwojeniu solenoidu wytwarza w jego wnętrzu jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B = 30$ mT. Zmniejszanie natężenia prądu I powoduje zmniejszanie indukcji magnetycznej z szybkością 6,5 mT/s. Oblicz wartość natężenia indukowanego pola elektrycznego w odległości: a) 2,2 cm, b) 8,2 cm od osi solenoidu.

34. Na początku 1981 roku, naukowcy z Francis Bitter National Magnet Laboratory w Massachusetts Institute of Technology uruchomili walcowy magnes o średnicy 3,3 cm, który wytwarzał pole o indukcji 30 T. Było to wtedy najsilniejsze na świecie stałe pole magnetyczne. Wartość indukcji pola mogła być zmieniana sinusoidalnie w zakresie od 29,6 T do 30 T z częstotliwością 15 Hz. Jeżeli pole zmienia się w taki sposób, to jaka jest maksymalna wartość natężenia indukowanego pola elektrycznego, w odległości 1,6 cm od osi magnesu? (Wskazówka: Patrz przykład 31.4).

35. Wykaż, że natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w naładowanym kondensatorze płaskim nie może nagle spaść do zera (na przykład w punkcie a jak mógłby na to wskazywać rysunek 31.51), gdy przesuwamy się prostopadle do kierunku natężenia pola, np. wzdłuż poziomej strzałki na rysunku. W rzeczywistych kondensatorach zawsze występują pola rozproszone, co oznacza, że wartość wektora $\vec{E}$ zmierza do zera stopniowo i w sposób ciągły. (Patrz zadanie 33 w rozdziale 30). (Wskazówka: Zastosuj prawo Faradaya do prostokątnego konturu, zaznaczonego na rysunku linią przerywaną).



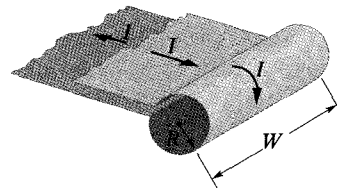
Rys. 31.51. Zadanie 35

31.7 Cewki i indukcyjność

36. Okrągła cewka o promieniu 10 cm składa się z 30 ciasno nawiniętych zwojów. Zewnętrzne pole magnetyczne o wartości indukcji 2,6 mT jest skierowane prostopadle do płaszczyzny cewki. a) Jaki strumień magnetyczny przenika przez zwoje cewki, jeżeli nie płynie w niej prąd? b) Gdy w cewce płynie w pewnym kierunku prąd o natężeniu 3,8 A, wówczas wypadkowy strumień, przenikający przez cewkę jest równy zeru. Ile wynosi indukcyjność cewki?

37. Indukcyjność ciasno nawiniętej cewki o 400 zwojach wynosi 8 mH. Oblicz strumień magnetyczny, przenikający przez cewkę, jeżeli natężenie prądu jest równe 5 mA.

38. Pasek miedziany o szerokości W jest wygięty w taki sposób, że tworzy rurkę o promieniu R oraz dwie płaskie równoległe części, jak pokazano na rysunku 31.52. W pasku płynie prąd o natężeniu I , rozłożony równomiernie w całej szerokości. W ten sposób tworzy się cewka o jednym zwoju. a) Wyprowadź wzór określający wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w części walcowej (z dala od krawędzi). (Wskazówka: Przyjmij, że pole magnetyczne na zewnątrz tej cewki o jednym zwoju jest znikomo małe). b) Oblicz indukcyjność tej cewki o jednym zwoju, pomijając dwie płaskie części.



Rys. 31.52. Zadanie 38

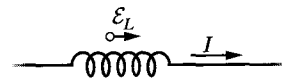
39. W dwóch długich równoległych przewodach płyną w przeciwnych kierunkach prądy o takich samych natężeniach. Każdy z przewodów ma promień a , a ich środki znajdują się w odległości d od siebie. Wykaż, że przy zaniedbywalnie małym strumieniu wewnątrz przewodów, indukcyjność takiej pary przewodów o długości l jest równa:

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

(Wskazówka: Oblicz strumień, przechodzący przez prostokąt, którego przeciwległymi bokami są odcinki przewodów).

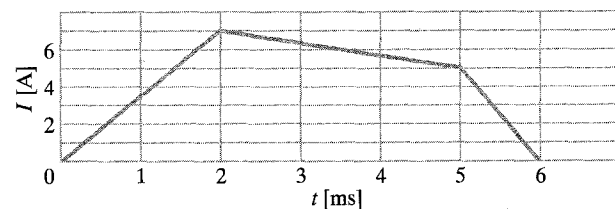
31.8 Samoindukcja

40. W pewnej chwili natężenie prądu i SEM samoindukcji są skierowane jak pokazano na rysunku 31.53. a) Czy natężenie prądu rośnie, czy maleje? b) Indukowana SEM wynosi 17 V, a szybkość zmian natężenia prądu jest równa 25 kA/s. Oblicz indukcyjność cewki.



Rys. 31.53. Zadanie 40

41. W cewce o indukcyjności 12 H płynie prąd stały o natężeniu 2 A. W jaki sposób można wytworzyć w cewce indukowaną SEM o wartości 60 V?



Rys. 31.54. Zadanie 42

42. Prąd o natężeniu I , płynący w cewce o indukcyjności $4,6 \text{ H}$ zmienia się w czasie, w sposób pokazany na rysunku 31.54. Cewka ma opór 12Ω . Oblicz wartość indukowanej SEM w przedziałach czasu: a) od $t = 0$ do $t = 2 \text{ ms}$, b) od $t = 2 \text{ ms}$ do $t = 5 \text{ ms}$, c) od $t = 5 \text{ ms}$ do $t = 6 \text{ ms}$. (Nie bierz pod uwagę zmian natężenia na końcach przedziałów).

43. Połączenie szeregowo cewek. Dwie cewki o indukcyjnościach L_1 i L_2 są połączone szeregowo i znajdują się w dużej odległości od siebie. a) Wykaż, że indukcyjność równoważna jest równa:

$$L_{\text{rw}} = L_1 + L_2.$$

(Wskazówka: Przypomnij sobie wyprowadzenie wzorów dla połączenia szeregowego oporników i kondensatorów. Który przypadek odpowiada omawianemu tutaj?) b) Dlaczego odległość między cewkami musi być duża, aby ta zależność była prawdziwa? c) Jak można uogólnić wzór z punktu (a) na przypadek N cewek, połączonych szeregowo?

44. Połączenie równoległe cewek. Dwie cewki o indukcyjnościach L_1 i L_2 są połączone równoległe i znajdują się w dużej odległości od siebie. a) Wykaż, że indukcyjność równoważna jest równa:

$$1/L_{\text{rw}} = 1/L_1 + 1/L_2.$$

(Wskazówka: Przypomnij sobie wyprowadzenie wzorów dla połączenia równoległego oporników i kondensatorów. Który przypadek odpowiada omawianemu tutaj?) b) Dlaczego odległość między cewkami musi być duża, aby ta zależność była prawdziwa? c) Jak można uogólnić wzór z punktu (a) na przypadek N cewek, połączonych równoległe?

31.9 Obwody RL

45. Jak długo (w jednostkach τ_L) musimy czekać, aby natężenie prądu w obwodzie RL różniło się o 0,1% od wartości w stanie ustalonym?

46. W ciągu 5 s natężenie prądu w obwodzie RL wzrasta do jednej trzeciej wartości w stanie ustalonym. Wyznacz indukcyjną stałą czasową.

47. Natężenie prądu w obwodzie RL zmniejsza się od 1 A do 10 mA w ciągu pierwszej sekundy po odłączeniu źródła od obwodu. Oblicz opór R w obwodzie, jeśli L jest równe 10 H.

48. Przeanalizuj obwód RL, przedstawiony na rysunku 31.17. Używając SEM źródła $\mathcal{E}$ jako jednostki, oblicz: a) SEM samoindukcji $\mathcal{E}_L$ tuż po połączeniu klucza z punktem a , b) SEM $\mathcal{E}_L$, gdy $t = 2\tau_L$. c) Po jakim czasie (wyrażonym w jednostkach τ_L) $\mathcal{E}_L$ będzie równe dokładnie połowie SEM źródła $\mathcal{E}$?

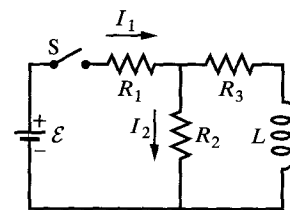
49. Solenoid o indukcyjności $6,3 \mu\text{H}$ jest połączony szeregowo z opornikiem $1,2 \text{ k}\Omega$. a) Jeżeli dołączymy do obwodu źródło o SEM 14 V, to po jakim czasie natężenie prądu w oporniku osiągnie 80% wartości końcowej? b) Jakie jest natężenie prądu w oporniku dla $t = \tau_L$?

50. Wyobraź sobie, że SEM źródła w obwodzie na rysunku 31.18 zmienia się w czasie w taki sposób, że natężenie prądu jest dane zależnością $I(t) = 3 + 5t$, gdzie I jest wyrażone w amperach, a t w sekundach. Przyjmij $R = 4 \Omega$, $L = 6 \text{ H}$ i wyprowadź wzór, określający SEM źródła jako funkcję czasu. (Wskazówka: Zastosuj drugie prawo Kirchhoffa).

51. W chwili $t = 0$ do cewki o indukcyjności $L = 50 \text{ mH}$ i oporze $R = 180 \Omega$ przyłożono nagle różnicę potencjałów 45 V. Z jaką szybkością rośnie natężenie prądu w chwili $t = 1,2 \text{ ms}$?

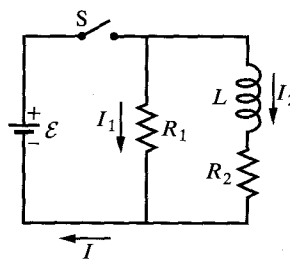
52. Drewniany rdzeń o przekroju kwadratowym tworzy pierścien o wewnętrznej średnicy 10 cm i zewnętrznej średnicy 12 cm. Na takim rdzeniu nawinięto jedną warstwę drutu o średnicy 1 mm i oporze na jednostkę długości $0,02 \Omega/\text{m}$. Dla otrzymanego w ten sposób „toroidu” oblicz: a) indukcyjność, b) indukcyjną stałą czasową. Pomiń grubość izolacji drutu.

53. Na rysunku 31.55 $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, a $L = 2 \text{ H}$. Wyznacz wartości I_1 i I_2 : a) bezpośrednio po zamknięciu klucza S , b) po długim czasie, c) bezpośrednio po ponownym otwarciu klucza, d) po upływie długiego czasu od ponownego otwarcia klucza.



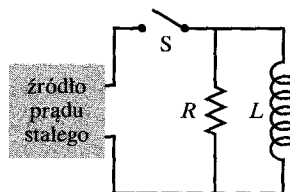
Rys. 31.55. Zadanie 53

54. W obwodzie na rysunku 31.56 $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, a $L = 5 \text{ H}$. Dla dwóch oddzielnych przypadków (I) tuż po zamknięciu klucza i (II) po długim czasie od zamknięcia klucza, oblicz: a) natężenie prądu I_1 w oporniku R_1 , b) natężenie prądu I_2 w oporniku R_2 , c) natężenie prądu I , płynącego przez klucz, d) różnicę potencjałów na oporniku R_2 , e) różnicę potencjałów na cewce L , f) szybkość zmian dI_2/dt .



Rys. 31.56. Zadanie 54

55*. W obwodzie, przedstawionym na rysunku 31.57 klucz S został zamknięty w chwili $t = 0$. Od tego czasu źródło prądu stałego, zmieniając swoją SEM, utrzymuje stałe natężenie prądu I przepływającego przez zamknięty



Rys. 31.57. Zadanie 55

klucz. a) Wyprowadź wzór, określający natężenie prądu w cewce jako funkcję czasu. b) Wykaż, że w chwili $t = (L/R) \ln 2$ natężenie prądu w oporniku jest równe natężeniu prądu w cewce.

31.10. Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

56. Przeanalizuj obwód, przedstawiony na rysunku 31.18. Po jakim czasie (wyrażonym w jednostkach indukcyjnej stałej czasowej) od dołączenia źródła, energia zgromadzona w polu magnetycznym cewki będzie równa połowie wartości w stanie ustalonym?

57. Przypuśćmy, że indukcyjna stała czasowa dla obwodu, przedstawionego na rysunku 31.18, wynosi 37 ms, a natężenie prądu w obwodzie jest równe zeru w chwili $t = 0$. Po jakim czasie szybkość, z jaką energia jest zamieniana na energię termiczną w oporniku, będzie równa szybkości, z jaką energia jest gromadzona w cewce?

58. Cewka o indukcyjności 2 H i oporze 10 Ω została nagle dołączona do źródła o SEM $\mathcal{E} = 100$ V i oporze wewnętrznym równym zeru. Dla $t = 0,1$ s, licząc od momentu dołączenia źródła, oblicz szybkość, z jaką: a) energia jest gromadzona w polu magnetycznym, b) energia termiczna jest wydzielana w oporniku, c) energia jest dostarczana przez źródło.

59. Cewka jest połączona szeregowo z opornikiem 10 k Ω . Po dołączeniu baterii o SEM 50 V do tych dwóch elementów, natężenie prądu osiąga wartość 2 mA po upływie 5 ms. a) Oblicz indukcyjność cewki. b) Oblicz energię zmagazynowaną w cewce w tej chwili.

60. W obwodzie, przedstawionym na rysunku 31.18, przyjmij, że $\mathcal{E} = 10$ V, $R = 6,7$ Ω , a $L = 5,5$ H. Źródło zostaje dołączone w chwili $t = 0$. a) Ile energii dostarcza źródło podczas pierwszych 2 s? b) Jak część tej energii jest zmagazynowana w polu magnetycznym cewki? c) Jaka część tej energii jest zamieniana na energię termiczną w oporniku?

61. Udowodnij, że po przełączeniu klucza S na rysunku 31.17, z punktu *a* do punktu *b*, cała energia zmagazynowana w cewce zostanie w końcu wydzielona w oporniku, w postaci energii termicznej.

31.11 Gęstość energii pola magnetycznego

62. Toroidalna cewka o indukcyjności 90 mH obejmuje obszar o objętości 0,02 m³. Ile wynosi natężenie prądu płynącego w cewce, jeżeli średnia gęstość energii wewnątrz toroidu jest równa 70 J/m³?

63. Solenoid długości 85 cm ma pole przekroju poprzecznego równe 17 cm². Solenoid składa się z 950 zwojów, w których płynie prąd o natężeniu 6,6 A. a) Oblicz gęstość energii pola magnetycznego wewnątrz solenoidu. b) Wyznacz całkowitą energię, zmagazynowaną w polu magnetycznym (pomiń straty energii na końcach solenoidu).

64. Indukcja magnetyczna w przestrzeni międzygwiazdnej naszej galaktyki ma wartość około 10^{-10} T. Oblicz energię zmagazynowaną w tym polu, w sześcianie o krawędzi 10 lat świetlnych. (Dla porównania zauważ, że odległość do najbliższej gwiazdy jest równa 4,3 lat świetlnych, a promień naszej galaktyki wynosi około $8 \cdot 10^4$ lat świetlnych).

65. Jaka musi być wartość natężenia jednorodnego pola elektrycznego, jeżeli ma ono mieć taką samą gęstość energii, jak pole magnetyczne o indukcji 0,5 T?

66. W kołowej ramce o promieniu 50 mm płynie prąd o natężeniu 100 A. a) Oblicz wartość indukcji magnetycznej pola w środku ramki. b) Oblicz gęstość energii w środku ramki.

67. W kawałku drutu miedzianego płynie prąd o natężeniu 10 A, rozłożony równomiernie w przekroju poprzecznym. Oblicz gęstość energii: a) pola magnetycznego, b) pola elektrycznego na powierzchni drutu. Średnica drutu jest równa 2,5 mm, a jego opór na jednostkę długości — 3,3 Ω /km.

31.12 Indukcja wzajemna

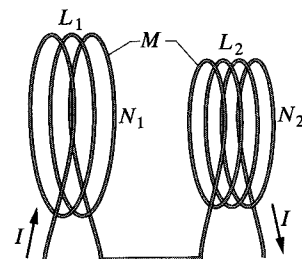
68. Cewka 1 ma indukcyjność $L_1 = 25$ mH i $N_1 = 100$ zwojów. Cewka 2 ma indukcyjność $L_2 = 40$ mH i $N_2 = 200$ zwojów. Cewki są sztywno umocowane względem siebie, a ich indukcyjność wzajemna M wynosi 3 mH. Prąd o natężeniu 6 mA, płynący w pierwszej cewce zmienia się z szybkością 4 A/s. a) Jaki strumień magnetyczny Φ_{12} przenika przez cewkę 1 i jaka powstaje tam SEM samoindukcji? b) Jaki strumień magnetyczny Φ_{21} przenika przez cewkę 2 i jaka powstaje tam SEM indukcji wzajemnej?

69. Dwie cewki mają ustalone położenia. Gdy w cewce 1 nie płynie prąd, a natężenie prądu w cewce 2 rośnie z szybkością 15 A/s, SEM w cewce 1 wynosi 25 mV. a) Jaka jest indukcyjność wzajemna cewek? b) Jaki strumień przechodzi przez cewkę 2, gdy nie płynie w niej prąd, a natężenie prądu w cewce 1 jest równe 3,6 A?

70. Dwa solenoidy są częścią cewki zapłonowej w samochodzie. Gdy natężenie prądu w jednym solenoidzie maleje od wartości 6 A do zera, w drugim solenoidzie jest indukowana SEM o wartości 30 kV. Ile wynosi indukcyjność wzajemna obydwu solenoidów?

71. Dwie cewki, połączone jak na rysunku 31.58, mają indukcyjności L_1 i L_2 . Ich indukcyjność wzajemna wynosi M . a) Wykaż, że to połączenie może być zastąpione jedną cewką o indukcyjności równoważnej:

$$L_{\text{rw}} = L_1 + L_2 + 2M.$$



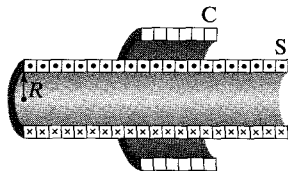
Rys. 31.58. Zadanie 71

b) Jak powinny być połączone cewki na rysunku 31.58, aby ich indukcyjność równoważna była równa:

$$L_{\text{rw}} = L_1 + L_2 - 2M?$$

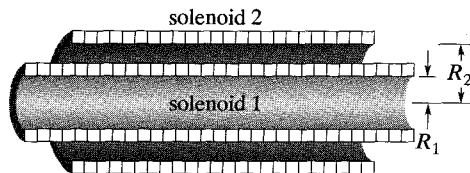
(To zadanie jest podobne do zadania 43, ale bardziej ogólne, bo nie wymagamy, aby cewki znajdowały się daleko od siebie).

72. Cewka C o N zwojach otacza długi solenoid S o promieniu R i n zwojach na jednostkę długości, jak pokazano na rysunku 31.59. Wykaż, że indukcyjność wzajemna układu cewka-solenoid wyrażona jest wzorem $M = \mu_0 \pi R^2 n N$. Wytłumacz, dlaczego M nie zależy od kształtu i wymiarów cewki, a także od tego, czy cewka jest ciasno, czy luźno nawinięta.



Rys. 31.59. Zadanie 72

73. Na rysunku 31.60 przedstawiono dwa współosiowe solenoidy w przekroju. Wykaż, że indukcyjność wzajemna M odcinka o długości l tego układu dwóch solenoidów wyrażona jest wzorem

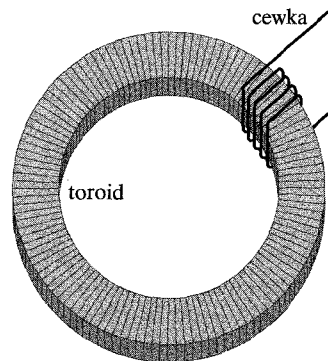


Rys. 31.60. Zadanie 73

rem $M = \pi R_1^2 l \mu_0 n_1 n_2$, gdzie n_1 i n_2 oznaczają liczbę ich zwojów na jednostkę długości, a R_1 jest promieniem wewnętrznego solenoidu. Dlaczego M zależy od R_1 , a nie zależy od R_2 ?

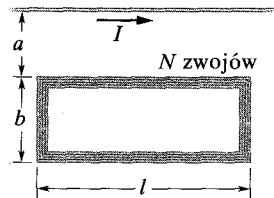
74. Na rysunku 31.61 przedstawiono cewkę o N_2 zwojach, nawiniętą, jak pokazano, wokół części toroidu o N_1 zwojach. Wewnętrzny promień toroidu jest równy a , jego zewnętrzny promień — b , a wysokość — h . Wykaż, że indukcyjność wzajemna tego układu toroid-cewka wynosi:

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$



Rys. 31.61. Zadanie 74

75. Prostokątna ramka o N ciasno nawiniętych zwojach jest umieszczona w pobliżu długiego prostego przewodu, jak pokazano na rysunku 31.62. a) Ile wynosi indukcyjność wzajemna układu ramka-przewód? b) Oblicz wartość M dla $N = 100$, $a = 1$ cm, $b = 8$ cm i $l = 30$ cm.



Rys. 31.62. Zadanie 75