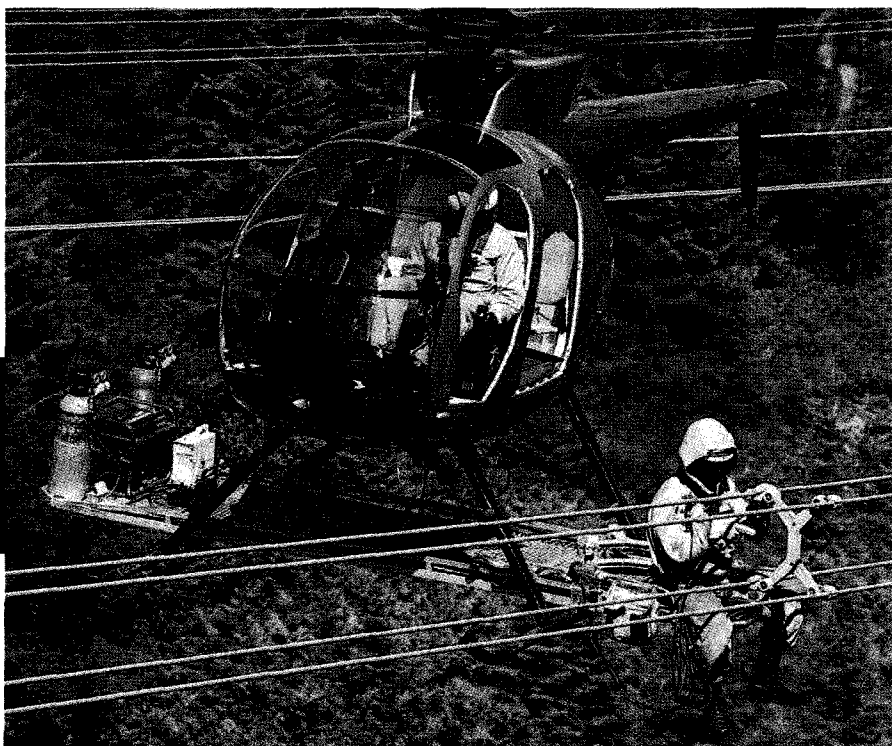


33 Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

Gdy linia przesyłowa wysokiego napięcia wymaga naprawy, zakład energetyczny nie może po prostu jej wyłączyć, pozbawiając być może całe miasto energii elektrycznej. Naprawa musi być wykonana „pod napięciem”. Widoczny na zdjęciu człowiek, znajdujący się na zewnątrz helikoptera, właśnie wymienił ręcznie rozpórkę między przewodami o napięciu 500 kV. Czynność taka wymaga nie lada umiejętności.

W jaki sposób można naprawić linię przesyłową, nie ulegając przy tym porażeniu?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



33.1. Nowa fizyka — ta sama matematyka

W tym rozdziale zobaczysz, jak ładunek elektryczny q zmienia się w czasie w obwodzie, składającym się z cewki L , kondensatora C i opornika R . Patrząc z innej perspektywy, zastanowimy się, w jaki sposób energia przepływa tam i z powrotem między polem magnetycznym cewki a polem elektrycznym kondensatora, ulegając jednocześnie stopniowemu rozproszeniu w postaci energii termicznej, wydzielonej na oporniku.

Drgania omawiane poprzednio dotyczyły innej sytuacji fizycznej. W rozdziale 16 pokazaliśmy, jak przemieszczenie x zmienia się w czasie w mechanicznym układzie drgającym, złożonym z klocka o masie m i sprężyny o stałej sprężystości k , umieszczonych w lepkim ośrodku, np. w oleju. Taki układ przedstawiony jest na rysunku 16.15. Pokazaliśmy także, w jaki sposób energia kinetyczna drgającego klocka przekształca się w energię potencjalną sprężyny (i przeciwnie), ulegając jednocześnie stopniowemu rozproszeniu w postaci energii termicznej.

Analogia między tymi dwoma układami jest całkowita, a opisujące je równania różniczkowe są identyczne. Tak więc nie musimy się uczyć nowej matematyki; możemy po prostu zmienić oznaczenia i skupić się całkowicie na fizycznej stronie zjawiska.

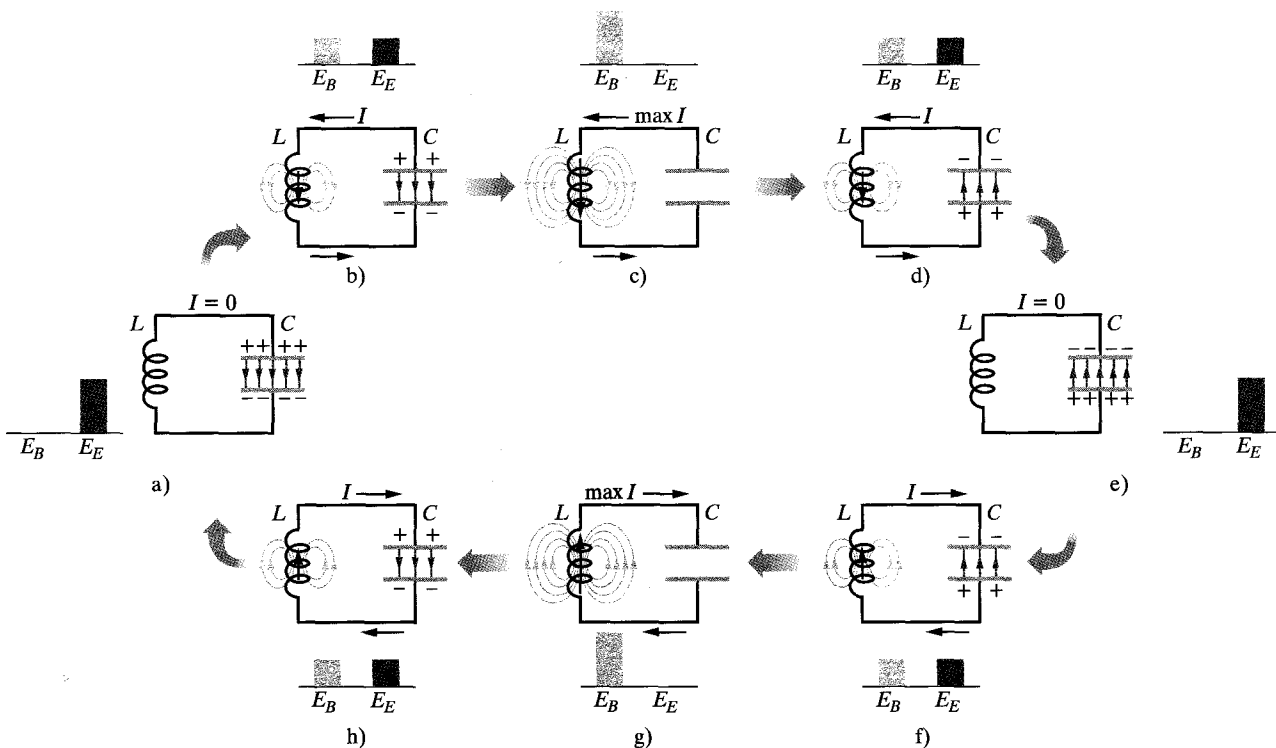
33.2. Drgania obwodu LC , opis jakościowy

Pośród dwuelementowych obwodów elektrycznych, składających się z opornika R , kondensatora C lub cewki L , dotychczas omówiliśmy połączenie szeregowe RC (w paragrafie 28.8) oraz RL (w paragrafie 31.9). Okazało się, że wartości ładunku, natężenia prądu i różnicy potencjałów, występujących w tych dwóch rodzajach obwodów, rosną lub maleją wykładniczo. Skala czasowa tego wzrostu lub zaniku określona jest *stałą czasową* τ , która może być albo pojemnościowa, albo indukcyjna.

Zbadamy teraz dwuelementową kombinację LC . Zobaczysz, że w tym przypadku ładunek, natężenie prądu i różnica potencjałów nie zanikają wykładniczo w czasie, ale zmieniają się sinusoidalnie (z okresem T i częstością kołową ω). Powstające w wyniku tego drgania pola elektrycznego w kondensatorze i pola magnetycznego w cewce nazywamy **drganiami elektromagnetycznymi**, a obwód elektryczny LC nazywamy obwodem drgającym.

Rysunki 33.1, od (a) do (h) ilustrują kolejne fazy drgań w prostym obwodzie LC . Z równania (26.21) wynika, że energia zmagazynowana w polu elektrycznym

Metoda usuwania usterek w linii wysokiego napięcia, pokazana na zdjęciu otwierającym ten rozdział została opatentowana przez Scotta H. Yenзера, a wyłączne zezwolenie na jej stosowanie uzyskała firma Haverfield Corporation z Gettysburga w stanie Pensylwania. Gdy monter zbliża się do linii wysokiego napięcia, pole elektryczne wokół linii powoduje, że potencjał jego ciała staje się niemal równy potencjałowi linii. W celu wyrównania obydwu potencjałów monter dołącza do linii przewodzący pręt. Aby uniknąć porażenia, monter musi być odizolowany od wszystkiego, co ma elektryczne połączenie z ziemią. Ma on na sobie przewodzący kombinezon, kaptur i rękawice, połączone elektrycznie z linią, za pomocą przewodzącego pręta. Dzięki temu ciało montera ma taki sam potencjał, jak linia, przy której pracuje.



Rys. 33.1. Osiem faz jednego cyklu drgań w obwodzie LC , w którym brak oporu elektrycznego. Wykresy słupkowe przy każdym rysunku ilustrują ilość zmagazynowanej energii pola magnetycznego i elektrycznego. Pokazane są również linie pola magnetycznego cewki i linie pola elektrycznego kondensatora. a) Maksymalny ładunek na kondensatorze, prąd nie płynie. b) Kondensator rozładowuje się, natężenie prądu rośnie. c) Kondensator całkowicie rozładowany, natężenie prądu osiąga maksimum. d) Kondensator ładuje się w kierunku przeciwnym niż w punkcie (a), natężenie prądu maleje. e) Kondensator całkowicie naładowany ze znakiem przeciwnym niż w punkcie (a), prąd nie płynie. f) Kondensator rozładowuje się, prąd płynie w przeciwnym kierunku niż w punkcie (b), natężenie prądu rośnie. g) Kondensator całkowicie rozładowany, natężenie prądu osiąga maksimum. h) Kondensator ładuje się, natężenie prądu maleje

kondensatora w dowolnej chwili jest równa:

$$E_E = \frac{q^2}{2C}, \quad (33.1)$$

gdzie q jest ładunkiem na okładkach kondensatora w tej właśnie chwili. Z równania (31.51) wynika natomiast, że energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki w dowolnej chwili jest równa:

$$E_B = \frac{LI^2}{2}, \quad (33.2)$$

gdzie I jest natężeniem prądu płynącego wtedy przez cewkę.

Założmy, że w chwili początkowej ładunek q na okładkach kondensatora na rysunku 33.1 ma wartość maksymalną $q_{\max}$ i że natężenie prądu płynącego przez cewkę jest równe zero. Ten początkowy stan obwodu jest pokazany na rysunku 33.1a. Załączone wykresy słupkowe energii wskazują, że w momencie, w którym prąd nie płynie przez cewkę, a ładunek na kondensatorze osiąga maksimum, energia E_B pola magnetycznego jest równa zero, a energia E_E pola elektrycznego ma wartość maksymalną.

Kondensator zaczyna teraz rozładowywać się przez cewkę, a dodatnie nośniki ładunku poruszają się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jak

pokazano na rysunku 33.1b. Oznacza to, że powstaje prąd elektryczny I , równy dq/dt , który płynie w dół cewki. W miarę zmniejszania się ładunku na okładkach kondensatora, energia zmagazynowana w polu elektrycznym kondensatora również maleje. Energia ta jest przekazywana polu magnetycznemu, które pojawia się wokół cewki w wyniku przepływu prądu. Tak więc natężenie pola elektrycznego maleje, a indukcja magnetyczna wzrasta, w miarę jak energia przepływa *od* pola elektrycznego *do* pola magnetycznego.

W końcu kondensator traci całkowicie swój ładunek (rys. 33.1c), a zatem również traci pole elektryczne i energię w nim zmagazynowaną. Tak więc energia zostaje całkowicie przekazana polu magnetycznemu cewki. Indukcja magnetyczna osiąga maksimum, a natężenie prądu płynącego przez cewkę osiąga maksymalną wartość $I_{\max}$.

Chociaż ładunek na okładkach kondensatora jest teraz równy zero, prąd musi nadal płynąć w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdyż cewka nie pozwala na gwałtowny zanik natężenia prądu. Prąd, płynąc przez obwód, nadal przenosi dodatnie ładunki z górnej okładki kondensatora do dolnej (rys. 33.1d). Energia przekazywana jest teraz z powrotem od cewki do kondensatora, w miarę, jak natężenie pola elektrycznego we wnętrzu kondensatora rośnie. Podczas tego przepływu energii natężenie prądu stopniowo maleje. Gdy energia zostanie w końcu w całości przekazana do kondensatora (rys. 33.1e), natężenie prądu spadnie do zera. Stan przedstawiony na rysunku 33.1e jest więc podobny do stanu początkowego, z wyjątkiem tego, że kondensator jest teraz naładowany przeciwnie.

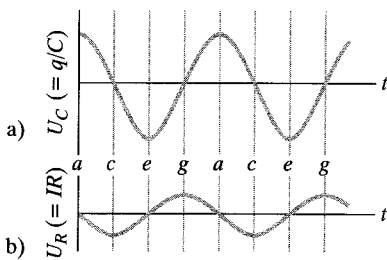
Następnie kondensator zaczyna się znowu rozładowywać, tym razem jednak prąd płynie w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (rys. 33.1f). Rozumując jak poprzednio, widzimy, że natężenie prądu, płynącego zgodnie z ruchem wskazówek zegara, wzrasta do maksimum (rys. 33.1g), a następnie maleje (rys. 33.1h), aż w końcu obwód powraca do stanu początkowego (rys. 33.1a). Następnie cały cykl powtarza się z częstością ν , a więc z częstością kątową $\omega = 2\pi\nu$. W idealnym obwodzie LC , nie zawierającym oporu, przepływ energii zachodzi wyłącznie między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki. Dzięki zachowaniu energii drgania powtarzają się bez końca. Nie muszą się one zaczynać w momencie, w którym cała energia jest zgromadzona w polu elektrycznym; dowolna faza cyklu drgań może być stanem początkowym.

Aby wyznaczyć zależność ładunku q od czasu, możemy dołączyć woltomierz i zmierzyć zmienną w czasie różnicę potencjałów (czyli *napięcie*) U_C między okładkami kondensatora C . Z równania 26.1 wynika, że:

$$U_C = \left(\frac{1}{C}\right) q,$$

co pozwala znaleźć q . Aby zmierzyć natężenie prądu, możemy połączyć szeregowo z kondensatorem i cewką opornik o niewielkim oporze R i zmierzyć zmieniającą się w czasie różnicę potencjałów U_R między jego końcówkami; U_R jest proporcjonalne do I zgodnie z zależnością:

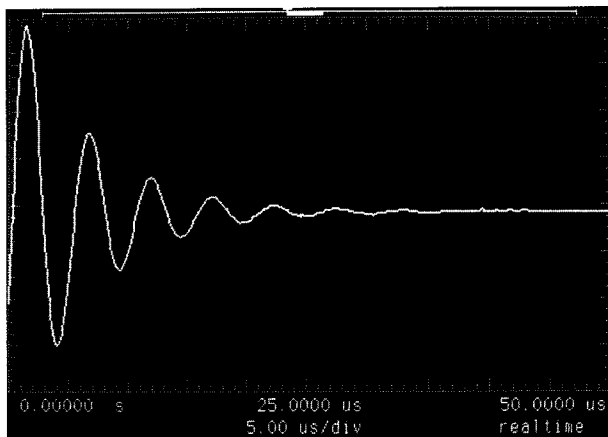
$$U_R = IR.$$



Rys. 33.2. a) Różnica potencjałów między okładkami kondensatora w obwodzie na rysunku 33.1 jako funkcja czasu. Ta wielkość jest proporcjonalna do ładunku na okładkach kondensatora. b) Różnica potencjałów proporcjonalna do natężenia prądu w obwodzie na rysunku 33.1. Litera odnosi się do faz cyklu drgań oznaczonych na rysunku 33.1

Zakładamy tutaj, że opór R jest tak mały, iż jego wpływ na zachowanie obwodu można pominąć. Zmiany w czasie U_C i U_R , a zatem q i I pokazane są na rysunku 33.2. Wszystkie cztery wielkości zmieniają się sinusoidalnie.

W rzeczywistym obwodzie LC drgania nie będą zachodzić bez końca, gdyż zawsze istnieje pewien opór elektryczny, który odbiera energię od pola elektrycznego i magnetycznego, powodując jej rozpraszanie w postaci energii termicznej (obwód może się nawet rozgrzać). Drgania wzbudzone w obwodzie będą zanikać, jak ilustruje to rysunek 33.3. Porównaj ten rysunek z rysunkiem 16.16, na którym przedstawiono zanik drgań mechanicznych, spowodowany tarcie w układzie kłosek–sprężyna.



Rys. 33.3. Przebieg na ekranie oscyloskopu pokazujący, że drgania w obwodzie RLC w rzeczywistości zanikają, gdyż energia jest rozpraszana na oporniku w postaci energii termicznej

SPRAWDZIAN 1: Naładowany kondensator i cewka są połączone szeregowo w chwili $t = 0$. Używając okresu drgań T jako jednostki określ, po jakim czasie następujące wielkości osiągną maksimum: a) ładunek na okładkach kondensatora; b) napięcie między okładkami kondensatora, o znaku jak na początku cyklu; c) energia zmagazynowana w polu elektrycznym; d) natężenie prądu.

Przykład 33.1

Kondensator o pojemności $1,5 \mu\text{F}$ został naładowany do różnicy potencjałów 57 V za pomocą źródła. Następnie źródło odłączono, a do kondensatora dołączono cewkę o indukcyjności 12 mH , tworząc w ten sposób obwód drgający LC . Jaka jest maksymalna wartość natężenia prądu w cewce? Przyjmij, że obwód nie zawiera oporu elektrycznego.

ROZWIĄZANIE:

Zadanie rozwiązujemy, biorąc pod uwagę następujące fakty:

➡ 1. W obwodzie nie występuje opór elektryczny, zatem całkowita energia elektromagnetyczna obwodu jest zachowana, gdy energia przekazywana jest tam i z powrotem między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki.

➡ 2. W dowolnej chwili t energia $E_B(t)$ pola magnetycznego związana jest równaniem (33.2) z natężeniem prądu $I(t)$,

płynącego przez cewkę ($E_B = LI^2/2$). Gdy cała energia jest zmagazynowana w postaci energii pola magnetycznego, natężenie prądu osiąga maksymalną wartość I_{max} , a energia ta wynosi $E_{B,\text{max}} = LI_{\text{max}}^2/2$.

➡ 3. W dowolnej chwili t energia $E_E(t)$ pola elektrycznego zależy od ładunku $q(t)$ na kondensatorze, zgodnie z równaniem (33.1) ($E_E = q^2/2C$). Gdy cała energia jest zmagazynowana w postaci energii pola elektrycznego, ładunek osiąga maksymalną wartość q_{max} , a energia ta wynosi $E_{E,\text{max}} = q_{\text{max}}^2/2C$.

Zatem możemy napisać teraz zasadę zachowania energii, jako:

$$E_{B,\text{max}} = E_{E,\text{max}}$$

czyli:

$$LI_{\text{max}}^2/2 = q_{\text{max}}^2/2C.$$

Rozwiązując ostatnie równanie względem $I_{\max}$, otrzymujemy:

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{q_{\max}^2}{LC}}.$$

Wartości L i C są dane, ale nie znamy $q_{\max}$. Jednakże, korzystając z równania (26.1) ($q = CU$), możemy znaleźć związek między

$q_{\max}$ a maksymalną różnicą potencjałów $U_{\max}$ na okładkach kondensatora, która jest równa początkowej różnicy potencjałów 57 V. Tak więc, podstawiając $q_{\max} = CU_{\max}$, otrzymujemy:

$$I_{\max} = U_{\max} \sqrt{\frac{C}{L}} = 57 \text{ V} \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}}{12 \cdot 10^{-3} \text{ H}}} = 0,637 \text{ A} \approx 640 \text{ mA.} \quad (\text{odpowiedź})$$

33.3. Analogiczne układy drgające: elektryczny i mechaniczny

Przypatrzmy się bliżej obwodowi drgającemu, przedstawionemu na rysunku 33.1 i układowi drgającemu klocek–sprężyna. W układzie klocka i sprężyny występują dwa rodzaje energii. Jedną jest energia potencjalna ściskanej lub rozciąganej sprężyny, drugą — energia kinetyczna poruszającego się klocka. Te dwa rodzaje energii opisane są przez dobrze znane wyrażenia, umieszczone w kolumnie energii po lewej stronie tabeli 33.1.

W kolumnie energii po prawej stronie tabeli przedstawione są dwa rodzaje energii, występujące w obwodzie drgającym LC . Porównując obie kolumny, możemy zauważyć analogię między wyrażeniami, określającymi dwie pary energii — mechaniczne energie układu klocek–sprężyna i elektromagnetyczne energie obwodu LC . Równania dla v i I , umieszczone na dole tabeli, pozwalają zobaczyć tę analogię bardziej szczegółowo. Wynika z nich, że q jest odpowiednikiem x , a I — odpowiednikiem v (w obydwu równaniach różniczkujemy dwie pierwsze z tych wielkości, aby otrzymać dwie kolejne). Z tej analogii wynika więc, że w wyrażeniach opisujących energię $1/C$ jest odpowiednikiem k , a L — odpowiednikiem m . Zatem:

q odpowiada x , $1/C$ odpowiada k ,

I odpowiada v , L odpowiada m .

Nasuwa się więc myśl, że w obwodzie LC kondensator od strony matematycznej odgrywa rolę sprężyny w układzie klocek–sprężyna, natomiast cewka odgrywa rolę klocka.

Tabela 33.1. Porównanie energii w dwóch układach drgających

Układ klocek–sprężyna		Obwód LC	
element	energia	element	energia
sprężyna	potencjalna, $\frac{1}{2}kx^2$	kondensator	elektryczna, $\frac{1}{2}(1/C)q^2$
klocek	kinetyczna, $\frac{1}{2}mv^2$	cewka	magnetyczna, $\frac{1}{2}LI^2$
$v = dx/dt$		$I = dq/dt$	

W paragrafie 16.3 podaliśmy, że częstość kołowa drgań w układzie klocek–sprężyna (bez tarcia) wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{układ klocek–sprężyna}). \quad (33.3)$$

Zgodnie z wymienionymi wyżej analogiami, aby znaleźć częstość kołową drgań w obwodzie LC (bez oporu elektrycznego), należy zamiast k podstawić $1/C$, a zamiast m podstawić L , otrzymując:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{obwód } LC). \quad (33.4)$$

Wyprowadzimy to równanie w następnym paragrafie.

33.4. Drgania LC , opis ilościowy

W tym paragrafie pokażemy, że równanie (33.4), określające częstość kołową drgań w obwodzie LC jest poprawne. Jednocześnie zbadamy jeszcze dokładniej analogię między drganiami w obwodzie LC a drganiami klocka i sprężyny. Na początku rozszerzymy nieco nasze wcześniejsze wiadomości, dotyczące mechanicznego układu klocek–sprężyna.

Układ drgający klocek–sprężyna

W rozdziale 16 analizowaliśmy drgania w układzie klocek–sprężyna, używając pojęcia przepływu energii. W trakcie wstępnych rozważań nie wyprowadziliśmy podstawowego równania różniczkowego, opisującego te drgania. Zrobimy to właśnie teraz.

Całkowita energia E układu klocek–sprężyna może być zapisana w dowolnej chwili jako:

$$E = E_k + E_s = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (33.5)$$

gdzie E_k i E_s oznaczają odpowiednio energię kinetyczną poruszającego się klocka i energię potencjalną rozciąganej lub ściskanej sprężyny. Jeżeli założymy, że układ porusza się bez tarcia, to całkowita energia E nie będzie się zmieniała w czasie, mimo że v i x ulegają zmianie. Inaczej mówiąc, $dE/dt = 0$, co prowadzi do:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0. \quad (33.6)$$

Jednakże $v = dx/dt$, a $dv/dt = d^2x/dt^2$. Podstawiając te wyrażenia do równania (33.6), otrzymujemy:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (\text{drgania w układzie klocek–sprężyna}). \quad (33.7)$$

Równanie (33.7) jest podstawowym *równaniem różniczkowym*, opisującym drgania układu klocek–sprężyna, bez uwzględnienia tarcia.

Rozwiązanie ogólne równania (33.7), czyli funkcja $x(t)$, opisująca drgania układu klocek–sprężyna, to (por. równanie (16.3))

$$x = x_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{przemieszczenie}), \quad (33.8)$$

gdzie $x_{\max}$ jest amplitudą drgań mechanicznych (oznaczoną przez x_m w rozdziale 16), ω oznacza częstość kątową drgań, a ϕ jest fazą początkową.

Obwód drgający LC

Rozważmy teraz drgania w obwodzie LC , bez uwzględnienia oporu elektrycznego, postępując dokładnie tak, jak w przypadku układu kłosek–sprężyna. Całkowita energia E w obwodzie drgającym LC , w dowolnej chwili dana jest wzorem:

$$E = E_B + E_E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \quad (33.9)$$

gdzie E_B jest energią zmagazynowaną w polu magnetycznym cewki, a E_E jest energią zmagazynowaną w polu elektrycznym kondensatora. Założyliśmy brak oporu elektrycznego w obwodzie, więc energia nie ulega przekształceniu w energię termiczną i E nie zmienia się w czasie. Inaczej mówiąc, dE/dt musi się równać zero, co prowadzi do:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = LI \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0. \quad (33.10)$$

Jednakże $I = dq/dt$, a $dI/dt = d^2q/dt^2$. Podstawiając te zależności do równania (33.10), otrzymujemy:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{drgania w obwodzie } LC). \quad (33.11)$$

Jest to *równanie różniczkowe*, które opisuje drgania w obwodzie LC , bez uwzględnienia oporu elektrycznego. Równania (33.11) i (33.7) mają dokładnie taką samą postać matematyczną.

Zmiany ładunku i natężenia prądu

Rozwiązania identycznych równań różniczkowych muszą być matematycznie identyczne. Ponieważ q jest odpowiednikiem x , więc rozwiązanie ogólne równania (33.11) może być napisane przez analogię do równania (33.8):

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{ładunek}), \quad (33.12)$$

gdzie $q_{\max}$ oznacza amplitudę zmian ładunku, ω jest częstością kątową drgań elektromagnetycznych, a ϕ jest fazą początkową.

Różniczkując równanie (33.12) względem czasu, otrzymujemy natężenie prądu w obwodzie LC :

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_{\max} \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{natężenie prądu}). \quad (33.13)$$

Amplituda $I_{\max}$ zmieniającego się sinusoidalnie natężenia prądu wynosi:

$$I_{\max} = \omega q_{\max}, \quad (33.14)$$

możemy więc przepisać równanie (33.13) w postaci:

$$I = -I_{\max} \sin(\omega t + \phi). \quad (33.15)$$

Częstości kołowe

Możemy sprawdzić, czy wyrażenie (33.12) jest rozwiązaniem równania (33.11), podstawiając je i jego drugą pochodną względem czasu do równania (33.11). Pierwsza pochodna wyrażenia (33.12) jest dana równaniem (33.13), natomiast druga pochodna wynosi:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 q_{\max} \cos(\omega t + \phi).$$

Podstawiając q i $d^2 q/dt^2$ do równania (33.11), otrzymujemy:

$$-L\omega^2 q_{\max} \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C} q_{\max} \cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Po skróceniu przez $q_{\max} \cos(\omega t + \phi)$ i przekształceniach otrzymujemy ostatecznie:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Tak więc równanie (33.12) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (33.11), jeżeli ω przyjmuje stałą wartość $1/\sqrt{LC}$. Zauważ, że to wyrażenie, określające ω jest dokładnie równe wyrażeniu (33.4), które otrzymaliśmy, badając analogie elektryczno-mechaniczne.

Faza początkowa ϕ w równaniu (33.12) jest określona przez warunki, które istnieją w pewnej chwili, np. $t = 0$. Jeżeli z tych warunków wynika, że $\phi = 0$ dla $t = 0$, to z równania (33.12) otrzymujemy $q = q_{\max}$, natomiast z równania (33.13) otrzymujemy $I = 0$; są to właśnie warunki początkowe, odpowiadające drganiom na rysunku 33.1a.

Zmiany energii elektrycznej i magnetycznej

Z równań (33.1) i (33.12) wynika, że energia elektryczna zmagazynowana w obwodzie LC w dowolnej chwili t jest równa:

$$E_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_{\max}^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi). \quad (33.16)$$

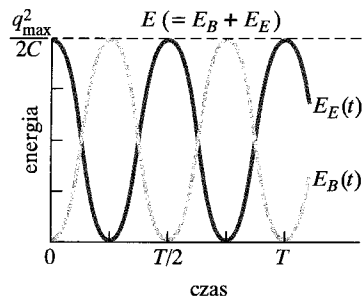
Zgodnie z równaniami (33.2) i (33.13) energia magnetyczna jest równa:

$$E_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega^2 q_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \phi).$$

Podstawiając ω z równania (33.4), otrzymujemy więc:

$$E_B = \frac{q_{\max}^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi). \quad (33.17)$$

Na rysunku 33.4 przedstawiono wykresy $E_E(t)$ i $E_B(t)$ dla przypadku $\phi = 0$.



Rys. 33.4. Energia magnetyczna i elektryczna, zmagazynowana w obwodzie, przedstawionym na rysunku 33.1, zilustrowana jako funkcja czasu. Zauważ, że suma energii pozostaje stała. T oznacza okres drgań

Zauważ, że:

1. Wartości maksymalne E_E i E_B są jednakowe i wynoszą $q_{\max}^2/2C$.
2. W dowolnej chwili suma E_E i E_B ma stałą wartość, równą $q_{\max}^2/2C$.
3. Gdy E_E osiąga maksymalną wartość, E_B jest równe zero, i na odwrót.

✓ **SPRAWDZIAN 2:** Maksymalna wartość różnicy potencjałów na kondensatorze w obwodzie drgającym LC wynosi 17 V, a maksymalna wartość energii pola elektrycznego w kondensatorze — 160 μJ . W pewnej chwili różnica potencjałów na kondensatorze wynosi 5 V, a energia 10 μJ . Ile wynosi wtedy: a) siła elektromotoryczna (SEM), indukowana w cewce, b) energia zgromadzona w polu magnetycznym?

Przykład 33.2

Dla przypadku, opisanego w przykładzie 33.1 założmy, że cewka zostaje dołączona do naładowanego kondensatora w chwili $t = 0$. W wyniku tego powstaje obwód LC , jak na rysunku 33.1.

a) W jaki sposób różnica potencjałów $U_L(t)$ na cewce zależy od czasu?

ROZWIĄZANIE:

☛ 1. Natężenie prądu i różnica potencjałów w obwodzie zmieniają się sinusoidalnie.

☛ 2. Do obwodu drgającego możemy zastosować drugie prawo Kirchhoffa dokładnie w taki sam sposób, jak robiliśmy to w rozdziale 28, omawiając obwody prądu stałego. W dowolnej chwili t z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że w obwodzie na rysunku 33.1:

$$U_L(t) = U_C(t), \quad (33.18)$$

czyli różnica potencjałów U_L na cewce musi być zawsze równa różnicy potencjałów U_C na kondensatorze, tak aby całkowita różnica potencjałów w obwodzie była równa zero. Zatem wyznaczmy $U_L(t)$, jeśli będziemy potrafili wyznaczyć $U_C(t)$, a $U_C(t)$ możemy obliczyć, znając $q(t)$ i wykorzystując równanie (26.1) ($q = CU$).

Gdy drgania rozpoczynają się w chwili $t = 0$, napięcie $U_C(t)$ ma maksymalną wartość, a więc ładunek q na okładkach kondensatora musi również osiągać maksimum. Zatem faza początkowa ϕ musi być równa zero, a z równania (33.12) otrzymujemy:

$$q = q_{\max} \cos \omega t. \quad (33.19)$$

(Zauważmy, że ta cosinusoidalna zależność rzeczywiście daje maksymalną wartość $q (= q_{\max})$, gdy $t = 0$). Aby obliczyć różnicę potencjałów $U_C(t)$, dzielimy obie strony równania (33.19) przez C :

$$\frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C} \cos \omega t,$$

i stosujemy równanie (26.1), aby napisać:

$$U_C = U_{C\max} \cos \omega t. \quad (33.20)$$

$U_{C\max}$ oznacza tutaj amplitudę zmian napięcia U_C między okładkami kondensatora.

Następnie podstawiając $U_C = U_L$ z równania (33.18), otrzymujemy:

$$U_L = U_{C\max} \cos \omega t. \quad (33.21)$$

Wartości liczbowe po prawej stronie tego równania możemy obliczyć, jeśli zauważymy, że amplituda $U_{C\max}$ jest równa początkowemu (maksymalnemu) napięciu 57 V na kondensatorze. Następnie, wstawiając wartości L i C z przykładu 33.1, obliczamy ω z równania (33.4):

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{[(0,012 \text{ H})(1,5 \cdot 10^{-6} \text{ F})]^{0,5}} \\ &= 7454 \text{ rad/s} \approx 7500 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Zatem równanie (33.21) przyjmuje postać:

$$U_L = (57 \text{ V}) \cos[(7500 \text{ rad/s})t]. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaka jest maksymalna szybkość $(dI/dt)_{\max}$ zmian natężenia prądu I , płynącego w obwodzie?

ROZWIĄZANIE:

☛ Jeżeli ładunek na okładkach kondensatora zmienia się zgodnie z równaniem (33.12), to natężenie prądu dane jest równaniem (33.13). Ponieważ $\phi = 0$, więc równanie to przyjmuje postać:

$$I = -\omega q_{\max} \sin \omega t.$$

Zatem:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega q_{\max} \sin \omega t) = -\omega^2 q_{\max} \cos \omega t.$$

Możemy uprościć to równanie, podstawiając $CU_{C\max}$ zamiast $q_{\max}$ (gdyż znamy C i $U_{C\max}$, ale nie znamy $q_{\max}$) oraz $1/\sqrt{LC}$ zamiast ω , zgodnie ze wzorem (33.4). Otrzymujemy wtedy:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{LC} CU_{C\max} \cos \omega t = -\frac{U_{C\max}}{L} \cos \omega t.$$

Widzisz więc, że szybkość zmian natężenia prądu jest również funkcją zmieniającą się sinusoidalnie, a maksymalna szybkość zmian jest równa:

$$\frac{U_{C\max}}{L} = \frac{57 \text{ V}}{0,012 \text{ H}} = 4750 \text{ A/s} \approx 4800 \text{ A/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

33.5. Drgania tłumione w obwodzie RLC

Obwód zawierający opór, indukcyjność i pojemność nazywamy *obwodem RLC*. W tym paragrafie będziemy zajmować się tylko *szeregowymi obwodami RLC*, podobnymi do obwodu, przedstawionego na rysunku 33.5. Jeśli w obwodzie występuje opór elektryczny, to całkowita *energia elektromagnetyczna* E (suma energii elektrycznej i magnetycznej) nie jest już stała, ale maleje w czasie, gdyż jest przekształcana na oporniku w energię termiczną. Z powodu strat energii, amplitudy drgań ładunku, natężenia prądu i różnicy potencjałów stopniowo maleją; takie drgania nazywamy drganiami *tłumionymi*. Jak się przekonasz, są one tłumione dokładnie w taki sam sposób, jak drgania tłumionego układu klocek–sprężyna, omówionego w paragrafie 16.8.

Aby zbadać drgania w obwodzie RLC , zapiszemy wyrażenie, określające całkowitą energię elektromagnetyczną E w dowolnej chwili. Energia elektromagnetyczna nie jest gromadzona na oporniku, możemy zatem zastosować wzór (33.9):

$$E = E_B + E_E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \quad (33.22)$$

Teraz jednak całkowita energia elektromagnetyczna maleje, gdyż jest przekształcana w energię termiczną. Zgodnie z równaniem (27.22) szybkość tej zmiany wynosi:

$$\frac{dE}{dt} = -I^2 R, \quad (33.23)$$

gdzie znak minus wskazuje, że E maleje. Różniczkując równanie (33.22) względem czasu, a następnie podstawiając wynik do równania (33.23), otrzymujemy:

$$\frac{dE}{dt} = LI \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -I^2 R.$$

Podstawiając dq/dt za I oraz d^2q/dt^2 za dI/dt , otrzymujemy:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{obwód } RLC). \quad (33.24)$$

Jest to równanie różniczkowe, opisujące drgania tłumione w obwodzie RLC . Rozwiązaniem równania (33.24) jest wyrażenie:

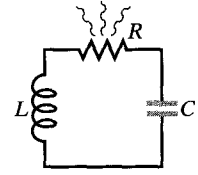
$$q = q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi), \quad (33.25)$$

w którym:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}, \quad (33.26)$$

gdzie $\omega = 1/\sqrt{LC}$, jak w układzie nietłumionym. Równanie (33.25) określa, w jaki sposób ładunek na okładkach kondensatora zmienia się w tłumionym obwodzie RLC ; to równanie jest odpowiednikiem równania (16.40), które określa przemieszczenie w tłumionym układzie klocek–sprężyna.

Równanie (33.25) opisuje drgania sinusoidalne (wyrażone funkcją cosinus) o *malejącej wykładniczo amplitudzie* $q_{\max} e^{-Rt/2L}$ (czyli czynnika przy funkcji cosinus). Częstość kołowa ω' drgań tłumionych jest zawsze mniejsza niż częstość ko-



Rys. 33.5. Szeregowy obwód RLC . Gdy ładunek zgromadzony w obwodzie przepływa tam i z powrotem przez opornik, energia elektromagnetyczna ulega rozproszeniu w postaci energii termicznej, tłumiąc drgania (czyli zmniejszając ich amplitudę)

łowa ω drgań nietłumionych; jednak będziemy tu zajmować się tylko przypadkami, w których R jest na tyle małe, że częstość ω' jest w przybliżeniu równa częstości ω .

Znajdziemy teraz wyrażenie, określające całkowitą energię elektromagnetyczną E obwodu jako funkcję czasu. Jedną z metod może być obliczenie energii pola elektrycznego w kondensatorze, danej równaniem (33.1) ($E_E = q^2/2C$). Podstawiając wyrażenie (33.25) do równania (33.1), otrzymujemy:

$$E_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{[q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega't + \phi)]^2}{2C} = \frac{q_{\max}^2}{2C} e^{-Rt/L} \cos^2(\omega't + \phi). \quad (33.27)$$

Tak więc energia pola elektrycznego zmienia się okresowo, zgodnie z funkcją cosinus do kwadratu, a amplituda tych zmian maleje wykładniczo w czasie.

Przykład 33.3

Szeregowy obwód RLC zawiera indukcyjność $L = 12$ mH, pojemność $C = 1,6$ μ F i opór $R = 1,5$ Ω .

a) Po jakim czasie t amplituda drgań ładunku w obwodzie osiągnie 50% swojej początkowej wartości?

ROZWIĄZANIE:

Amplituda zmian ładunku maleje wykładniczo w funkcji czasu t . Zgodnie ze wzorem (33.25) amplituda ładunku w dowolnej chwili t wynosi $q_{\max} e^{-Rt/2L}$, gdzie $q_{\max}$ jest amplitudą w chwili $t = 0$. Chcemy określić moment, w którym amplituda zmaleje do wartości $0,5q_{\max}$, czyli:

$$q_{\max} e^{-Rt/2L} = 0,5q_{\max}.$$

Skracając $q_{\max}$ i obliczając logarytm naturalny z obydwu stron równania, mamy:

$$-\frac{Rt}{2L} = \ln 0,5.$$

Wyznaczając t i podstawiając dane, otrzymujemy:

$$t = -\frac{2L}{R} \ln 0,5 = -\frac{(2)(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(\ln 0,5)}{1,5 \Omega} = 0,0111 \text{ s} \approx 11 \text{ ms.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile pełnych drgań wykona obwód w tym czasie?

ROZWIĄZANIE:

Czas jednego pełnego cyklu drgań jest równy okresowi $T = 2\pi/\omega$, gdzie częstość kołowa drgań w obwodzie LC jest dana wzorem (33.4) ($\omega = 1/\sqrt{LC}$). Zatem w przedziale czasu $\Delta t = 0,0111$ s liczba pełnych drgań jest równa:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{T} &= \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{LC}} \\ &= \frac{0,0111 \text{ s}}{2\pi[(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(1,6 \cdot 10^{-6} \text{ F})]^{1/2}} \approx 13. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Tak więc w czasie około 13 pełnych drgań amplituda zmaleje o 50%. Tłumienie to jest słabsze niż pokazane na rysunku 33.3, gdzie w czasie jednego cyklu drgań amplituda maleje nieco więcej niż o 50%.

33.6. Prąd zmienny

Drgania w obwodzie RLC nie będą zanikać, jeśli zewnętrzne źródło SEM dostarczy dostatecznie dużo energii, aby uzupełnić straty spowodowane rozpraszaniem energii w oporniku R . Instalacje elektryczne w mieszkaniach, biurach i fabrykach, zawierające niezliczone obwody RLC , pobierają energię z lokalnych elektrowni. W większości krajów energia jest dostarczana przy użyciu napięć i natężeń prądu, zmieniających się w czasie — taki prąd nazywamy **prądem zmiennym** (w skrócie **ac** od ang. **alternating current**). Prąd, wytwarzany w baterii, nie zmienia się w czasie i nazywamy go prądem stałym (**dc** od ang. **direct current**). Te zmienne napięcia i natężenia prądu zależą sinusoidalnie od czasu, zmieniając kierunek (w

Europie 100 razy na sekundę, co odpowiada częstotści 50 Hz; w Ameryce Północnej częstotść zmian napięcia i natężenia prądu w sieci elektrycznej wynosi 60 Hz).

Na pierwszy rzut oka taki sposób przesyłania energii może wydać się dziwny. Widzieliśmy już, że prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa w domowej instalacji elektrycznej jest równa w typowych warunkach $4 \cdot 10^{-5}$ m/s. Jeżeli teraz zmieniamy kierunek ruchu elektronów co 1/100 sekundy, to w ciągu połowy okresu takie elektrony mogą przebyć drogę równą zaledwie $4 \cdot 10^{-7}$ m. W takim tempie typowy elektron może przemieścić się obok około 10 atomów w przewodzie elektrycznym, zanim zacznie się poruszać w przeciwnym kierunku. Być może jesteś ciekaw, jak w takim razie elektron może gdziekolwiek dotrzeć?

Tym pytaniem, choć kłopotliwym, nie musimy się jednak zajmować, gdyż elektrony przewodnictwa nie muszą „gdziekolwiek dotrzeć”. Kiedy mówimy, że natężenie prądu w przewodniku wynosi jeden amper, oznacza to, że ładunki przemieszczają się w tempie jednego kulomba na sekundę przez dowolną płaszczyznę, przecinającą ten przewodnik. Szybkość, z jaką ładunki przechodzą przez tę płaszczyznę, nie ma w istocie znaczenia; jeden amper może odpowiadać wielu ładunkom, poruszającym się bardzo wolno lub zaledwie kilku, ale poruszającym się bardzo szybko. Ponadto sygnał wysyłany do elektronów, aby zmieniły swój kierunek ruchu — pochodzący od zmiennej SEM, dostarczanej przez prądnicę elektrowni — rozchodzi się wzdłuż przewodnika z prędkością bliską prędkości światła. Wszystkie elektrony, niezależnie od tego, gdzie się znajdują, otrzymują instrukcję zmiany kierunku niemalże w tej samej chwili. W końcu zauważmy, że w wielu urządzeniach, takich jak żarówki lub tostery, kierunek ruchu jest nieistotny, jeśli tylko elektrony poruszają się i dostarczają energię do urządzenia, zderzając się z jego atomami.

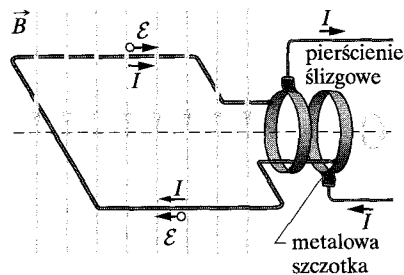
Podstawową korzyścią ze stosowania prądu zmiennego jest to, że zmiany natężenia prądu powodują zmiany pola magnetycznego, otaczającego przewodnik. Dzięki temu możliwe jest zastosowanie prawa indukcji Faradaya, co oznacza między innymi, że możemy dowolnie podwyższać (zwiększać) lub obniżać (zmniejszać) amplitudę napięcia zmiennego, korzystając z urządzenia zwanego transformatorem. Przekonamy się o tym jeszcze w tym rozdziale. Dodatkową korzyścią jest to, że prąd zmienny jest łatwiejszy (niż prąd stały) do stosowania w obrotowych urządzeniach elektrycznych, takich jak prądnice i silniki.

Na rysunku 33.6 pokazano prosty model prądnicy prądu zmiennego. Przewodząca ramka jest obracana w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$, zatem w ramce indukuje się sinusoidalnie zmienna SEM:

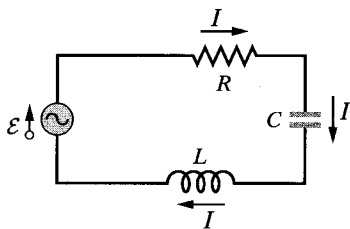
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t. \quad (33.28)$$

Częstotść kołowa ω_w SEM jest równa prędkości kątowej, z jaką ramka porusza się w polu magnetycznym; faza SEM jest równa $\omega_w t$, natomiast amplituda jest równa $\mathcal{E}_{\max}$, gdzie indeks max oznacza wartość maksymalną. Gdy obracająca się ramka jest częścią obwodu zamkniętego, SEM wytwarza (wymusza) w obwodzie prąd sinusoidalnie zmienny o tej samej częstotści kołowej ω_w , która nazywana jest dlatego częstotścią kołową drgań wymuszonych. Natężenie prądu można zapisać w postaci:

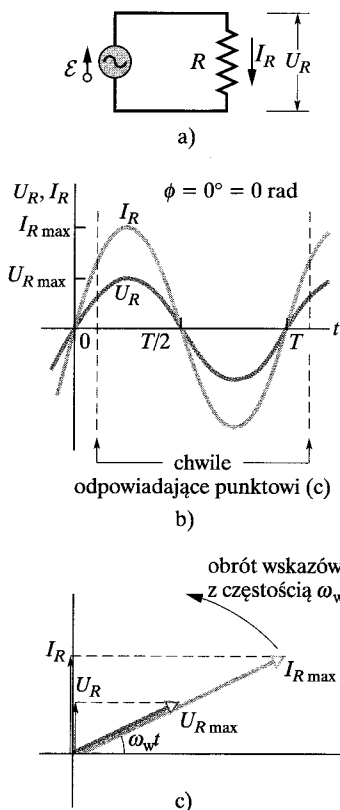
$$I = I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.29)$$



Rys. 33.6. Podstawowym elementem prądnicy prądu zmiennego jest przewodząca ramka, obracająca się w zewnętrznym polu magnetycznym. W praktyce zmienna SEM indukowana w cewce składającej się z wielu zwojów jest odbierana dzięki pierścieniom ślizgowym, przymocowanym do obracającego się uzwojenia. Każdy pierścień dotyka jednego końca uzwojenia i jest połączony elektrycznie z resztą obwodu prądnicy za pomocą przewodzących szczotek, które ślizgają się po pierścieniach podczas obracania się uzwojenia



Rys. 33.7. Obwód o jednym oczku zawierający opornik, kondensator i cewkę. Źródło, oznaczone sinusoidalną falą w kółku, wytwarza zmienną SEM, która powoduje przepływ prądu zmiennego; kierunki SEM i prądu zaznaczone są w pewnej wybranej chwili.



Rys. 33.8. a) Opornik połączony jest ze źródłem prądu zmiennego. b) Zależności czasowe natężenia prądu I_R i napięcia U_R na oporniku, przedstawione są na tym samym wykresie. Obie te wielkości drgają w zgodnej fazie i wykonują jeden pełny cykl drgań w ciągu jednego okresu T . c) Diagram wskazowy pokazujący sytuację opisaną w punkcie (b)

gdzie $I_{\max}$ jest amplitudą natężenia prądu wymuszonego. (Faza początkowa natężenia prądu jest zwyczajowo zapisywana ze znakiem minus). Wprowadzamy fazę początkową ϕ w równaniu (33.29), gdyż natężenie prądu I może być przesunięte w fazie względem SEM $\mathcal{E}$. (Jak się przekonamy, faza początkowa zależy od tego, do jakiego obwodu dołączona jest prądnicą). Możemy również zapisać natężenie prądu I za pomocą **częstości drgań wymuszonych** ν_w , podstawiając $2\pi\nu_w$ zamiast ω_w w równaniu (33.29).

33.7. Drgania wymuszone

Przekonaliśmy się, że jeśli pobudzimy do drgań ładunek, napięcie i natężenie prądu, to zarówno w nietłumionym obwodzie LC , jak i w tłumionym obwodzie RLC (z dostatecznie małym oporem R) drgania te zachodzą z częstością kołową $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Takie drgania nazywamy **drzganiami swobodnymi** (niezależnymi od jakiegokolwiek zewnętrznej SEM), a częstość kołowa ω jest nazywana **częstością kołową drgań swobodnych** obwodu.

Jeśli jednak do obwodu RLC dołączona jest zewnętrzna zmienna SEM, dana wzorem (33.28), to drgania ładunku, napięcia i natężenia prądu nazywamy **drzganiami wymuszonymi**. Te drgania zawsze zachodzą z częstością kołową drgań wymuszonych ω_w :

➤ Niezależnie od częstości drgań swobodnych obwodu, wymuszone drgania ładunku, napięcia i natężenia prądu zawsze zachodzą z częstością kołową drgań wymuszonych ω_w .

Jednakże, jak zobaczysz w paragrafie 33.9, amplituda drgań w bardzo dużym stopniu zależy od tego, jak bliska częstości kołowej drgań swobodnych ω jest częstość kołowa drgań wymuszonych ω_w . Gdy obie częstości kołowe się pokrywają, amplituda $I_{\max}$ natężenia prądu w obwodzie osiąga maksimum, a taki przypadek nazywamy **rezonansem**.

33.8. Trzy proste obwody

W dalszej części tego rozdziału dołączymy zewnętrzne źródło zmiennej SEM do szeregowego obwodu RLC , pokazanego na rysunku 33.7. Następnie znajdziemy wyrażenie, opisujące amplitudę $I_{\max}$ i fazę początkową ϕ natężenia prądu zmiennego jako funkcji amplitudy $\mathcal{E}_{\max}$ i częstości kołowej ω_w zewnętrznej SEM. Najpierw jednak przeanalizujemy trzy prostsze obwody, z których każdy składa się z zewnętrznego źródła SEM i tylko jednego elementu obwodu: R , L lub C . Zaczniemy od obwodu zawierającego tylko opornik R , a więc od obciążenia czysto oporowego.

Obciążenie oporowe

Na rysunku 33.8a przedstawiono obwód, składający się z opornika o oporze R i źródła prądu zmiennego o SEM wyrażonej wzorem (33.28). Zgodnie z drugim

prawem Kirchhoffa mamy:

$$\mathcal{E} - U_R = 0.$$

Podstawiając równanie (33.28), otrzymujemy:

$$U_R = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t.$$

Amplituda $U_{R \max}$ różnicy potencjałów (czyli napięcia) na końcach opornika jest równa amplitudzie $\mathcal{E}_{\max}$ zmiennej SEM, możemy więc napisać:

$$U_R = U_{R \max} \sin \omega_w t. \quad (33.30)$$

Korzystając z definicji oporu ($R = U/I$), możemy teraz wyrazić natężenie prądu I_R płynącego przez opornik jako:

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_{R \max}}{R} \sin \omega_w t. \quad (33.31)$$

Korzystając z równania (33.29), to samo natężenie prądu możemy również zapisać w postaci:

$$I_R = I_{R \max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.32)$$

gdzie $I_{R \max}$ oznacza amplitudę natężenia prądu I_R płynącego przez opornik. Porównując równania (33.31) i (33.32), zauważymy, że dla obciążenia czysto oporowego faza początkowa jest równa $\phi = 0^\circ$. Widzimy również, że amplitudy napięcia i natężenia prądu są związane zależnością:

$$U_{R \max} = I_{R \max} R \quad (\text{opornik}). \quad (33.33)$$

Chociaż wyprowadziliśmy tę zależność dla obwodu z rysunku 33.8a, jest ona słuszna dla dowolnego opornika w dowolnym obwodzie prądu zmiennego.

Porównując wzory (33.30) i (33.31), widzimy, że obie zmieniające się w czasie wielkości U_R i I_R zależą od czasu jak funkcja $\sin \omega_w t$, a ich faza początkowa wynosi $\phi = 0^\circ$. Zatem obie te wielkości drgają w zgodnej fazie, co oznacza, że ich odpowiadające sobie maksima (i minima) występują w tej samej chwili. Ilustruje to rysunek 33.8b, który jest wykresem funkcji $U_R(t)$ i $I_R(t)$. Zauważ, że drgania U_R i I_R nie zanikają, ponieważ źródło dostarcza energii do obwodu, aby wyrównać straty energii rozpraszanej na oporniku R .

Zmieniające się w czasie wielkości U_R i I_R mogą być również przedstawione geometrycznie jako *wskazy*. Przypomnij sobie, że w paragrafie 17.10 zdefiniowaliśmy wskazy jako wektory obracające się wokół początku układu współrzędnych. Na rysunku 33.8c pokazane są wskazy, które przedstawiają napięcie i natężenie prądu w oporniku z rysunku 33.8a w pewnej chwili t . Te wskazy mają następujące właściwości:

Prędkość kątowna: Obydwa wskazy obracają się wokół początku układu współrzędnych, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, z prędkością kątową równą częstości kołowej ω_w napięcia U_R i natężenia prądu I_R .

Długość: Długość każdego wskazującego odpowiada amplitudzie wielkości zależnej od czasu, czyli $U_{R \max}$ w przypadku napięcia, a $I_{R \max}$ w przypadku natężenia prądu.

Rzut: Rzut wskazów na oś pionową przedstawia wartość chwilową (w chwili t) wielkości zależnej od czasu, czyli U_R w przypadku napięcia, a I_R w przypadku natężenia prądu.

Kąt obrotu: Kąt obrotu każdego wskazów jest równy fazie wielkości zmieniającej się w czasie, określonej w chwili t . Na rysunku 33.8c napięcie ma taką samą fazę jak natężenie prądu. Oznacza to, że obydwa wskazów mają zawsze tę samą fazę $\omega_w t$ i ten sam kąt obrotu, a więc obracają się razem.

Podążaj w myśli za obracającymi się wskazówkami. Czy widzisz, że po obrocie o kąt $\omega_w t = 90^\circ$ wskazów są skierowane pionowo w górę i pokazują, że wtedy $U_R = U_{R \max}$, a $I_R = I_{R \max}$? Taki sam wynik dają równania (33.30) i (33.32).

Przykład 33.4

Obciążenie czysto oporowe. Na rysunku 33.8a opór R jest równy $200 \, \Omega$, a źródło wytwarza sinusoidalnie zmienną SEM o amplitudzie $\mathcal{E}_{\max} = 36 \, \text{V}$ i częstotliwości $\nu_w = 50 \, \text{Hz}$.

a) Jakie jest napięcie $U_R(t)$ na oporniku R jako funkcji czasu i jaka jest amplituda $U_{R \max}$ funkcji $U_R(t)$?

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do obwodu na rysunku 33.8a, to przekonamy się, że w obwodzie z czysto oporowym obciążeniem napięcie $U_R(t)$ na oporze jest zawsze równe SEM $\mathcal{E}(t)$, wytwarzanej w źródle. Tak więc $U_R(t) = \mathcal{E}(t)$ i $U_{R \max} = \mathcal{E}_{\max}$. Ponieważ $\mathcal{E}_{\max}$ jest dane, możemy napisać:

$$U_{R \max} = \mathcal{E}_{\max} = 36 \, \text{V}. \quad (\text{Odpowiedź})$$

W celu znalezienia $U_R(t)$ stosujemy równanie (33.28) i zapisujemy:

$$U_R(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t, \quad (33.34)$$

a następnie podstawiamy $\mathcal{E}_{\max} = 36 \, \text{V}$ i:

$$\omega_w = 2\pi\nu_w = 2\pi(50 \, \text{Hz}) = 100\pi,$$

otrzymując:

$$U_R(t) = (36 \, \text{V}) \sin(100\pi t). \quad (\text{odpowiedź})$$

Dla wygody możemy pozostawić argument funkcji sinus w tej postaci. Możemy również zapisać go jako $(314 \, \text{rad/s})t$ lub $(314 \, \text{s}^{-1})t$.

b) Jakie jest natężenie prądu $I_R(t)$ płynącego przez opór i amplituda $I_{R \max}$ natężenia prądu $I_R(t)$?

ROZWIĄZANIE:

W obwodzie prądu zmiennego z czysto oporowym obciążeniem zmienne natężenie prądu $I_R(t)$ płynącego przez opór jest zgodne w fazie ze zmiennym napięciem $U_R(t)$ na tym oporze, tzn. faza początkowa ϕ dla natężenia prądu jest równa zero. Możemy więc zapisać równanie (33.29) w postaci:

$$I_R = I_{R \max} \sin(\omega_w t - \phi) = I_{R \max} \sin \omega_w t. \quad (33.35)$$

Z równania (33.33) wyznaczamy amplitudę $I_{R \max}$

$$I_{R \max} = \frac{U_{R \max}}{R} = \frac{36 \, \text{V}}{200 \, \Omega} = 0,18 \, \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podstawiając tę wartość oraz $\omega_w = 2\pi\nu_w = 100\pi$ do równania (33.35), otrzymujemy:

$$I_R = (0,18 \, \text{A}) \sin(100\pi t). \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 3: Jeżeli zwiększymy częstotliwość SEM w obwodzie z obciążeniem czysto oporowym, to czy: a) amplituda $U_{R \max}$, b) amplituda $I_{R \max}$ zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie taka sama?

Obciążenie pojemnościowe

Na rysunku 33.9a przedstawiono obwód, składający się z kondensatora i źródła prądu zmiennego o SEM wyrażonej wzorem (33.28). Stosując drugie prawo Kirchhoffa i postępując, jak przy wyprowadzaniu wzoru (33.30), znajdujemy napięcie na okładkach kondensatora:

$$U_C = U_{C \max} \sin \omega_w t, \quad (33.36)$$

gdzie $U_{C \max}$ jest amplitudą zmiennego napięcia na kondensatorze. Z definicji pojemności wynika:

$$q_C = CU_C = CU_{C \max} \sin \omega_w t. \quad (33.37)$$

Interesuje nas jednak natężenie prądu, a nie ładunek. Dlatego różniczkujemy równanie (33.37) i otrzymujemy:

$$I_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_w CU_{C \max} \cos \omega_w t. \quad (33.38)$$

Dokonyamy teraz dwóch modyfikacji równania (33.38). Po pierwsze, aby zachować symetrię oznaczeń, wprowadzamy wielkość X_C , nazywaną **reaktancją pojemnościową** kondensatora i zdefiniowaną jako:

$$X_C = \frac{1}{\omega_w C} \quad (\text{reaktancja pojemnościowa}). \quad (33.39)$$

Jej wartość zależy nie tylko od pojemności, ale także od częstości kołowej drgań wymuszonych ω_w . Wiemy z definicji pojemnościowej stałej czasowej ($\tau = RC$), że jednostka pojemności C może być wyrażona w układzie SI jako sekunda podzielona przez om. Podstawienie tej jednostki do wzoru (33.39) prowadzi do wniosku, że jednostką X_C w układzie SI jest *om*, dokładnie tak, jak dla oporu R .

Po drugie, zastępujemy $\cos \omega_w t$ w równaniu (33.38) funkcją sinus, przesuniętą w fazie:

$$\cos \omega_w t = \sin(\omega_w t + 90^\circ).$$

Możesz sprawdzić tę tożsamość, przesuwając wykres funkcji sinus o 90° w kierunku ujemnym.

Po tych dwóch modyfikacjach równanie (33.38) przyjmuje postać:

$$I_C = \left(\frac{U_{C \max}}{X_C} \right) \sin(\omega_w t + 90^\circ). \quad (33.40)$$

Korzystając z równania (33.29), możemy również zapisać natężenie prądu I_C płynącego przez kondensator C jako:

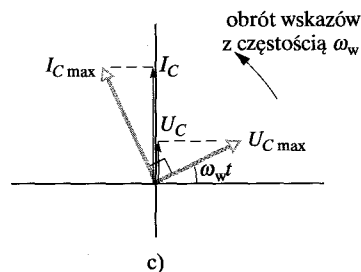
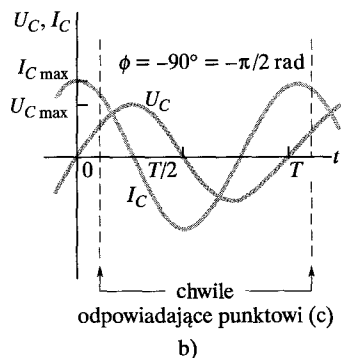
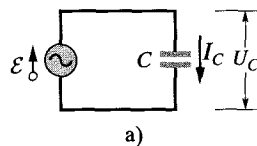
$$I_C = I_{C \max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.41)$$

gdzie $I_{C \max}$ jest amplitudą I_C . Porównując równania (33.40) i (33.41), widzimy, że dla czysto pojemnościowego obciążenia faza początkowa natężenia prądu jest równa -90° . Widzimy również, że amplitudy napięcia i natężenia prądu związane są zależnością:

$$U_{C \max} = I_{C \max} X_C \quad (\text{kondensator}) \quad (33.42)$$

Chociaż wyprowadziliśmy tę zależność dla obwodu z rysunku 33.9a, jest ona słuszna dla dowolnej pojemności w dowolnym obwodzie.

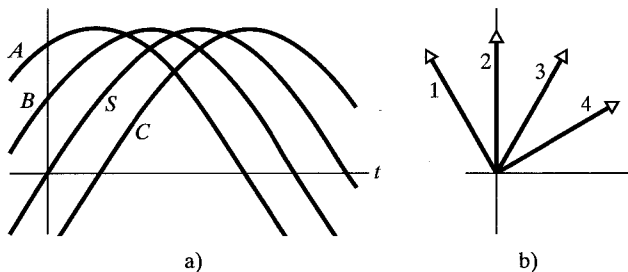
Porównanie wzorów (33.36) i (33.40) lub rzut oka na rysunek 33.9b wskazuje, że wielkości U_C i I_C są przesunięte w fazie o 90° , co odpowiada jednej czwartej okresu. Widzimy ponadto, że I_C wyprzedza U_C . Oznacza to, że gdybyśmy śledzili natężenie prądu U_C i napięcie U_C w obwodzie na rysunku 33.9a, to okazałoby się, że I_C osiąga maksimum ćwierć okresu przed U_C .



Rys. 33.9. a) Kondensator dołączony jest do źródła prądu zmiennego. b) Natężenie prądu w kondensatorze wyprzedza napięcie o 90° ($= \pi/2$ rad). c) Diagram wektorowy pokazujący tę samą sytuację

Ten związek między I_C i U_C pokazany jest w postaci diagramu wskazowego na rysunku 33.9c. Gdy wskaźy przedstawiające te dwie wielkości obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, wskaz oznaczony jako $I_{C\max}$ rzeczywiście wyprzedza wskaz oznaczony jako $U_{C\max}$ o kąt równy 90° . Oznacza to, że wskaz $I_{C\max}$ pokryje się z osią pionową ćwierć okresu przed wskazem $U_{C\max}$. Przekonaj się, że diagram wskazowy na rysunku 33.9c jest zgodny ze wzorami (33.36) i (33.40).

SPRAWDZIAN 4: Na rysunku (a) pokazano wykres funkcji $S(t) = \sin(\omega_w t)$ i trzech innych krzywych sinusoidalnych $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ o postaci $\sin(\omega_w t - \phi)$. a) Uszereguj te trzy krzywe według wartości ϕ , zaczynając od największej (dodatniej) wartości, a kończąc na najmniejszej (ujemnej). b) Przyporządkuj poszczególne krzywe wskazom na rysunku (b). c) Która krzywa wyprzedza pozostałe?



Przykład 33.5

Obciążenie czysto pojemnościowe. Na rysunku 33.9a pojemność C jest równa $18 \mu\text{F}$, a źródło wytwarza sinusoidalnie zmienną SEM o amplitudzie $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i częstotliwości $\nu_w = 50 \text{ Hz}$.

a) Jakie jest napięcie $U_C(t)$ na kondensatorze i amplituda $U_{C\max}$ napięcia $U_C(t)$?

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do obwodu na rysunku 33.9a, to przekonamy się, że $\bullet \rightarrow$ w obwodzie z obciążeniem czysto pojemnościowym napięcie $U_C(t)$ na kondensatorze jest zawsze równe SEM $\mathcal{E}(t)$, wytwarzanej przez źródło. Tak więc, $U_C(t) = \mathcal{E}(t)$ i $U_{C\max} = \mathcal{E}_{\max}$. Ponieważ $\mathcal{E}_{\max}$ jest dane, możemy napisać:

$$U_{C\max} = \mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V.} \quad (\text{odpowiedź})$$

W celu znalezienia $U_C(t)$ stosujemy równanie (33.28) i zapisujemy:

$$U_C(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t, \quad (33.43)$$

a następnie podstawiamy $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i $\omega_w = 2\pi\nu_w = 2\pi(50 \text{ Hz}) = 100\pi$ do równania (33.43), otrzymując:

$$U_C(t) = (36 \text{ V}) \sin(100\pi t). \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jakie jest natężenie prądu $I_C(t)$ w obwodzie i amplituda $I_{C\max}$ natężenia prądu $I_C(t)$?

ROZWIĄZANIE:

1. W obwodzie prądu zmiennego z czysto pojemnościowym obciążeniem zmienne natężenie prądu $I_C(t)$, płynącego przez kondensator, wyprzedza zmienne napięcie $U_C(t)$ o 90° , tzn. faza początkowa ϕ dla natężenia prądu jest równa -90° , czyli $-\pi/2$ rad. Możemy więc zapisać równanie 33.29 w postaci:

$$I_C = I_{C\max} \sin(\omega_w t - \phi) = I_{C\max} \sin(\omega_w t + \pi/2). \quad (33.44)$$

2. Amplitudę $I_{C\max}$ można znaleźć z równania (33.42) ($U_{C\max} = I_{C\max} X_C$), jeśli najpierw obliczymy reaktancję pojemnościową X_C . Z równania (33.39) ($X_C = 1/\omega_w C$), pamiętając że $\omega_w = 2\pi\nu_w$, otrzymujemy:

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu_w C} = \frac{1}{(2\pi)(50 \text{ Hz})(18 \cdot 10^{-6} \text{ F})} = 177 \Omega.$$

Zatem z równania (33.42) wynika, że amplituda natężenia prądu wynosi:

$$I_{C\max} = \frac{U_{C\max}}{X_C} = \frac{36 \text{ V}}{177 \Omega} = 0,203 \text{ A.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Podstawiając tę wartość i $\omega_w = 2\pi\nu_w = 100\pi$ do równania (33.44), otrzymujemy:

$$I_C = (0,203 \text{ A}) \sin(100\pi t + \pi/2). \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 5: Jeżeli zwiększymy częstotliwość źródła w obwodzie z obciążeniem czysto pojemnościowym, to czy: a) amplituda $U_{C\max}$, b) amplituda $I_{C\max}$ zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie taka sama?

Obciążenie indukcyjne

Na rysunku 33.10a przedstawiono obwód, składający się z cewki i źródła prądu zmiennego o SEM wyrażonej wzorem (33.28). Stosując drugie prawo Kirchhoffa i postępując, jak przy wyprowadzaniu wzoru (33.30), znajdujemy napięcie na cewce:

$$U_L = U_{L\max} \sin \omega_w t, \quad (33.45)$$

gdzie $U_{L\max}$ jest amplitudą U_L . Napięcie na cewce o indukcyjności L , w której natężenie prądu zmienia się z szybkością dI_L/dt , może być zapisane na podstawie wzoru (31.37) jako:

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}. \quad (33.46)$$

Łącząc równania (33.45) i (33.46), otrzymujemy:

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{U_{L\max}}{L} \sin \omega_w t. \quad (33.47)$$

Interesuje nas jednak natężenie prądu, a nie jego pochodna względem czasu. Dlatego całkujemy równanie (33.47), aby otrzymać:

$$I_L = \int dI_L = \frac{U_{L\max}}{L} \int \sin \omega_w t dt = -\left(\frac{U_{L\max}}{\omega_w L}\right) \cos \omega_w t. \quad (33.48)$$

Dokonyamy teraz dwóch modyfikacji tego równania. Po pierwsze, aby zachować symetrię oznaczeń, wprowadzamy wielkość X_L , nazywaną **reaktancją indukcyjną** cewki i zdefiniowaną jako:

$$X_L = \omega_w L \quad (\text{reaktancja indukcyjna}). \quad (33.49)$$

Wartość X_L zależy od częstości kołowej źródła ω_w . Jednostka indukcyjnej stałej czasowej τ_L wskazuje, że jednostką X_L w układzie SI jest *om*, dokładnie tak, jak dla X_C i R .

Po drugie, zastępujemy $-\cos \omega_w t$ w równaniu (33.48) funkcją sinus przesuniętą w fazie:

$$-\cos \omega_w t = \sin(\omega_w t - 90^\circ).$$

Możesz sprawdzić tę tożsamość, przesuwając wykres funkcji sinus o 90° w kierunku dodatnim.

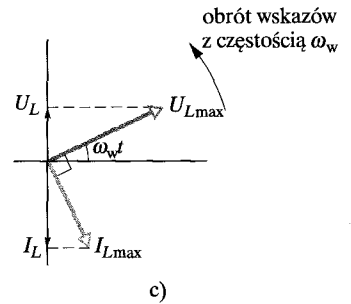
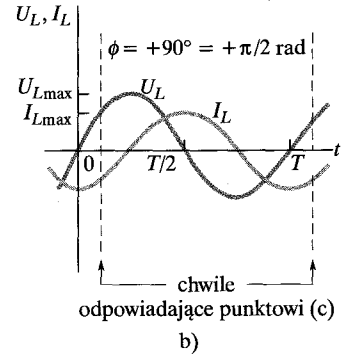
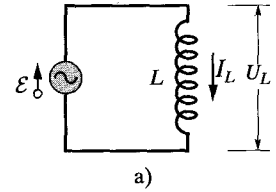
Po tych dwóch modyfikacjach równanie (33.48) przyjmuje postać:

$$I_L = \left(\frac{U_{L\max}}{X_L}\right) \sin(\omega_w t - 90^\circ). \quad (33.50)$$

Stosując równanie (33.29), możemy również zapisać natężenie prądu I_L płynącego przez cewkę jako:

$$I_L = I_{L\max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.51)$$

gdzie $I_{L\max}$ jest amplitudą I_L . Porównując równania (33.50) i (33.51), widzimy, że dla czysto indukcyjnego obciążenia faza początkowa natężenia prądu jest równa $+90^\circ$. Widzimy również, że amplitudy napięcia i natężenia prądu związane są zależnością:



Rys. 33.10. a) Cewka dołączona jest do źródła prądu zmiennego. b) Natężenie prądu w cewce opóźnia się względem napięcia o $90^\circ (= \pi/2 \text{ rad})$. c) Diagram wektorowy pokazujący tę samą sytuację

$$U_{L \max} = I_{L \max} X_L \quad (\text{cewka}). \quad (33.52)$$

Chociaż wyprowadziliśmy tę zależność dla obwodu na rysunku 33.10a, jest ona słuszna dla dowolnej indukcyjności w dowolnym obwodzie.

Porównanie wzorów (33.45) i (33.50) lub przyjrzenie się rysunkowi 33.10b wskazuje, że wielkości I_L i U_L są przesunięte w fazie o 90° . W tym przypadku jednak I_L opóźnia się w stosunku do U_L . Oznacza to, że gdybyśmy śledzili natężenie prądu I_L i napięcie U_L w obwodzie na rysunku 33.10a, to okazałoby się, że I_L osiąga maksimum ćwierć okresu po U_L .

Tę samą informację zawiera również diagram wskazowy, przedstawiony na rysunku 33.10c. Gdy wskazzy obracają się razem w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, wskaz oznaczony jako $I_{L \max}$ rzeczywiście opóźnia się o kąt równy 90° względem wskazu oznaczonego jako $U_{L \max}$. Przekonaj się, że rysunek 33.10c odpowiada równaniom (33.45) i (33.50).

Sztuka rozwiązywania zadań

Porada 1: Przesunięcie fazy w obwodach prądu zmiennego

W tabeli 33.2 zestawiono zależności między natężeniem prądu I a napięciem U dla każdego z trzech dotychczas omówionych rodzajów obwodów. Kiedy przyłożone zmienne napięcie powoduje

przepływ prądu zmiennego, natężenie prądu ma taką samą fazę jak napięcie na oporniku, wyprzedza napięcie na kondensatorze, a opóźnia się względem napięcia na cewce.

Tabela 33.2. Zależności fazowe i amplitudowe dla zmiennych natężeń prądu i napięć

Element obwodu	Symbol	Opór lub reaktancja	Natężenie prądu	Faza początkowa ϕ	Związek amplitud
opornik	R	R	w takiej samej fazie jak U_R	$0^\circ (= 0 \text{ rad})$	$U_{R \max} = I_{R \max} R$
kondensator	C	$X_C = 1/\omega_w C$	wyprzedza U_C o $90^\circ (= \pi/2 \text{ rad})$	$-90^\circ (= -\pi/2 \text{ rad})$	$U_{C \max} = I_{C \max} X_C$
cewka	L	$X_L = \omega_w L$	opóźnia się względem U_L o $90^\circ (= \pi/2 \text{ rad})$	$+90^\circ (= +\pi/2 \text{ rad})$	$U_{L \max} = I_{L \max} X_L$

Przykład 33.6

Obciążenie czysto indukcyjne. Na rysunku 33.10a indukcyjność L jest równa 276 mH, a źródło wytwarza sinusoidalnie zmienną SEM o amplitudzie $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i częstotliwości $\nu_w = 50 \text{ Hz}$.

a) Jakie jest napięcie $U_L(t)$ na cewce i amplituda $U_{L \max}$ napięcia $U_L(t)$?

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do obwodu na rysunku 33.10a, to przekonamy się, że  w obwodzie z obciążeniem czysto indukcyjnym napięcie $U_L(t)$ na cewce jest zawsze równe SEM $\mathcal{E}(t)$ wytwarzanej przez źródło. Tak więc, $U_L(t) = \mathcal{E}(t)$ i $U_{L \max} = \mathcal{E}_{\max}$. Ponieważ $\mathcal{E}_{\max}$ jest dane, możemy

napisać:

$$U_{L \max} = \mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}. \quad (\text{odpowiedź})$$

W celu znalezienia $U_L(t)$ stosujemy równanie (33.28) i zapisujemy:

$$U_L(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t, \quad (33.53)$$

a następnie podstawiamy $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i $\omega_w = 2\pi\nu_w = 2\pi(50 \text{ Hz}) = 100\pi$ do równania (33.53), otrzymując:

$$U_L(t) = (36 \text{ V}) \sin(100\pi t). \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jakie jest natężenie prądu $I_L(t)$ w obwodzie i amplituda $I_{L \max}$ natężenia prądu $I_L(t)$?

ROZWIĄZANIE:

 1. W obwodzie prądu zmiennego z czysto indukcyjnym obciążeniem zmienne natężenie prądu $I_L(t)$ płynącego przez cewkę

opóźnia się względem zmiennego napięcia $U_L(t)$ o 90° . Tak więc faza początkowa ϕ dla natężenia prądu jest równa $+90^\circ$, czyli $+\pi/2$ rad i równanie (33.29) możemy zapisać w postaci:

$$I_L = I_{L\max} \sin(\omega_w t - \phi) = I_{L\max} \sin(\omega_w t - \pi/2). \quad (33.54)$$

2. Amplitudę $I_{L\max}$ możemy obliczyć z równania (33.52) ($U_{L\max} = I_{L\max} X_L$), jeśli najpierw obliczymy reaktancję indukcyjną X_L . Z równania (33.49) ($X_L = \omega_w L$), pamiętając, że $\omega_w = 2\pi\nu_w$, otrzymujemy:

$$X_L = 2\pi\nu_w L = (2\pi)(50 \text{ Hz})(276 \cdot 10^{-3} \text{ H}) = 86,7 \, \Omega.$$

Zatem z równania (33.52) wynika, że amplituda natężenia prądu wynosi:

$$I_{L\max} = \frac{U_{L\max}}{X_L} = \frac{36 \text{ V}}{86,7 \, \Omega} = 0,415 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podstawiając tę wartość i $\omega_w = 2\pi\nu_w = 100\pi$ do równania (33.54), otrzymujemy:

$$I_L = (0,415 \text{ A}) \sin(100\pi t - \pi/2). \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 6: Jeżeli zwiększymy częstotliwość źródła w obwodzie z obciążeniem czysto indukcyjnym, to czy: a) amplituda $U_{L\max}$, b) amplituda $I_{L\max}$ zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie taka sama?

33.9. Obwód szeregowy RLC

Jesteśmy teraz przygotowani do tego, aby zmienną SEM, opisaną wzorem (33.28):

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t \quad (\text{przyłożona SEM}) \quad (33.55)$$

przyłożyć do pełnego obwodu RLC , przedstawionego na rysunku 33.7. Elementy R , L i C są połączone szeregowo, a więc przez każdy z nich płynie ten sam prąd o natężeniu:

$$I = I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi). \quad (33.56)$$

Naszym zadaniem jest wyznaczenie amplitudy $I_{\max}$ i początkowej fazy ϕ natężenia prądu. Rozwiązanie ułatwią nam diagramy wskazowe.

Amplituda natężenia prądu

Przeanalizujmy najpierw rysunek 33.11a, na którym przedstawiono wskaz odpowiadający natężeniu prądu, określonego wzorem (33.56) w pewnej chwili t . Długość wskaz oznacza amplitudę $I_{\max}$, rzut wskaz na oś pionową — wartość natężenia prądu I w chwili t , a kąt obrotu wskaz — fazę $\omega_w t - \phi$ natężenia prądu w chwili t .

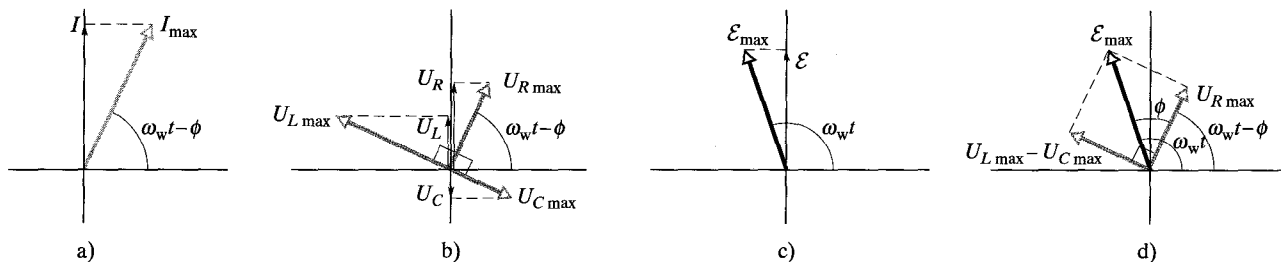
Na rysunku 33.11b przedstawiono wskaz odpowiadający napięciom na elementach R , L i C w tej samej chwili t . Kąt, jaki tworzy każdy z nich ze wskazem, odpowiadającym natężeniu prądu $I_{\max}$ (rys. 33.11a) jest zgodny z tabelą 33.2:

Opornik: Natężenie prądu ma taką samą fazę co napięcie, tak więc kąt obrotu wskaz napięcia $U_{R\max}$ jest taki sam, jak kąt obrotu wskaz $I_{\max}$.

Kondensator: Natężenie prądu wyprzedza napięcie o 90° , tak więc kąt obrotu wskaz napięcia $U_{C\max}$ jest o 90° mniejszy od kąta obrotu wskaz $I_{\max}$.

Cewka: Natężenie prądu opóźnia się względem napięcia o 90° , tak więc kąt obrotu wskaz napięcia $U_{L\max}$ jest o 90° większy od kąta obrotu wskaz $I_{\max}$.

Na rysunku 33.11b pokazano także chwilowe wartości napięć U_R , U_C i U_L na elementach R , C i L w chwili t . Te napięcia są określone rzutami odpowiednich wskazów na oś pionową wykresu.



Rys. 33.11. a) Wskaz odpowiadający natężeniu prądu zmiennego w obwodzie RLC na rysunku 33.7 w chwili t . Pokazana jest amplituda $I_{\max}$, wartość chwilowa I i faza $(\omega_w t - \phi)$. b) Wskazy odpowiadające napięciom na cewce, oporniku i kondensatorze, zorientowane w stosunku do wskazu natężenia prądu na rysunku (a). c) Wskaz odpowiadający zmiennej SEM wytwarzającej prąd o natężeniu przedstawionym na rysunku (a). d) Wskaz SEM jest równy wektorowej sumie trzech wskazów napięcia z rysunku (b). Dodano tutaj wskazy $U_{L \max}$ i $U_{C \max}$, aby otrzymać wskaz wypadkowy $(U_{L \max} - U_{C \max})$

Na rysunku 33.11c przedstawiono wskaz odpowiadający przyłożonej SEM (wzór (33.55)). Długość wskazu oznacza amplitudę SEM $\mathcal{E}_{\max}$, rzut wskazu na oś pionową — wartość $\mathcal{E}$ w chwili t , a kąt obrotu wskazu — fazę $\omega_w t$ SEM w chwili t .

Z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że w dowolnej chwili suma napięć U_R , U_C i U_L jest równa przyłożonej SEM $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = U_R + U_C + U_L. \quad (33.57)$$

Tak więc w chwili t rzut $\mathcal{E}$ na rysunku 33.11c jest równy algebraicznej sumie rzutów U_R , U_C i U_L na rysunku 33.11b. Równość ta jest spełniona w każdej chwili, gdyż wskazy wirują wspólnie. Oznacza to, że wskaz $\mathcal{E}_{\max}$ na rysunku 33.11c musi być równy wektorowej sumie trzech wskazów napięcia $U_{R \max}$, $U_{C \max}$ i $U_{L \max}$ na rysunku 33.11b.

Ten warunek zilustrowano na rysunku 33.11d, gdzie wskaz $\mathcal{E}_{\max}$ jest narysowany jako suma wskazów $U_{R \max}$, $U_{L \max}$ i $U_{C \max}$. Wskazy $U_{L \max}$ i $U_{C \max}$ są skierowane przeciwnie, obliczenie sumy wektorowej możemy zatem uprościć, dodając najpierw wskazy $U_{L \max}$ i $U_{C \max}$, aby otrzymać pojedynczy wskaz $U_{L \max} - U_{C \max}$. Następnie dodajemy ten pojedynczy wskaz i wskaz $U_{R \max}$, otrzymując wskaz wypadkowy. Ten wskaz wypadkowy jest oczywiście równy $\mathcal{E}_{\max}$.

Obydwa trójkąty na rysunku 33.11d są trójkątami prostokątnymi. Stosując twierdzenie Pitagorasa do któregośkolwiek z nich, otrzymujemy:

$$\mathcal{E}_{\max}^2 = U_{R \max}^2 + (U_{L \max} - U_{C \max})^2. \quad (33.58)$$

Biorąc pod uwagę związki amplitud zamieszczone w tabeli 33.2, równanie to można napisać jako:

$$\mathcal{E}_{\max}^2 = (I_{\max} R)^2 + (I_{\max} X_L - I_{\max} X_C)^2, \quad (33.59)$$

a następnie przekształcić do postaci:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (33.60)$$

Mianownik wyrażenia (33.60) nazywamy **impedancją** Z obwodu, dla określonej częstotliwości kołowej drgań wymuszonych ω_w :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{definicja impedancji}). \quad (33.61)$$

Możemy więc zapisać równanie (33.60) jako:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z}. \quad (33.62)$$

Jeżeli podstawimy za X_C i X_L wyrażenia (33.39) i (33.49), to równanie (33.60) może być zapisane w sposób bardziej czytelny:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega_w L - 1/\omega_w C)^2}} \quad (\text{amplituda natężenia prądu}). \quad (33.63)$$

W tym momencie nasze zadanie zostało wykonane w połowie: znaleźliśmy wyrażenie określające amplitudę natężenia prądu $I_{\max}$ jako funkcję przyłożonej SEM i elementów obwodu szeregowego RLC .

Wartość $I_{\max}$ zależy od różnicy między $\omega_w L$ a $1/\omega_w C$ w równaniu (33.63) lub, co jest równoważne, od różnicy między X_L a X_C w równaniu (33.60). W obydwu równaniach nie ma przy tym znaczenia, która z dwóch wielkości jest większa, ponieważ ich różnica jest zawsze podniesiona do kwadratu.

Prąd omawiany w tym paragrafie jest prądem w *stanie ustalonym*, czyli prądem, który ustala się w obwodzie, gdy zmienna SEM jest przyłożona przez pewien czas. Bezpośrednio po dołączeniu SEM do obwodu pojawia się krótkotrwały *stan przejściowy*. W tym stanie elementy indukcyjne i pojemnościowe „zaczynają działać”, a czas trwania stanu przejściowego (przed osiągnięciem stanu ustalonego) jest określony stałymi czasowymi $\tau_L = L/R$ i $\tau_C = RC$. Natężenie prądu w stanie przejściowym może być duże i może na przykład uszkodzić silnik elektryczny podczas jego uruchamiania, jeżeli stanów przejściowych nie uwzględniono przy projektowaniu obwodów silnika.

Faza początkowa

Analizując trójkąt, utworzony przez wskaźy po prawej stronie rysunku 33.11d i korzystając z tabeli 33.2, możemy napisać:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{U_{L \max} - U_{C \max}}{U_{R \max}} = \frac{I_{\max} X_L - I_{\max} X_C}{I_{\max} R}, \quad (33.64)$$

skąd

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (\text{faza początkowa}). \quad (33.65)$$

To jest druga połowa naszego zadania: równanie określające fazę początkową ϕ w szeregowym obwodzie RLC , pobudzonym sinusoidalnie. W istocie równanie to daje nam trzy różne wyniki dla fazy początkowej, w zależności od względnych wartości X_L i X_C :

$X_L > X_C$: o takim obwodzie mówimy, że ma *charakter indukcyjny*. Z równania (33.65) wynika, że w tym przypadku faza ϕ jest dodatnia, co oznacza, że wskaz $I_{\max}$ wiruje za wskazem $\mathcal{E}_{\max}$ (rys. 33.12a). Wykres $\mathcal{E}$ i I jako funkcji czasu jest podobny do przedstawionego na rysunku 33.12b. (Rysunki 33.11c i d zostały wykonane przy założeniu, że $X_L > X_C$).

$X_C > X_L$: o takim obwodzie mówimy, że ma *charakter pojemnościowy*. Z równania (33.65) wynika, że w tym przypadku faza ϕ jest ujemna, co oznacza, że wskaz $I_{\max}$ wiruje przed wskazem $\mathcal{E}_{\max}$ (rys. 33.12c). Wykres $\mathcal{E}$ i I jako funkcji czasu jest podobny do przedstawionego na rysunku 33.12d.

$X_C = X_L$: o takim obwodzie mówimy, że jest w *rezonansie*, czyli w stanie, który omówimy za chwilę. Z równania (33.65) wynika, że w tym przypadku $\phi = 0^\circ$, co oznacza, że wskaźy $\mathcal{E}_{\max}$ i $I_{\max}$ wirują razem (rys. 33.12e). Wykres $\mathcal{E}$ i I jako funkcji czasu jest podobny do przedstawionego na rysunku 33.12f.

Jako przykład przeanalizujemy dwa krańcowe przypadki: W obwodzie *czysto indukcyjnym* na rysunku 33.10a, gdzie X_L jest różne od zera, a $X_C = R = 0$, z równania (33.65) wynika, że $\phi = +90^\circ$ (największa możliwa wartość ϕ), zgodnie z rysunkiem 33.10c. W obwodzie *czysto pojemnościowym* na rysunku 33.9a, gdzie X_C jest różne od zera, a $X_L = R = 0$, z równania (33.65) wynika, że $\phi = -90^\circ$ (najmniejsza możliwa wartość ϕ), zgodnie z rysunkiem 33.9c.

Rezonans

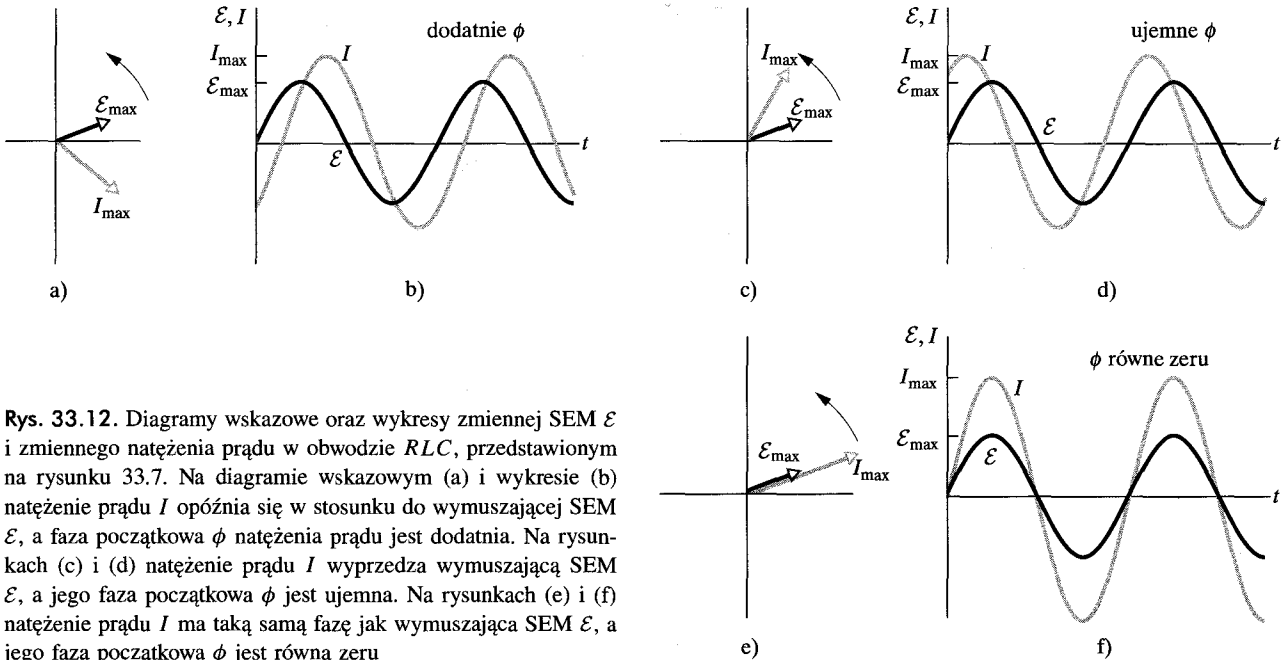
Równanie (33.63) przedstawia amplitudę $I_{\max}$ natężenia prądu w obwodzie RLC jako funkcję częstości kołowej ω_w zewnętrznego źródła zmiennej SEM. Dla danego oporu R amplituda osiąga maksimum, gdy wyrażenie $\omega_w L - 1/\omega_w C$ w mianowniku jest równe zero, tzn. wtedy, gdy:

$$\omega_w L = \frac{1}{\omega_w C},$$

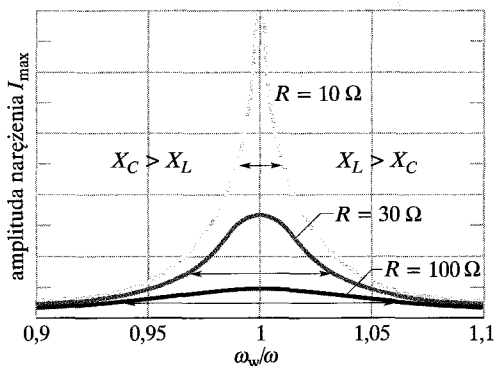
czyli

$$\omega_w = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{maksimum } I). \quad (33.66)$$

Częstość kołowa drgań swobodnych ω w obwodzie RLC jest także równa $1/\sqrt{LC}$, zatem maksymalna wartość $I_{\max}$ występuje wtedy, gdy częstość kołowa drgań wymuszonych odpowiada częstości kątowej drgań swobodnych, tzn. w rezo-



Rys. 33.12. Diagramy wskazowe oraz wykresy zmiennej SEM $\mathcal{E}$ i zmiennego natężenia prądu w obwodzie RLC , przedstawionym na rysunku 33.7. Na diagramie wskazowym (a) i wykresie (b) natężenie prądu I opóźnia się w stosunku do wymuszającej SEM $\mathcal{E}$, a faza początkowa ϕ natężenia prądu jest dodatnia. Na rysunkach (c) i (d) natężenie prądu I wyprzedza wymuszającą SEM $\mathcal{E}$, a jego faza początkowa ϕ jest ujemna. Na rysunkach (e) i (f) natężenie prądu I ma taką samą fazę jak wymuszająca SEM $\mathcal{E}$, a jego faza początkowa ϕ jest równa zero



Rys. 33.13. Krzywe rezonansowe obwodu RLC z rysunku 33.7, otrzymane dla $L = 100 \mu\text{H}$, $C = 100 \text{ pF}$ i trzech wartości R . Amplituda I_{max} natężenia prądu zmiennego zależy od tego, jak bliska częstotliwości kołowej drgań swobodnych ω jest częstotliwość kołowa drgań wymuszonych ω_w . Poziome strzałki przy każdej krzywej wskazują jej szerokość w połowie maksimum, co jest miarą ostrości rezonansu. Po lewej stronie punktu $\omega_w/\omega = 1$ obwód ma charakter pojemnościowy ($X_C > X_L$), po prawej zaś — charakter indukcyjny ($X_L > X_C$).

nansie. Zatem w obwodzie RLC rezonans i maksimum amplitudy I_{max} natężenia prądu występuje dla:

$$\omega_w = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{rezonans}). \quad (33.67)$$

Na rysunku 33.13 pokazano trzy krzywe rezonansowe dla drgań sinusoidalnych, w trzech szeregowych obwodach RLC , różniących się tylko wartością R . Każda krzywa osiąga maksimum amplitudy I_{max} natężenia prądu, gdy stosunek ω_w/ω jest równy 1. Jednakże maksymalna wartość I_{max} maleje wraz ze wzrostem R (maksymalna wartość I_{max} jest zawsze równa $\mathcal{E}/R$; aby zobaczyć, że tak jest, podstaw równanie (33.61) do równania (33.62)). Ponadto szerokość krzywych wzrasta wraz ze wzrostem R (szerokość krzywych na rysunku 33.13 jest mierzona w połowie maksymalnej wartości I_{max}).

Aby zrozumieć sens fizyczny rysunku 33.13, zastanówmy się, jak zmieniają się wartości reaktancji X_L i X_C , gdy zwiększamy częstotliwość drgań wymuszonych ω_w , zaczynając od wartości znacznie mniejszych od częstotliwości kołowej drgań swobodnych ω . Dla małych wartości ω_w reaktancja $X_L (= \omega_w L)$ jest mała, a reaktancja $X_C (= 1/\omega_w C)$ jest duża. Tak więc obwód ma charakter pojemnościowy, a o impedancji decyduje duża wartość X_C , która powoduje, że natężenie prądu jest małe.

Gdy zwiększamy ω_w , reaktancja X_C ciągle przeważa, ale jej wartość maleje, podczas gdy wartość reaktancji X_L rośnie. Zmniejszenie wartości ich różnicy X_C powoduje zmniejszenie impedancji, a zatem wzrost natężenia prądu, co widzimy po lewej stronie każdej krzywej rezonansowej na rysunku 33.13. Gdy rosnąca reaktancja X_L i malejąca reaktancja X_C osiągną taką samą wartość, natężenie prądu osiąga maksimum, a obwód jest w rezonansie, co zachodzi przy $\omega_w = \omega$.

Jeśli dalej będziemy zwiększać ω_w , to rosnąca reaktancja X_L zaczyna przeważać nad malejącą reaktancją X_C . Całkowita impedancja rośnie na skutek wzrostu ich różnicy, a natężenie prądu maleje, co widać po prawej stronie każdej krzywej rezonansowej na rysunku 33.13. Podsumowując: dla małych częstotliwości kołowych o przebiegu krzywej rezonansowej decyduje reaktancja pojemnościowa, dla dużych częstotliwości kołowych decyduje reaktancja indukcyjna, a rezonans występuje dla średnich częstotliwości (gdy reaktancje X_L i X_C są sobie równe).



SPRAWDZIAN 7: Dla trzech pobudzanych sinusoidalnie szeregowych obwodów RLC impedancje pojemnościowe i indukcyjne wynoszą odpowiednio: 1) $50\ \Omega$, $100\ \Omega$; 2) $100\ \Omega$, $50\ \Omega$; 3) $50\ \Omega$, $50\ \Omega$. a) Czy w danym obwodzie natężenie prądu wyprzedza przyłożoną SEM, opóźnia się w stosunku do niej, czy obie wielkości mają jednakową fazę? b) Który obwód jest w rezonansie?

Przykład 33.7

Przyjmijmy, że na rysunku 33.7 $R = 200\ \Omega$, $C = 18\ \mu\text{F}$, $L = 276\ \text{mH}$, $\nu_w = 50\ \text{Hz}$, a $\mathcal{E}_{\text{max}} = 36\ \text{V}$. (Są to dane, z których korzystaliśmy poprzednio w przykładach 33.4, 33.5 i 33.6).

a) Jaka jest amplituda I_{max} natężenia prądu?

ROZWIĄZANIE:

☛ Zgodnie z równaniem (33.62) amplituda I_{max} natężenia prądu zależy od amplitudy $\mathcal{E}_{\text{max}}$ wymuszającej SEM i od impedancji Z w obwodzie ($I_{\text{max}} = \mathcal{E}_{\text{max}}/Z$). Zatem powinniśmy obliczyć Z w zależności od oporu R , reaktancji pojemnościowej X_C i reaktancji indukcyjnej X_L obwodu.

Całkowitym oporem w obwodzie jest znany opór R . Całkowita reaktancja pojemnościowa obwodu wynika ze znanej pojemności i wynosi $X_C = 177\ \Omega$ (przykład 33.5). Całkowita reaktancja indukcyjna obwodu wynika ze znanej indukcyjności i wynosi $X_L = 86,7\ \Omega$ (przykład 33.6). Tak więc impedancja obwodu jest równa:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ = \sqrt{(200\ \Omega)^2 + (86,7\ \Omega - 177\ \Omega)^2} = 219\ \Omega.$$

Stąd:

$$I_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{Z} = \frac{36\ \text{V}}{219\ \Omega} = 0,164\ \text{A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaka jest faza początkowa ϕ natężenia prądu w obwodzie, w stosunku do wymuszającej SEM?

ROZWIĄZANIE:

☛ Zgodnie z równaniem (33.65) faza początkowa zależy od reaktancji indukcyjnej, reaktancji pojemnościowej i oporu obwodu. Rozwiązując to równanie względem ϕ , otrzymujemy:

$$\phi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{86,7\ \Omega - 177\ \Omega}{200\ \Omega} \\ = -24,3^\circ = -0,424\ \text{rad}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Ujemna wartość fazy początkowej jest zgodna z tym, że obciążenie ma charakter pojemnościowy, tzn. $X_C > X_L$. Natężenie prądu wyprzedza SEM źródła.

33.10. Moc w obwodach prądu zmiennego

W obwodzie RLC , przedstawionym na rysunku 33.7, energia jest dostarczana przez źródło prądu zmiennego. Pewna część dostarczonej energii jest gromadzona w polu elektrycznym kondensatora, inna część — w polu magnetycznym cewki, jeszcze inna jest rozpraszana na oporniku jako energia termiczna. W rozważanym przez nas stanie ustalonym średnia energia, gromadzona łącznie w kondensatorze i w cewce, pozostaje stała. Tak więc energia elektromagnetyczna przekazywana jest od źródła do opornika, gdzie ulega rozproszeniu w postaci energii termicznej.

Stosując równania (27.22) i (33.29) chwilową szybkość rozpraszania energii na oporniku (czyli moc chwilową) można zapisać jako:

$$P = I^2 R = [I_{\text{max}} \sin(\omega_w t - \phi)]^2 R = I_{\text{max}}^2 R \sin^2(\omega_w t - \phi), \quad (33.68)$$

natomiast *średnia* szybkość rozpraszania energii na oporniku (czyli moc średnia) jest równa uśrednionej w czasie wartości wyrażenia (33.68). W czasie jednego pełnego okresu średnia wartość funkcji $\sin \theta$, gdzie θ może oznaczać dowolną zmienną, jest równa zeru (rys. 33.14a), ale średnia wartość funkcji $\sin^2 \theta$ wynosi $\frac{1}{2}$ (rys. 33.14b). (Zauważ na rys. 33.14b, że zacieniowane obszary pod krzywą,

znajdujące się nad prostą poziomą, oznaczoną $+1/2$, wypełniają dokładnie niezacieniowane miejsca pod tą prostą). Tak więc na podstawie równania (33.68) możemy napisać:

$$P_{\text{sr}} = \frac{I_{\text{max}}^2 R}{2} = \left(\frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \right)^2 R. \quad (33.69)$$

Wyrażenie $I_{\text{max}}/\sqrt{2}$ nazywamy **wartością skuteczną** natężenia prądu I :

$$I_{\text{sk}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad (\text{wartość skuteczna natężenia prądu}). \quad (33.70)$$

Możemy teraz napisać równanie (33.69) w postaci:

$$P_{\text{sr}} = I_{\text{sk}}^2 R \quad (\text{moc średnia}). \quad (33.71)$$

Równanie (33.71) jest bardzo podobne do równania (27.22) ($P = I^2 R$); stąd wniosek, że używając wartości skutecznej natężenia prądu możemy obliczyć średnią szybkość rozpraszania energii w obwodach prądu zmiennego (moc średnią) dokładnie w taki sam sposób, jak w obwodach prądu stałego.

Można również zdefiniować wartości skuteczne napięcie i SEM w obwodach prądu zmiennego:

$$U_{\text{sk}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \mathcal{E}_{\text{sk}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad (\text{wartości skuteczne napięcia i SEM}). \quad (33.72)$$

Przyrządy pomiarowe prądu zmiennego, takie jak amperomierze i woltomierze, pokazują zwykle wartości skuteczne I_{sk} , U_{sk} i $\mathcal{E}_{\text{sk}}$. Jeśli więc włączysz woltomierz prądu zmiennego do domowego gniazdka sieciowego i odczytasz 230 V, oznacza to napięcie skuteczne. *Maksymalna* wartość napięcia w gniazdku wynosi $\sqrt{2} \cdot (230 \text{ V})$, czyli 325 V.

Współczynnik proporcjonalności $1/\sqrt{2}$ we wzorach (33.70) i (33.72) jest taki sam dla wszystkich trzech zmiennych, zatem równania (33.62) i (33.60) mogą być zapisane jako:

$$I_{\text{sk}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad (33.73)$$

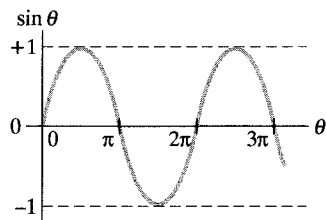
i w istocie jest to postać, jakiej prawie zawsze używamy.

Możemy zastosować związek $I_{\text{sk}} = \mathcal{E}_{\text{sk}}/Z$, aby przekształcić równanie (33.71) do równoważnej i użytecznej postaci:

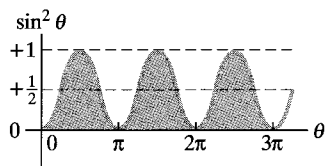
$$P_{\text{sr}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}}{Z} I_{\text{sk}} R = \mathcal{E}_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \frac{R}{Z}. \quad (33.74)$$

Z rysunku 33.11d, tabeli 33.2 i równania (33.62) wynika jednak, że R/Z jest równe cosinusowi fazy początkowej ϕ :

$$\cos \phi = \frac{U_{R \text{ max}}}{\mathcal{E}_{\text{max}}} = \frac{I_{\text{max}} R}{I_{\text{max}} Z} = \frac{R}{Z}. \quad (33.75)$$



a)



b)

Rys. 33.14. a) Wykres funkcji $\sin \theta$. Wartość uśredniona po okresie jest równa zera. b) Wykres funkcji $\sin^2 \theta$. Wartość uśredniona po okresie jest równa $\frac{1}{2}$

Równanie (33.74) przyjmuje więc postać:

$$P_{sr} = \mathcal{E}_{sk} I_{sk} \cos \phi \quad (\text{moc średnia}), \quad (33.76)$$

gdzie czynnik $\cos \phi$ nazywamy **współczynnikiem mocy**. Ponieważ $\cos \phi = \cos(-\phi)$, wyrażenie (33.76) nie zależy od znaku fazy początkowej ϕ .

Aby uzyskać maksymalną szybkość przekazywania energii do obciążenia oporowego w obwodzie RLC (czyli maksymalną moc), współczynnik mocy $\cos \phi$ powinien być możliwie bliski jedności. Jest to równoważne wymaganiu, aby faza początkowa ϕ w równaniu (33.29) była możliwie bliska zera. Jeśli obwód ma na przykład charakter silnie indukcyjny, to warto włączyć szeregowo dodatkową pojemność do obwodu. Przypomnijmy, że włączenie szeregowo dodatkowej pojemności zmniejsza wypadkową pojemność C_{rw} całego układu. Zmniejszenie C_{rw} powoduje zmniejszenie fazy początkowej i wzrost współczynnika mocy we wzorze (33.76). Aby to osiągnąć, zakłady energetyczne umieszczają szeregowo kondensatory w swoich systemach przesyłowych.

SPRAWDZIAN 8: a) Załóżmy, że w pobudzonym sinusoidalnie obwodzie RLC natężenie prądu wyprzedza SEM. Czy powinniśmy zwiększyć, czy zmniejszyć pojemność, aby zwiększyć szybkość przekazywania energii do obciążenia oporowego? b) Czy taka zmiana spowoduje przesunięcie rezonansowej częstotliwości kołowej obwodu w kierunku częstotliwości SEM, czy też w kierunku przeciwnym?

Przykład 33.8

Szeregowy obwód RLC , zasilany SEM $\mathcal{E}_{sk} = 230 \text{ V}$ o częstotliwości $\nu_w = 50 \text{ Hz}$, składa się z oporu $R = 200 \, \Omega$, indukcyjności o reaktancji $X_L = 80 \, \Omega$ i pojemności o reaktancji $X_C = 150 \, \Omega$.

a) Jaki jest współczynnik mocy $\cos \phi$ i faza początkowa ϕ tego obwodu?

ROZWIĄZANIE:

Współczynnik mocy $\cos \phi$ może być obliczony ze wzoru (33.75), jeśli znamy opór R i impedancję Z ($\cos \phi = R/Z$). Do obliczenia Z zastosujemy równanie (33.61):

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{(200 \, \Omega)^2 + (80 \, \Omega - 150 \, \Omega)^2} = 211,9 \, \Omega. \end{aligned}$$

Równanie (33.75) daje nam wtedy:

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{200 \, \Omega}{211,9 \, \Omega} = 0,9438 \approx 0,944. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wyznaczając stąd ϕ , otrzymujemy:

$$\phi = \arccos 0,944 = \pm 19,3^\circ.$$

Tak więc 0,944 jest wartością zarówno cosinusa kąta $+19,3^\circ$, jak i $-19,3^\circ$. Aby rozstrzygnąć, który znak jest poprawny, musimy się zastanowić, czy natężenie prądu wyprzedza, czy opóźnia się w fazie w stosunku do przyłożonej SEM. Ponieważ $X_C > X_L$, obwód ma charakter pojemnościowy, a więc natężenie prądu wyprzedza

SEM. Zatem ϕ musi być ujemne:

$$\phi = -19,3^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Moglibyśmy znaleźć ϕ z równania (33.65). Na kalkulatorze otrzymalibyśmy wtedy wartość ujemną kąta.

b) Z jaką średnią szybkością P_{sr} energia jest rozpraszana na oporniku?

ROZWIĄZANIE:

Jedną z metod rozwiązywania polega na tym, że przy założeniu stanu stacjonarnego w obwodzie, szybkość rozpraszania energii na oporniku jest równa szybkości, z jaką energia jest dostarczana do obwodu, zgodnie z równaniem (33.76) ($P_{sk} = \mathcal{E}_{sk} I_{sk} \cos \phi$).

Wartość skuteczna SEM $\mathcal{E}_{sk}$ jest dana, a wartość $\cos \phi$ została już obliczona w części (a). Aby wyznaczyć I_{sk} , wykorzystujemy fakt, że wartość skuteczną natężenia prądu jest określona przez wartość skuteczną przyłożonej SEM i przez impedancję obwodu (która jest znana), zgodnie ze wzorem (33.73):

$$I_{sk} = \frac{\mathcal{E}_{sk}}{Z}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (33.76), otrzymujemy:

$$P_{sr} = \mathcal{E}_{sk} I_{sk} \cos \phi = \frac{\mathcal{E}_{sk}^2}{Z} \cos \phi = \frac{(230 \text{ V})^2}{211,9 \, \Omega} (0,9438) = 235,6 \text{ W}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Inną metodą rozwiązania jest wykorzystanie faktu, że zgodnie z równaniem (33.71) szybkość rozpraszania energii na oporniku R zależy od kwadratu wartości skutecznej natężenia prądu

I_{sk} , płynącego przez ten opornik. Otrzymujemy więc:

$$P_{sr} = I_{sk}^2 R = \frac{\mathcal{E}_{sk}^2}{Z^2} R = \frac{(230 \text{ V})^2}{(211,9 \Omega)^2} (200 \Omega) = 235,6 \text{ W.}$$

(odpowiedź)

c) Jaka powinna być pojemność C_n , aby uzyskać maksymalną wartość P_{sr} , jeżeli pozostałe parametry obwodu pozostają bez zmiany?

ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Średnia szybkość P_{sr} , z jaką energia jest dostarczana i rozpraszana, osiąga wartość maksymalną, gdy obwód jest w rezonansie z przyłożoną SEM.

➡ 2. Rezonans występuje dla $X_C = X_L$. Z danych zadania wynika, że $X_C > X_L$, tak więc musimy zmniejszyć X_C , aby

uzyskać rezonans. Jak widać z równania (33.39) ($X_C = 1/\omega_w C$), oznacza to, że musimy zwiększyć wartość C tak, aby otrzymać wartość C_n .

Stosując równanie (33.39), możemy zapisać warunek $X_C = X_L$ w postaci:

$$\frac{1}{\omega_w C_n} = X_L.$$

Podstawiając $2\pi\nu_w$ zamiast ω_w (gdyż dane jest ν_w , a nie ω_w), a następnie rozwiązując równanie względem C_n , znajdujemy:

$$C_n = \frac{1}{2\pi\nu_w X_L} = \frac{1}{(2\pi)(50 \text{ Hz})(80 \Omega)} = 3,98 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 39,8 \mu\text{F.}$$

(odpowiedź)

Postępując jak w części (b), można wykazać, że dla wartości C_n , P_{sr} osiągnęłoby maksymalną wartość 264,5 W.

33.11. Transformatory

Warunki transmisji energii

Gdy obwód prądu zmiennego ma tylko obciążenie oporowe, współczynnik mocy w równaniu (33.76) jest równy $\cos 0^\circ = 1$, a wartość skuteczna przyłożonej SEM $\mathcal{E}_{sk}$ jest równa wartości skutecznej napięcia U_{sk} na obciążeniu. Zatem dla natężenia prądu I_{sk} , płynącego przez obciążenie, energia jest dostarczana i rozpraszana ze średnią szybkością:

$$P_{sr} = \mathcal{E}I = IU. \quad (33.77)$$

(W równaniu (33.77) i w dalszej części tego paragrafu postępujemy zgodnie z ustaloną praktyką i opuszczamy wskaźniki, oznaczające wartości skuteczne. Inżynierowie i naukowcy przyjmują, że wszystkie zmienne natężenia prądu i napięcia są określane za pomocą wartości skutecznych; takie są też wskazania mierników). Z równania (33.77) wynika, że mamy pewien zakres swobody w spełnieniu wymagań, dotyczących mocy, od stosunkowo dużego natężenia prądu I i stosunkowo małego napięcia U , do sytuacji wręcz przeciwnej, pod warunkiem, że iloczyn IU ma wymaganą wartość.

W systemie przesyłania energii elektrycznej pożądane jest, aby napięcia były stosunkowo niskie zarówno w miejscu wytwarzania (w elektrowni), jak i w miejscu odbioru (w domu lub w fabryce). Jest to spowodowane względami bezpieczeństwa, a także ułatwia projektowanie wyposażenia elektrycznego. Nikt nie chciałby, aby toster elektryczny lub elektryczna kolejka dla dzieci działały, powiedzmy, pod napięciem 10 kV. Z drugiej strony, przy przesyłaniu energii elektrycznej z elektrowni do użytkownika chcielibyśmy stosować jak najmniejsze natężenia prądu (a co za tym idzie jak najwyższe napięcia), aby zmniejszyć do minimum straty $I^2 R$ (zwane często *stratami omowymi*) w linii przesyłowej.

Jako przykład przeanalizujemy linię o napięciu 735 kV, wykorzystywaną do przesyłania energii elektrycznej z hydroelektrowni La Grande 2 w Quebecu do odległego o 1000 km Montrealu. Przypuśćmy, że natężenie prądu wynosi 500 A,

a współczynnik mocy jest bliski jedności. Z równania (33.77) wynika, że średnia szybkość przesyłania energii, czyli moc średnia wynosi:

$$P_{sr} = \mathcal{E} I = (7,35 \cdot 10^5 \text{ V})(500 \text{ A}) = 368 \text{ MW}.$$

Opór linii przesyłowej wynosi około $0,220 \Omega/\text{km}$; zatem całkowity opór odcinka linii o długości 1000 km jest równy około 220Ω . W wyniku istnienia tego oporu szybkość rozpraszania energii, czyli moc tracona wynosi:

$$P_{sr} = I^2 R = (500 \text{ A})^2 (220 \Omega) = 55 \text{ MW},$$

co odpowiada niemal 15% mocy dostarczanej.

Wyobraź sobie, co by się stało, gdybyśmy dwukrotnie zwiększyli natężenie prądu i dwukrotnie zmniejszyli napięcie. Moc dostarczana przez elektrownię byłaby nadal równa 368 MW , ale teraz moc tracona wynosiłaby około:

$$P_{sr} = I^2 R = (1000 \text{ A})^2 (220 \Omega) = 220 \text{ MW},$$

co stanowi prawie 60% mocy dostarczanej. Stąd wynika ogólna zasada przesyłania energii elektrycznej: Stosuj jak największe napięcia i jak najmniejsze natężenia prądu.

Transformator idealny

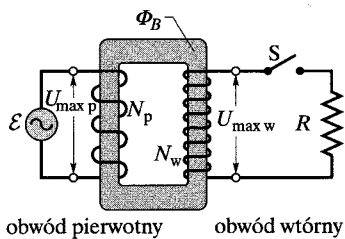
Powyższa zasada przesyłania energii prowadzi do zasadniczej niezgodności między wymaganiem skutecznego przesyłania (tzn. przy wysokim napięciu), a potrzebą bezpiecznego wytwarzania i używania energii (tzn. przy niskim napięciu). Potrzebne jest więc urządzenie, za pomocą którego moglibyśmy podwyższać (w celu przesyłania) lub obniżać (w celu zastosowania) napięcie zmienne w obwodzie, utrzymując możliwie stałą wartość iloczynu: natężenie prądu $\times$ napięcie. Takim urządzeniem jest **transformator**. Nie ma on ruchomych części, działa na zasadzie prawa Faradaya i nie ma prostego odpowiednika w obwodach prądu stałego.

Transformator idealny, przedstawiony na rysunku 33.15, składa się z dwóch cewek o różnych liczbach zwojów, nawiniętych na wspólnym rdzeniu z żelaza. (Cewki są izolowane od rdzenia). W czasie pracy transformatora uzwojenie pierwotne o N_p zwojach połączone jest ze źródłem prądu zmiennego, którego SEM w dowolnej chwili t jest dana wzorem:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t. \quad (33.78)$$

Uzwojenie wtórne o N_w zwojach jest połączone z oporem obciążenia R , ale zakładamy chwilowo, że klucz S jest otwarty. Tak więc obwód wtórny jest otwarty, a zatem prąd w uzwojeniu wtórnym nie płynie. Przyjmujemy ponadto, że w transformatorze idealnym opór uzwojenia pierwotnego i wtórnego jest znikomo mały, podobnie jak straty energii, związane z histerezą magnetyczną w rdzeniu żelaznym. Dla dobrze zaprojektowanych transformatorów o dużej wydajności straty energii mogą być nie większe od 1%, tak więc nasze założenia są uzasadnione.

W przyjętych przez nas warunkach uzwojenie pierwotne ma charakter czysto indukcyjny, a obwód pierwotny podobny jest do obwodu na rysunku 33.10a. Zatem *prąd pierwotny* (zwany również *prądem magnesującym* I_{mag}) o bardzo ma-



Rys. 33.15. Typowy obwód zawierający transformator idealny, czyli dwie cewki nawinięte na wspólnym rdzeniu z żelaza. Źródło prądu zmiennego wytwarza prąd w cewce po lewej stronie (w uzwojeniu pierwotnym). Cewka po prawej stronie (uzwojenie wtórne) jest połączona z obciążeniem oporowym R , gdy klucz S jest zamknięty

łym natężeniu jest opóźniony w fazie o 90° w stosunku do napięcia pierwotnego U_p . Współczynnik mocy w obwodzie pierwotnym ($= \cos \phi$ w równaniu (33.76)) jest równy zero, więc moc nie jest przekazywana ze źródła do transformatora.

Jednakże zmienny prąd o małym natężeniu I_{mag} , płynący w uzwojeniu pierwotnym, indukuje zmienny strumień magnetyczny Φ_B w rdzeniu. Ten indukowany strumień przenika również przez uzwojenie wtórne, które jest nawinięte na tym samym rdzeniu. Z prawa Faradaya (równanie (31.6)) wynika, że indukowana SEM $\mathcal{E}_z$, przypadająca na jeden zwój, jest taka sama zarówno w uzwojeniu pierwotnym, jak i wtórnym. Ponadto napięcie U_p na uzwojeniu pierwotnym jest równe SEM indukowanej w tym uzwojeniu, a napięcie U_w na uzwojeniu wtórnym jest równe SEM, indukowanej w tym uzwojeniu. Wobec tego możemy napisać:

$$\mathcal{E}_z = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{U_p}{N_p} = \frac{U_w}{N_w}$$

stąd:

$$U_w = U_p \frac{N_w}{N_p} \quad (\text{transformacja napięcia}). \quad (33.79)$$

Jeśli $N_w > N_p$, to transformator nazywamy *transformatorem podwyższającym* napięcie, ponieważ *podwyższa* pierwotne napięcie U_p do wyższego napięcia U_w . Podobnie, jeśli $N_w < N_p$, to transformator nazywamy *transformatorem obniżającym* napięcie.

Dopóki klucz S jest otwarty, dopóty energia nie jest dostarczana ze źródła do pozostałej części obwodu. Zamknijmy teraz klucz S, dołączając uzwojenie wtórne do obciążenia oporowego R . (W ogólnym przypadku obciążenie mogłoby składać się także z elementów indukcyjnych i pojemnościowych, ale tutaj rozpatrujemy tylko opór R). Okazuje się, że teraz energia *jest* pobierana ze źródła. Zobaczmy, dlaczego tak się dzieje.

Gdy zamkniemy klucz S, możemy zaobserwować następujące zjawiska:

1. W obwodzie wtórnym pojawia się prąd zmienny o natężeniu I_w , a moc tracona w obciążeniu oporowym jest równa $I_w^2 R (= U_w^2 / R)$.
2. Prąd ten wytwarza swój własny zmienny strumień magnetyczny w rdzeniu, a zgodnie z prawem Faradaya i regułą Lenza ten strumień indukuje w uzwojeniu pierwotnym SEM skierowaną przeciwnie do SEM źródła.
3. Napięcie U_p na uzwojeniu pierwotnym nie może jednak ulec zmianie pod wpływem indukowanej SEM, ponieważ musi być ono zawsze równe SEM $\mathcal{E}$, dostarczanej przez źródło. Zamknięcie klucza niczego tu nie zmienia.
4. W celu podtrzymania U_p źródło wytwarza teraz w obwodzie pierwotnym, oprócz I_{mag} , prąd zmienny o natężeniu I_p . Amplituda i faza względna prądu I_p są dokładnie takie, aby SEM, indukowana przez I_p , znosiła się z SEM, indukowaną tam przez I_w . Faza początkowa I_p nie jest równa 90° , jak było w przypadku I_{mag} , a więc prąd o natężeniu I_p może dostarczać energię do obwodu pierwotnego.

Zamierzamy teraz znaleźć związek między I_w a I_p . Jednak zamiast szczegółowej analizy powyższego złożonego procesu zastosujemy po prostu zasadę zachowania energii. Moc przekazywana przez źródło do obwodu pierwotnego

jest równa $I_p U_p$. Z kolei moc przekazywana z obwodu pierwotnego do wtórnego (przez zmienne pole magnetyczne sprzęgające obie cewki) wynosi $I_w U_w$. Zakładamy, że energia nie jest tracona podczas tego procesu, zatem z zasady zachowania energii wynika:

$$I_p U_p = I_w U_w.$$

Podstawiając U_w z równania (33.79), otrzymujemy:

$$I_w = I_p \frac{N_p}{N_w} \quad (\text{transformacja prądów}). \quad (33.80)$$

Z równania tego wynika, że natężenie prądu I_w w obwodzie wtórnym może różnić się od natężenia prądu I_p w obwodzie pierwotnym, w zależności od stosunku liczby zwojów N_p/N_w . Odwrotność tego stosunku nazywamy *przekładnią transformatora*.

Prąd o natężeniu I_p zaczyna płynąć w obwodzie pierwotnym na skutek istnienia obciążenia oporowego R w obwodzie wtórnym. Aby wyznaczyć I_p , podstawiamy do równania (33.80) najpierw $I_w = U_w/R$, a następnie podstawiamy U_w z równania (33.79). Otrzymujemy:

$$I_p = \frac{1}{R} \left(\frac{N_w}{N_p} \right)^2 U_p. \quad (33.81)$$

Równanie to ma postać $I_p = U_p/R_{rw}$, gdzie opór równoważny R_{rw} jest równy:

$$R_{rw} = \left(\frac{N_p}{N_w} \right)^2 R. \quad (33.82)$$

R_{rw} jest oporem obciążenia „widzianym” przez źródło, które wytwarza napięcie U_p i prąd o natężeniu I_p , jak gdyby było dołączone bezpośrednio do oporu R_{rw} .

Dopasowanie impedancji

Równanie (33.82) wskazuje na jeszcze jedno zastosowanie transformatora. Aby uzyskać maksymalne przekazywanie energii ze źródła prądu stałego do obciążenia oporowego, opór wewnętrzny źródła i opór obciążenia muszą być jednakowe. Taka sama zasada obowiązuje w obwodach prądu zmiennego, z tą różnicą, że *impedancja* (a nie po prostu opór) źródła musi być dopasowana do impedancji obciążenia. Często ten warunek nie jest spełniony. Na przykład w urządzeniu odtwarzającym dźwięk wzmacniacz ma dużą impedancję, a zestaw głośników — małą. Możemy dopasować impedancje obydwu urządzeń, łącząc je za pomocą transformatora o odpowiednim stosunku liczby zwojów N_p/N_w .

✓ **SPRAWDZIAN 9:** Źródło prądu zmiennego ma mniejszy opór niż obciążenie. Aby zwiększyć wydajność przekazywania energii ze źródła do obciążenia, łączymy te dwa elementy za pomocą transformatora. a) Czy N_w powinno być większe, czy mniejsze od N_p ? b) Czy jest to transformator podwyższający, czy obniżający napięcie?

Przykład 33.9

Transformator na słupie energetycznym dostosowany jest do napięcia $U_p = 8,5 \text{ kV}$ po stronie pierwotnej i dostarcza energię elektryczną o napięciu $U_w = 230 \text{ V}$ do kilku pobliskich domów, przy czym wartości obydwu napięć są wartościami skutecznymi. Zakładamy, że transformator obniżający napięcie jest transformatorem idealnym, obciążenie jest czysto oporowe, a współczynnik mocy jest równy jedności.

a) Jaki jest stosunek liczby zwojów N_p/N_w transformatora?

ROZWIĄZANIE:

➡ Równanie (33.79) wiąże stosunek liczby zwojów N_p/N_w z wartościami skutecznymi napięć w obwodzie pierwotnym i wtórnym. Równanie to możemy napisać w postaci:

$$\frac{U_w}{U_p} = \frac{N_w}{N_p}.$$

Zauważ, że prawa strona tego równania jest przekładnią transformatora. Odwracając obydwa ułamki, otrzymujemy:

$$\frac{N_p}{N_w} = \frac{U_p}{U_w} = \frac{8,5 \cdot 10^3 \text{ V}}{230 \text{ V}} = 36,96 \approx 37. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Moc średnia, zużywana w domach, do których ten transformator dostarcza napięcie, jest równa 78 kW. Jakie są wartości skuteczne natężeń prądów w obwodzie pierwotnym i wtórnym transformatora?

ROZWIĄZANIE:

➡ Dla obciążenia czysto oporowego współczynnik mocy $\cos \phi$ jest równy jedności. Zatem dostarczana i zużywana moc średnia dana jest równaniem (33.77). W obwodzie pierwotnym dla $U_p = 8,5 \text{ kV}$ z równania (33.77) wynika:

$$I_p = \frac{P_{sr}}{U_p} = \frac{78 \cdot 10^3 \text{ W}}{8,5 \cdot 10^3 \text{ V}} = 9,176 \text{ A} \approx 9,2 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Natomiast w obwodzie wtórnym:

$$I_w = \frac{P_{sr}}{U_w} = \frac{78 \cdot 10^3 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 339 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Możesz sprawdzić, że $I_w = I_p(N_p/N_w)$, zgodnie z równaniem (33.80).

c) Jakie jest obciążenie oporowe R_w w obwodzie wtórnym? Jakie jest odpowiadające temu obciążenie oporowe R_p w obwodzie pierwotnym?

ROZWIĄZANIE:

➡ 1. Dla obydwu obwodów możemy za pomocą równania $U = IR$ znaleźć związek między obciążeniem oporowym a wartościami skutecznymi napięcia i natężenia prądu. Dla obwodu wtórnego mamy:

$$R_w = \frac{U_w}{I_w} = \frac{230 \text{ V}}{339 \text{ A}} = 0,678 \Omega \approx 0,68 \Omega. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podobnie dla obwodu pierwotnego otrzymujemy:

$$R_p = \frac{U_p}{I_p} = \frac{8,5 \cdot 10^3 \text{ V}}{9,176 \text{ A}} = 926 \Omega \approx 930 \Omega. \quad (\text{odpowiedź})$$

➡ 2. Innym sposobem wyznaczenia R_p jest zastosowanie równania (33.82), zgodnie z którym R_p jest oporem równoważnym „widzianym” od strony pierwotnej transformatora. Jeśli podstawimy R_p zamiast R_{rw} i R_w zamiast R , to otrzymamy z tego równania:

$$R_p = \left(\frac{N_p}{N_w} \right)^2 R_{rw} = (36,96)^2 (0,678 \Omega) = 926 \Omega \approx 930 \Omega. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podsumowanie

Przekazywanie energii w obwodach LC W obwodzie drgającym LC energia jest przekazywana okresowo między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki. Wartości chwilowe obydwu postaci energii są równe:

$$E_E = \frac{q^2}{2C} \quad \text{oraz} \quad E_B = \frac{LI^2}{2}, \quad (33.1, 33.2)$$

gdzie q jest wartością chwilową ładunku na okładkach kondensatora, a I jest wartością chwilową natężenia prądu, płynącego przez cewkę. Całkowita energia $E (= E_E + E_B)$ pozostaje stała.

Zmiany ładunku i natężenia prądu w obwodach LC Z zasady zachowania energii wynika równanie:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{drgania LC}), \quad (33.11)$$

czyli równanie różniczkowe, opisujące drgania w obwodzie LC, nie zawierającym oporu. Rozwiązaniem równania (33.11) jest:

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{ładunek}), \quad (33.12)$$

gdzie $q_{\max}$ jest amplitudą ładunku (maksymalną wartością ła-

dunku na okładkach kondensatora), a częstość ω drgań jest równa:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (33.4)$$

Faza początkowa ϕ w równaniu (33.12) jest określona przez warunki początkowe (w chwili $t = 0$).

Natężenie prądu I w obwodzie, w dowolnej chwili t jest równe:

$$I = -\omega q_{\max} \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{natężenie prądu}), \quad (33.13)$$

gdzie $\omega q_{\max}$ jest *amplitudą natężenia prądu* $I_{\max}$.

Drgania tłumione Drgania w obwodzie LC są tłumione, gdy w obwodzie występuje również element R , na którym energia jest rozpraszana. Wtedy:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{obwód } RLC). \quad (33.24)$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest:

$$q = q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi), \quad (33.25)$$

gdzie

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}. \quad (33.26)$$

Rozpatrujemy wyłącznie przypadki, gdy R jest małe, a zatem tłumienie jest również małe. Wtedy $\omega' \approx \omega$.

Prądy zmienne; drgania wymuszone Szeregowy obwód RLC może być pobudzony do drgań wymuszonych z częstością kołową ω_w , przez przyłożenie zewnętrznej zmiennej SEM:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t. \quad (33.28)$$

Natężenie prądu wywołanego w obwodzie przez SEM wynosi:

$$I = I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.29)$$

gdzie ϕ jest fazą początkową natężenia prądu.

Rezonans Amplituda natężenia prądu $I_{\max}$ w szeregowym obwodzie RLC , zasilanym przez zewnętrzną sinusoidalną SEM, osiąga maksimum ($I_{\max} = \mathcal{E}_{\max}/R$), gdy częstość kołowa drgań wymuszonych ω_w jest równa częstości kołowej drgań swobodnych ω obwodu (czyli układ jest w *rezonansie*). Wtedy $X_C = X_L$, $\phi = 0$, a natężenie prądu jest zgodne w fazie z SEM.

Obwody z jednym elementem Zmienne napięcie na oporniku ma amplitudę $U_{R\max} = I_{\max} R$; natężenie prądu jest zgodne w fazie z napięciem.

Dla kondensatora $U_{C\max} = I_{\max} X_C$, gdzie $X_C = 1/\omega_w C$ jest **reaktancją pojemnościową**; natężenie prądu w tym przypadku wyprzedza napięcie o 90° ($\phi = -90^\circ = -\pi/2$ rad).

Dla cewki $U_{L\max} = I_{\max} X_L$, gdzie $X_L = \omega_w L$ jest **reaktancją indukcyjną**; natężenie prądu opóźnia się w fazie względem napięcia o 90° ($\phi = +90^\circ = +\pi/2$ rad).

Obwody szeregowo RLC Dla obwodu szeregowego RLC , gdy zewnętrzna SEM jest dana wzorem (33.28), a natężenie prądu dane wzorem (33.29), możemy zapisać:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \\ = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega_w L - 1/\omega_w C)^2}} \quad (\text{amplituda natężenia prądu}). \quad (33.60, 33.63)$$

i

$$\text{tg} \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (\text{faza początkowa}). \quad (33.65)$$

Zdefiniowanie impedancji Z obwodu jako:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{impedancja}) \quad (33.61)$$

pozwała na zapisanie równania (33.60) w postaci $I_{\max} = \mathcal{E}_{\max}/Z$.

Moc W obwodzie szeregowym RLC **moc średnia** P_{sr} źródła jest równa szybkości, z jaką energia termiczna jest wytwarzana w oporniku:

$$P_{\text{sr}} = I_{\text{sk}}^2 R = \mathcal{E}_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \cos \phi. \quad (33.71, 33.76)$$

Wskaźnik sk oznacza tutaj **wartość skuteczną**; wartości skuteczne są związane z wartościami maksymalnymi zależnościami $I_{\text{sk}} = I_{\max}/\sqrt{2}$, $U_{\text{sk}} = U_{\max}/\sqrt{2}$ i $\mathcal{E}_{\text{sk}} = \mathcal{E}_{\max}/\sqrt{2}$. Czynniki $\cos \phi$ jest zwany **współczynnikiem mocy**.

Transformatory Transformator (o którym zakładamy, że jest idealny) składa się z rdzenia żelaznego, na który nawinięte jest uzwojenie pierwotne o N_p zwojach i uzwojenie wtórne o N_w zwojach. Jeżeli uzwojenie pierwotne jest połączone ze źródłem prądu zmiennego, to napięcia w obwodzie pierwotnym i wtórnym są związane równaniem:

$$U_w = U_p \frac{N_w}{N_p} \quad (\text{transformacja napięcia}). \quad (33.79)$$

Natężenia prądów płynących przez uzwojenia są związane równaniem:

$$I_w = I_p \frac{N_p}{N_w} \quad (\text{transformacja prądów}), \quad (33.80)$$

a opór równoważny widziany przez źródło jest równy:

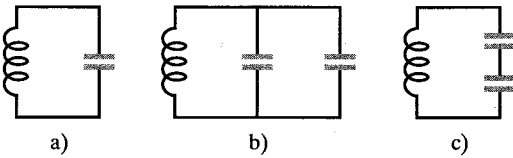
$$R_{\text{rw}} = \left(\frac{N_p}{N_w} \right)^2 R, \quad (33.82)$$

gdzie R jest obciążeniem oporowym w obwodzie wtórnym. Stosunek N_w/N_p nazywamy **przekładnią** transformatora.

1. Naładowany kondensator zostaje połączony z cewką w chwili $t = 0$. Używając okresu T drgań jako jednostki, określ po jakim czasie następujące wielkości osiągną po raz pierwszy maksimum: a) E_B , b) strumień magnetyczny w cewce, c) dI/dt , d) SEM w cewce?

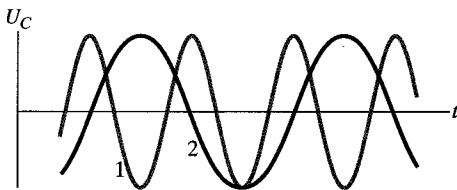
2. Dla jakich wartości fazy początkowej ϕ w równaniu (33.12), przypadki (a), (c), (e) i (g), przedstawione na rysunku 33.1 mogą zachodzić w chwili $t = 0$?

3. Na rysunku 33.16 przedstawiono trzy obwody drgające LC , złożone z identycznych cewek i kondensatorów. Uszereguj obwody w zależności od czasu, potrzebnego do całkowitego rozładowania kondensatorów podczas drgań, zaczynając od najdłuższego czasu.



Rys. 33.16. Pytanie 3

4. Na rysunku 33.17 przedstawiono wykresy napięcia U_C na kondensatorze w obwodach LC 1 i 2, które zawierają identyczne pojemności i mają taki sam maksymalny ładunek $q_{\max}$. Czy: a) indukcyjność L , b) maksymalne natężenie prądu $I_{\max}$ w obwodzie 1 są większe, mniejsze, czy takie same jak w obwodzie 2?



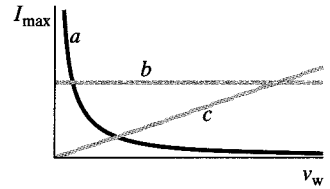
Rys. 33.17. Pytanie 4

5. Ładunki na okładkach kondensatorów w trzech obwodach drgających LC zmieniają się w następujący sposób: 1) $q = 2 \cos 4t$, 2) $q = 4 \cos t$, 3) $q = 3 \cos 4t$ (gdzie q jest wyrażone w kulombach, a t w sekundach). Uszereguj obwody w zależności od: a) amplitudy natężenia prądu, b) okresu, zaczynając od największej wartości.

6. W obwodzie drgającym LC zwiększyłeś indukcyjność L przy danym maksymalnym ładunku $q_{\max}$. Czy: a) amplituda natężenia prądu $I_{\max}$, b) maksymalna energia magnetyczna E_B wzrosła, zmalała, czy pozostała taka sama?

7. Źródło zmiennej SEM o pewnej amplitudzie dołączamy kolejno do opornika, kondensatora i cewki. Po dołączeniu SEM do każdego z elementów zmieniamy częstotliwość źródła ν_w , a następnie mierzymy i wykreślamy amplitudę $I_{\max}$ natężenia prądu, płynącego przez ten element jako funkcji ν_w .

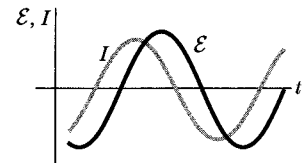
Któremu z trzech elementów odpowiadają poszczególne wykresy na rysunku 33.18?



Rys. 33.18. Pytanie 7

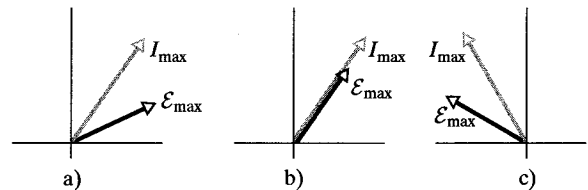
8. Wartości fazy początkowej ϕ dla czterech pobudzanych sinusoidalnie szeregowych obwodów RLC wynoszą odpowiednio: 1) -15° , 2) $+35^\circ$, 3) $\pi/3$ rad, 4) $-\pi/6$ rad. a) W którym obwodzie obciążenie ma charakter pojemnościowy? b) W którym obwodzie natężenie prądu opóźnia się w stosunku do zmiennej SEM?

9. Na rysunku 33.19 przedstawiono wykres natężenia prądu I i przyłożonej SEM $\mathcal{E}$ w szeregowym obwodzie RLC . a) Czy natężenie prądu wyprzedza, czy opóźnia się w stosunku do SEM? b) Czy obciążenie w obwodzie ma charakter pojemnościowy, czy indukcyjny? c) Czy częstota kołowa SEM ω_w jest większa, czy mniejsza od częstoty kołowej drgań swobodnych ω ?



Rys. 33.19. Pytania 9 i 11

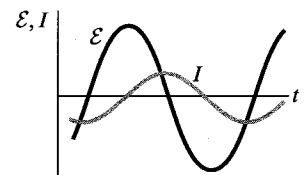
10. Na rysunku 33.20 przedstawiono trzy przypadki, podobne do pokazanych na rysunku 33.12. Dla każdego przypadku sprawdź, czy częstota kołowa drgań wymuszonych jest większa, mniejsza, czy równa rezonansowej częstoty kołowej obwodu.



Rys. 33.20. Pytanie 10

11. Na rysunku 33.19 przedstawiono wykres natężenia prądu I i przyłożonej SEM $\mathcal{E}$ w szeregowym obwodzie RLC . Czy wykres natężenia prądu przesunie się w lewo, czy w prawo w stosunku do wykresu SEM, a amplituda tego wykresu wzrośnie, czy zmaleje, jeśli zwiększymy nieco: a) L , b) C , c) ω_w ?

12. Na rysunku 33.21 przedstawiono wykres natężenia prądu I i przyłożonej SEM $\mathcal{E}$ w szeregowym obwodzie RLC . a) Czy faza początkowa natężenia prądu jest dodatnia, czy ujemna? b) Czy należy zwiększyć, czy zmniejszyć L , aby zwiększyć szybkość przepływu energii do obciążenia oporowego? c) Czy w tym samym celu należy zwiększyć, czy zmniejszyć C ?



Rys. 33.21. Pytanie 12

Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej pod-
ręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej,
wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-
Ware (na tej samej stronie)

33.2. Drgania obwodu LC, opis jakościowy

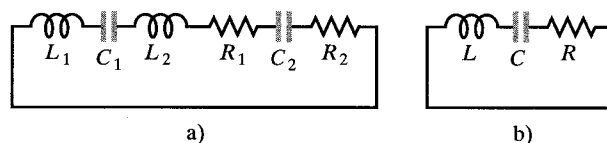
1. Jaka jest pojemność obwodu drgającego LC, jeśli maksymalny ładunek na okładkach kondensatora wynosi $1,6 \mu\text{C}$, a całkowita energia jest równa $140 \mu\text{J}$?
2. W obwodzie drgającym LC, $L = 1,1 \text{ mH}$, a $C = 4 \mu\text{F}$. Maksymalny ładunek na okładkach kondensatora jest równy $3 \mu\text{C}$. Oblicz maksymalną wartość natężenia prądu.
3. Obwód drgający LC składa się z cewki o indukcyjności 75 mH i kondensatora o pojemności $3,6 \mu\text{F}$. Oblicz: a) całkowitą energię w obwodzie, b) maksymalne natężenie prądu, jeśli maksymalny ładunek na okładkach kondensatora jest równy $2,9 \mu\text{C}$.
4. W pewnym obwodzie drgającym LC energia zamienia się z energii elektrycznej na kondensatorze na energię magnetyczną w cewce w ciągu $1,5 \mu\text{s}$. a) Ile wynosi okres drgań? b) Ile wynosi częstota drgań? c) Po jakim czasie od momentu, w którym energia magnetyczna miała wartość maksymalną, osiągnie ona znów maksimum?
5. Częstota drgań pewnego obwodu LC jest równa 200 kHz . W chwili $t = 0$ ładunek dodatni na okładce A kondensatora ma maksymalną wartość. Po jakim czasie $t > 0$: a) ładunek dodatni na okładce A osiągnie ponownie maksimum, b) ładunek dodatni na drugiej okładce kondensatora osiągnie maksimum, c) indukcja magnetyczna pola w cewce osiągnie maksymalną wartość?

33.3. Analogiczne układy elektryczny i mechaniczny

6. Ciało o masie $0,5 \text{ kg}$ wykonuje drgania harmoniczne na sprężynie, która po rozciągnięciu o 2 mm od stanu równowagi działa siłą zwrotną 8 N . a) Ile wynosi częstota kołowa drgań? b) Ile wynosi okres drgań? c) Oblicz pojemność w obwodzie LC o tym samym okresie drgań, jeżeli L ma wartość 5 H .
7. W obwodzie drgającym LC, zawierającym cewkę o indukcyjności $1,25 \text{ H}$, energia jest równa $5,7 \mu\text{J}$. Maksymalny ładunek na okładkach kondensatora wynosi $175 \mu\text{C}$. Oblicz: a) masę, b) współczynnik sprężystości sprężyny, c) maksymalne przemieszczenie, d) maksymalną prędkość w układzie mechanicznym o tym samym okresie drgań.

33.4. Drgania LC, opis ilościowy

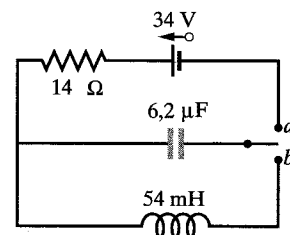
8. Układy drgające LC są używane w obwodach elektrycznych, połączonych z głośnikami i służących do wytwarzania pewnych dźwięków w muzyce elektronicznej. Jaką indukcyjność należy połączyć z kondensatorem o pojemności $6,7 \mu\text{F}$, aby uzyskać częstota 10 kHz , bliską środka zakresu częstotliwości słyszalnych?
9. W obwodzie drgającym LC, zawierającym $L = 50 \text{ mH}$ i $C = 4 \mu\text{F}$, w chwili początkowej natężenie prądu ma wartość maksymalną. Po jakim czasie kondensator zostanie po raz pierwszy całkowicie naładowany?
10. Obwód zamknięty o jednym oczku składa się z cewek ($L_1, L_2, \dots$), kondensatorów ($C_1, C_2, \dots$) i oporników ($R_1, R_2, \dots$), połączonych szeregowo, np. jak pokazano na rysunku 33.22a. Wykaż, że niezależnie od kolejności tych elementów, obwód będzie się zachowywał tak, jak prosty obwód LC, pokazany na rysunku 33.22b. (Wskazówka: Zastosuj drugie prawo Kirchhoffa i zajrzyj do zadania 43 w rozdziale 31).



Rys. 33.22. Zadanie 10

11. W obwodzie drgającym LC, składającym się z kondensatora o pojemności 1 nF i cewki o indukcyjności 3 mH maksymalne napięcie wynosi 3 V . a) Ile wynosi maksymalny ładunek na okładkach kondensatora? b) Ile wynosi maksymalne natężenie prądu w obwodzie? c) Ile wynosi maksymalna energia, zgromadzona w polu magnetycznym cewki?
12. W obwodzie drgającym LC o pojemności $C = 4 \mu\text{F}$ maksymalne napięcie na kondensatorze wynosi $1,5 \text{ V}$, a maksymalne natężenie prądu w cewce — 5 mA . a) Ile wynosi indukcyjność L ? b) Ile wynosi częstota drgań? c) Ile czasu potrzeba, aby ładunek kondensatora wzrósł od zera do wartości maksymalnej?

13. W obwodzie, pokazanym na rysunku 33.23, klucz znajduje się przez dłuższy czas w położeniu a, a następnie zostaje przełączony do położenia b. a) Oblicz częstota drgań natężenia prądu. b) Ile wynosi amplituda drgań natężenia prądu?



Rys. 33.23. Zadanie 13

14. Masz do dyspozycji cewkę o indukcyjności 10 mH i dwa kondensatory o pojemnościach $5 \mu\text{F}$ i $2 \mu\text{F}$. Jakie częstoty drgań

możesz uzyskać przez połączenie tych elementów w różnych kombinacjach?

15. Kondensator o regulowanej pojemności, obejmującej zakres od 10 do 365 pF, tworzy wraz z cewką obwód LC o zmiennej częstotliwości, używany do dostrajania radioodbiornika do sygnału wejściowego. a) Ile wynosi stosunek maksymalnej i minimalnej częstotliwości, przy zastosowaniu takiego kondensatora? b) Jeżeli ten obwód ma być użyty do otrzymania częstotliwości od 0,54 MHz do 1,60 MHz, to stosunek częstotliwości obliczony w punkcie (a) jest za duży. Zakres zmian może być odpowiednio dobrany przez dodanie kondensatora, połączonego równolegle z kondensatorem o zmiennej pojemności. Jaka powinna być pojemność tego dodatkowego kondensatora i jakiej indukcyjności należy użyć, aby uzyskać pożądaną zakres częstotliwości?

16. W obwodzie drgającym LC energia zgmagazynowana w polu magnetycznym cewki stanowi w pewnej chwili 75% całkowitej energii obwodu. a) Jaką część maksymalnego ładunku kondensatora stanowi ładunek, znajdujący się w tej samej chwili na okładkach kondensatora? b) Jaką część maksymalnego natężenia prądu w cewce stanowi natężenie prądu płynącego w tej samej chwili przez cewkę?

17. W obwodzie drgającym LC $L = 25$ mH, a $C = 7,8$ μ F. W chwili $t = 0$ natężenie prądu wynosi 9,2 mA, ładunek na okładkach kondensatora jest równy 3,8 μ C, a kondensator się ładuje. a) Jaka jest całkowita energia w obwodzie? b) Ile wynosi maksymalny ładunek na okładkach kondensatora? c) Ile wynosi maksymalne natężenie prądu? d) Jeżeli ładunek na okładkach kondensatora jest dany wzorem $q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi)$, to ile wynosi faza początkowa ϕ ? (e) Przyjmij, że w chwili $t = 0$ kondensator się rozładowuje, a pozostałe dane pozostają bez zmian. Jaka wtedy będzie faza początkowa ϕ ?

18. Cewka jest dołączona do kondensatora, którego pojemność może być zmieniana za pomocą pokrętki. Chcielibyśmy, aby częstotliwość drgań obwodu LC zmieniała się liniowo w funkcji kąta obrotu pokrętki, obejmując zakres $2 \cdot 10^5$ do $4 \cdot 10^5$ Hz, gdy pokrętkę obracane jest w zakresie od zera do 180° . Wykreśl wartości wymaganej pojemności jako funkcji kąta obrotu pokrętki dla $L = 1$ mH.

19. W obwodzie drgającym LC $L = 3$ mH, a $C = 2,7$ μ F. W chwili $t = 0$ ładunek na okładkach kondensatora jest równy zeru, a natężenie prądu jest równe 2 A. a) Ile wynosi maksymalny ładunek, który pojawi się na okładkach kondensatora? b) Używając okresu drgań T jako jednostki, określ, ile czasu upłynie od chwili $t = 0$ do momentu, w którym energia zgmagazynowana w kondensatorze będzie się zwiększała najszybciej? c) Jaka jest maksymalna szybkość przekazywania energii do kondensatora?

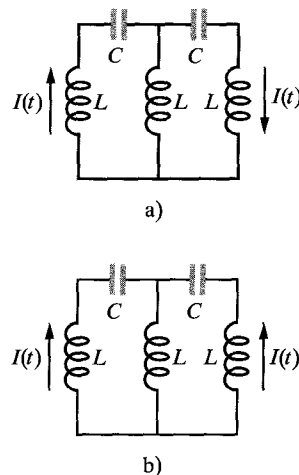
20. Obwód szeregowy, zawierający indukcyjność L_1 i pojemność C_1 , wykonuje drgania o częstotliwości kołowej ω . Drugi obwód szeregowy, zawierający indukcyjność L_2 i pojemność C_2 , wykonuje drgania o tej samej częstotliwości kołowej. Oblicz jako funkcję ω częstotliwość kołową drgań obwodu szeregowego zawierającego wszystkie cztery elementy. (Wskazówka: Zastosuj wzory dla pojemności

równoważnej i indukcyjności równoważnej; patrz paragraf 26.4 i zadanie 43 w rozdziale 31).

21. W obwodzie drgającym LC , zawierającym pojemność $C = 64$ μ F, natężenie prądu dane jest następującą funkcją czasu: $I = (1,6) \sin(2500t + 0,68)$, gdzie t jest wyrażone w sekundach, I w amperach, a faza początkowa w radianach. a) Kiedy, licząc od chwili $t = 0$, natężenie prądu osiągnie maksymalną wartość? Jaka jest: b) indukcyjność L , c) całkowita energia w obwodzie?

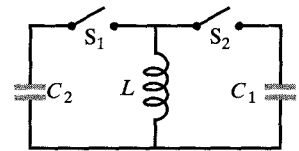
22. Trzy identyczne cewki L i dwa identyczne kondensatory C tworzą obwód, składający się z dwóch oczek, jak pokazano na rysunku 33.24. a) Przyjmij, że prądy płyną w kierunkach pokazanych na rysunku 33.24a. Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez środkową cewkę? Z drugiego prawa Kirchhoffa wyprowadź równania dla tego obwodu i wykaż, że są one spełnione, jeśli obwód wykonuje drgania z częstotliwością kołową $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

b) Przyjmij teraz, że prądy płyną w kierunkach, pokazanych na rysunku 33.24b. Ile wynosi natężenie prądu, płynącego przez środkową cewkę? Z drugiego prawa Kirchhoffa wyprowadź równania dla tego obwodu i wykaż, że są one spełnione, jeśli obwód wykonuje drgania z częstotliwością kołową $\omega = 1/\sqrt{3LC}$. Obwód może wykonywać drgania o dwóch różnych częstotliwościach, zatem nie możemy zastąpić go równoważnym obwodem o jednym oczku.



Rys. 33.24. Zadanie 22

23*. Na rysunku 33.25 kondensator 1 o pojemności $C_1 = 900$ μ F jest początkowo naładowany do napięcia 100 V, a kondensator 2 jest rozładowany. Cewka ma indukcyjność 10 H. Wyjaśnij szczegółowo, w jaki sposób można naładować kondensator 2 do napięcia 300 V, używając kluczy S_1 i S_2 .



Rys. 33.25. Zadanie 23

33.5. Drgania tłumione w obwodzie RLC

24. Masz do czynienia z obwodem tłumionym RLC . a) Wykaż, że czynnik tłumiący $e^{-Rt/2L}$ (zawierający L , ale nie C) może być zapisany w bardziej symetrycznej postaci (zawierającej L i C) jako $e^{-\pi R(\sqrt{C/L})t/T}$. T oznacza tutaj okres drgań przy pominięciu oporu. b) Korzystając z punktu (a), wykaż, że jednostką $\sqrt{L/C}$ w układzie SI jest Ω . c) Korzystając z punktu (a), wykaż, że warunkiem, aby względna strata energii w czasie jednego cyklu była mała, jest $R \ll \sqrt{L/C}$.

25. Jaki opór R należy połączyć szeregowo z indukcyjnością $L = 220$ mH i pojemnością $C = 12$ μ F, aby maksymalny ładunek na kondensatorze zmniejszył się do 99% swojej początkowej wartości w czasie 50 cykli drgań? (Przyjmij, że $\omega' \approx \omega$).

26. Obwód o jednym oczku składa się z opornika o oporze 7,2 Ω , cewki o indukcyjności 12 H i kondensatora o pojemności 3,2 μ F. W chwili początkowej kondensator ma ładunek 6,2 μ C, a natężenie prądu jest równe zeru. Oblicz ładunek na kondensatorze po N całkowitych cyklach drgań, gdy $N = 5, 10$ i 100.

27. Dla szeregowego obwodu drgającego RLC oblicz czas, po którym maksymalna energia, zgromadzona na kondensatorze w czasie drgań spadnie do połowy wartości początkowej. Przyjmij $q = q_{\max}$ dla $t = 0$.

28. W chwili $t = 0$ w szeregowym obwodzie RLC ładunek na kondensatorze jest równy zeru, natomiast przez cewkę płynie prąd o natężeniu $I_{\max}$. a) Oblicz fazę początkową ϕ w równaniu (33.25) dla tego obwodu. b) Wyprowadź wzory, określające ładunek q w kondensatorze jako funkcję czasu t , zależną od amplitudy natężenia prądu i częstości kołowej drgań ω' .

29*. Wykaż, że względna wartość energii $\Delta E/E$, traconej w szeregowym obwodzie drgającym RLC , w czasie jednego cyklu drgań, jest z dobrym przybliżeniem opisana wyrażeniem $2\pi R/\omega L$. Wielkość $\omega L/R$ jest często nazywana *dobrocią* Q obwodu. Obwody o dużej dobroci mają mały opór i małą względną wartość energii ($= 2\pi/Q$), traconej w czasie jednego cyklu.

33.8. Trzy proste obwody

30. Kondensator o pojemności 1,5 μ F jest połączony, jak na rysunku 33.9a, ze źródłem prądu zmiennego o $\mathcal{E}_{\max} = 30$ V. Ile wynosi amplituda natężenia prądu zmiennego, jeżeli częstość SEM jest równa: a) 1 kHz, b) 8 kHz?

31. Cewka o indukcyjności 50 mH jest połączona, jak na rysunku 33.10a, ze źródłem prądu zmiennego o $\mathcal{E}_{\max} = 30$ V. Ile wynosi amplituda natężenia prądu zmiennego, jeżeli częstość SEM jest równa: a) 1 kHz, b) 8 kHz?

32. Opornik o oporze 50 Ω jest połączony, jak na rysunku 33.8a, ze źródłem prądu zmiennego o $\mathcal{E}_{\max} = 30$ V. Ile wynosi amplituda natężenia prądu zmiennego, jeżeli częstość SEM jest równa: a) 1 kHz, b) 8 kHz?

33. a) Przy jakiej częstości cewka o indukcyjności 6 mH i kondensator o pojemności 10 μ F będą miały tę samą reaktancję? b) Ile wynoszą będzie ta reaktancja? c) Wykaż, że ta częstość jest częstością własną obwodu drgającego złożonego z tych samych elementów L i C .

34. Źródło prądu zmiennego ma SEM $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t$, gdzie $\mathcal{E}_{\max} = 25$ V, a $\omega_w = 377$ rad/s. Źródło to dołączono do cewki

o indukcyjności 12,7 mH. a) Ile wynosi maksymalna wartość natężenia prądu? b) Ile wynosi SEM źródła, gdy natężenie prądu osiąga wartość maksymalną? c) Ile wynosi natężenie prądu, gdy SEM źródła jest równa $-12,5$ V, a jej wartość bezwzględna rośnie?

35. Źródło prądu zmiennego ma SEM $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin(\omega_w t - \pi/4)$, gdzie $\mathcal{E}_{\max} = 30$ V, a $\omega_w = 350$ rad/s. Natężenie prądu płynącego w obwodzie dołączonym do źródła, wynosi $I(t) = I_{\max} \sin(\omega_w t - 3\pi/4)$, gdzie $I_{\max} = 620$ mA. a) Po jakim czasie, licząc od $t = 0$, SEM osiągnie po raz pierwszy wartość maksymalną? b) Po jakim czasie, licząc od $t = 0$, natężenie prądu osiągnie po raz pierwszy maksimum? c) Obwód składa się z jednego elementu i źródła. Czy jest to kondensator, cewka, czy opornik? Uzasadnij odpowiedź. d) Zależnie od odpowiedzi w punkcie (c) określ, jaka jest wartość pojemności, indukcyjności lub oporu.

36. Źródło prądu zmiennego z zadania 34 dołączono do kondensatora o pojemności 4,15 μ F. a) Ile wynosi maksymalna wartość natężenia prądu? b) Ile wynosi SEM źródła, gdy natężenie prądu osiąga maksimum? c) Ile wynosi natężenie prądu, gdy SEM źródła jest równa $-12,5$ V, a jej wartość bezwzględna rośnie?

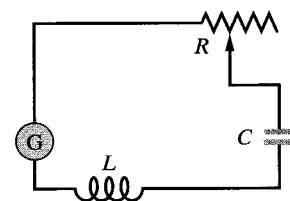
33.9. Obwód szeregowy RLC

37. a) Oblicz Z , ϕ i $I_{\max}$ dla obwodu, jak w przykładzie 33.7, ale bez kondensatora, podczas gdy pozostałe parametry obwodu pozostają bez zmian. b) Dla tego przypadku narysuj (w skali) diagram wskazowy, analogiczny do przedstawionego na rysunku 33.11d.

38. a) Oblicz Z , ϕ i $I_{\max}$ dla obwodu, jak w przykładzie 33.7, ale bez cewki, podczas gdy pozostałe parametry obwodu pozostają bez zmian. b) Dla tego przypadku narysuj (w skali) diagram wskazowy, analogiczny do przedstawionego na rysunku 33.11d.

39. a) Oblicz Z , ϕ i $I_{\max}$ dla obwodu, jak w przykładzie 33.7, ale z kondensatorem o pojemności $C = 70$ μ F, podczas gdy pozostałe parametry obwodu pozostają bez zmian. b) Dla tego przypadku narysuj diagram wskazowy, analogiczny do przedstawionego na rysunku 33.11d i porównaj dokładnie obydwa wykresy.

40. Na rysunku 33.26 źródło G o regulowanej częstości jest dołączone do opornika o zmiennym oporze R , kondensatora o pojemności $C = 5,5$ μ F i cewki o indukcyjności L . Amplituda natężenia prądu, wytworzonego w obwodzie przez źródło jest równa połowie wartości maksymalnej, gdy częstość źródła wynosi 1,3 lub 1,5 kHz. a) Jaka jest wartość L ? b) Jak zmienia się częstości, przy których amplituda natężenia prądu jest równa połowie wartości maksymalnej, jeżeli zwiększymy wartość R ?



Rys. 33.26. Zadanie 40

41. Czy w obwodzie RLC amplituda napięcia na cewce może być większa od amplitudy SEM źródła? Rozważ obwód RLC , w

którym $\mathcal{E}_{\max} = 10 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, a $C = 1 \mu\text{F}$. Wyznacz amplitudę napięcia na cewce w warunkach rezonansu.

42. Dla maksymalnej wartości SEM źródła w przykładzie 33.7 oblicz napięcie na: a) źródle, b) oporze, c) pojemności, d) indukcyjności. e) Sumując te napięcia z odpowiednimi znakami, sprawdź, czy drugie prawo Kirchhoffa jest spełnione.

43. Cewkę o indukcyjności 88 mH i nieznanym oporze oraz kondensator o pojemności $0,94 \mu\text{F}$ połączono szeregowo ze źródłem zmiennej SEM o częstotliwości 930 Hz . Ile wynosi opór cewki, jeżeli różnica faz między przyłożonym napięciem a natężeniem prądu wynosi 75° ?

44. Źródło prądu zmiennego o $\mathcal{E}_{\max} = 220 \text{ V}$ i częstotliwości 400 Hz wywołuje drgania szeregowego obwodu RLC , w którym $R = 220 \Omega$, $L = 150 \text{ mH}$, a $C = 24 \mu\text{F}$. Oblicz: a) reaktancję pojemnościową X_C , b) impedancję Z , c) amplitudę natężenia prądu $I_{\max}$. Do obwodu dołączono szeregowo drugi kondensator o takiej samej pojemności. Określ, czy wartości d) X_C , e) Z , f) $I_{\max}$ wzrosły, zmalały, czy pozostały takie same.

45. Obwód RLC , taki jak na rysunku 33.7, ma $R = 5 \Omega$, $C = 20 \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ H}$ i $\mathcal{E}_{\max} = 30 \text{ V}$. a) Przy jakiej częstotliwości kołowej ω_w amplituda natężenia prądu osiągnie wartość maksymalną, jak na rysunku 33.13? b) Jaka jest ta maksymalna wartość? c) Przy jakich dwóch częstotliwościach kołowych ω_{w1} i ω_{w2} amplituda natężenia prądu będzie równa połowie wartości maksymalnej? d) Jaka jest względna szerokość połówkowa $[(\omega_{w1} - \omega_{w2})/\omega]$ krzywej rezonansowej dla tego obwodu?

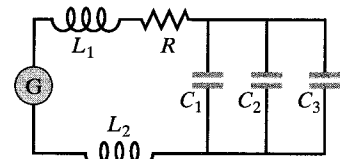
46. Źródło prądu zmiennego ma być połączone szeregowo z cewką o indukcyjności $L = 2 \text{ mH}$ i kondensatorem o pojemności C . Możesz otrzymać pojemność C , używając razem lub oddzielnie kondensatorów o pojemnościach $C_1 = 4 \mu\text{F}$ i $C_2 = 6 \mu\text{F}$. Jaka może być częstota rezonansowa obwodu w zależności od tego, w jaki sposób użyjesz kondensatorów C_1 i C_2 ?

47. Wykaż, że względna szerokość połówkowa (patrz zadanie 45) krzywej rezonansowej jest dana wzorem:

$$\frac{\Delta\omega_w}{\omega} = \sqrt{\frac{3C}{L}} R,$$

gdzie ω jest częstotliwością kołową w rezonansie, a $\Delta\omega_w$ jest szerokością krzywej rezonansowej w połowie maksymalnej wartości amplitudy. Zauważ, że $\Delta\omega_w/\omega$ rośnie wraz ze wzrostem R , jak pokazano na rysunku 33.13. Skorzystaj z tego wzoru, aby sprawdzić odpowiedź do zadania 45d.

48. Na rysunku 33.27 źródło G o regulowanej częstotliwości drgań jest połączone z oporem $R = 100 \Omega$, indukcyjnościami $L_1 = 1,7 \text{ mH}$ i $L_2 = 2,3 \text{ mH}$ oraz pojemnościami $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 2,5 \mu\text{F}$ i $C_3 = 3,5 \mu\text{F}$. a) Jaka jest częstota rezonansowa obwodu? (Wskazówka: Zobacz zadanie 43 w rozdziale 31). Jak zmieni się częstota rezonansowa, jeśli: b) zwiększymy wartość R , c) zwiększymy wartość L_1 , d) usuniemy z obwodu pojemność C_3 ?



Rys. 33.27. Zadanie 48

33.10. Moc w obwodach prądu zmiennego

49. Oblicz natężenie prądu stałego, który wytwarza w pewnym oporniku taką samą ilość energii termicznej, jak prąd zmienny o maksymalnym natężeniu $2,6 \text{ A}$.

50. Woltomierz prądu zmiennego o dużej impedancji dołączono kolejno do cewki, kondensatora i opornika w szeregowym obwodzie, zasilanym zmienną SEM o wartości skutecznej 100 V . Za każdym razem odczytano tę samą wartość napięcia. Jakie było wskazanie woltomierza?

51. Jaka jest maksymalna wartość napięcia zmiennego, którego wartość skuteczna jest równa 100 V ?

52. a) Czy dla danych z zadania 34c źródło dostarcza energię, czy odbiera ją z pozostałej części obwodu? b) Powtórz obliczenia dla danych z zadania 36c.

53. Oblicz średnią szybkość rozpraszania energii w obwodach omawianych w zadaniach 31, 32, 37 i 38.

54. Wykaż, że średnia szybkość, z jaką energia jest dostarczana do obwodu przedstawionego na rysunku 33.7, może być również napisana w postaci $P_{\text{sr}} = \mathcal{E}_{\text{sk}}^2 R / Z^2$. Wykaż, że to wyrażenie, określające moc średnią, daje poprawne wyniki dla obwodu o charakterze czysto oporowym, dla obwodu RLC w rezonansie, dla obwodu o charakterze czysto pojemnościowym i czysto indukcyjnym.

55. Klimatyzator podłączony do sieci o napięciu skutecznym 230 V może być przedstawiony jako szeregowo połączenie oporu 24Ω i reaktancji indukcyjnej 3Ω . a) Oblicz impedancję klimatyzatora. b) Wyznacz średnią szybkość, z jaką energia jest dostarczana do tego urządzenia.

56. W szeregowym obwodzie drgającym RLC : $R = 16 \Omega$, $C = 31,2 \mu\text{F}$, $L = 9,2 \text{ mH}$ i $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t$, gdzie $\mathcal{E}_{\max} = 45 \text{ V}$, a $\omega_w = 3000 \text{ rad/s}$. Dla chwili $t = 0,442 \text{ ms}$ oblicz: a) szybkość, z jaką energia jest dostarczana przez źródło, b) szybkość, z jaką zmienia się energia w kondensatorze, c) szybkość, z jaką zmienia się energia w cewce, d) szybkość, z jaką energia jest rozpraszana w oporniku. e) Co oznacza wynik ujemny dla któregośkolwiek z punktów (a), (b) i (c)? f) Wykaż, że suma wyników z punktów (b), (c) i (d) jest równa wynikowi z punktu (a).

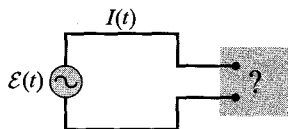
57. Na rysunku 33.28 przedstawiono źródło prądu zmiennego, dołączone za pomocą pary zacisków do „czarnej skrzynki”. Skrzynka zawiera obwód RLC o nieznanach elementach i połączeniach, być może nawet obwód o wielu oczkach. Pomiary wykonane na zewnątrz skrzynki wykazują, że:

$$\mathcal{E}(t) = (75 \text{ V}) \sin \omega_w t$$

oraz

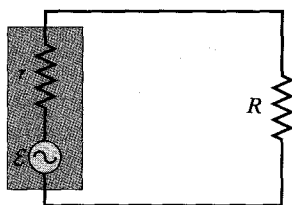
$$I(t) = (1,2 \text{ A}) \sin(\omega_w t + 42^\circ).$$

a) Jaki jest współczynnik mocy? b) Czy natężenie prądu wyprzedza, czy opóźnia się względem SEM? c) Czy obwód w skrzynce ma charakter indukcyjny, czy pojemnościowy? d) Czy obwód w skrzynce jest w rezonansie? e) Czy w skrzynce musi znajdować się kondensator, cewka, opornik? f) Jaka jest średnia szybkość dostarczania energii ze źródła do skrzynki? g) Dlaczego nie musisz znać częstości kołowej ω_w , aby odpowiedzieć na te wszystkie pytania?



Rys. 33.28. Zadanie 57

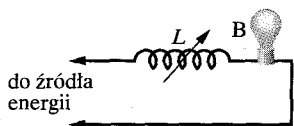
58. Wykaż, że w układzie przedstawionym na rysunku 33.29 średnia szybkość rozpraszania energii w oporze R jest największa, gdy R jest równe wewnętrznej oporowi r źródła prądu zmiennego. (W dyskusji w tekście założyliśmy milcząco, że $r = 0$).



Rys. 33.29. Zadanie 58 i 65

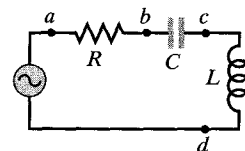
59. W obwodzie RLC , jak na rysunku 33.7, przyjmij, że $R = 5 \Omega$, $L = 86,4 \text{ mH}$, $\nu_w = 50 \text{ Hz}$, a $\mathcal{E}_{\max} = 30 \text{ V}$. Dla jakiej wartości pojemności średnia szybkość rozpraszania energii w oporze będzie: a) największa, b) najmniejsza? c) Jakie są te maksymalne i minimalne wartości szybkości rozpraszania energii? Jakie są: d) odpowiadające tym wartościom fazy początkowe, e) współczynniki mocy?

60. Do przyciemniania światła na scenie teatru używa się układu złożonego z cewki o zmiennej indukcyjności L (regulowanej od zera do $L_{\max}$), połączonej szeregowo z żarówką B, jak przedstawiono na rysunku 33.30. Obwód jest zasilany napięciem o wartości skutecznej 230 V i częstości 50 Hz , a żarówka jest oznaczona jako „ $230 \text{ V}, 1000 \text{ W}$ ”. a) Jaka jest wymagana wartość $L_{\max}$, jeżeli szybkość rozpraszania energii w żarówce ma się zmieniać w zakresie od górnej granicy 1000 W do wartości 5 razy mniejszej? Przyjmij, że opór żarówki nie zależy od temperatury. b) Czy zamiast cewki można użyć opornika o zmiennym oporze (regulowanym od zera do $R_{\max}$)? Jeżeli tak, to jaka wartość $R_{\max}$ byłaby potrzebna? Dlaczego nie stosuje się takiego rozwiązania?



Rys. 33.30. Zadanie 60

61. Na rysunku 33.31, $R = 15 \Omega$, $C = 4,7 \mu\text{F}$, a $L = 25 \text{ mH}$. Źródło wytwarza sinusoidalne napięcie o wartości skutecznej 75 V i częstości $\nu = 550 \text{ Hz}$. a) Oblicz wartość skuteczną natężenia prądu. b) Oblicz wartości skuteczne napięć U_{ab} , U_{bc} , U_{cd} , U_{bd} , U_{ad} . c) Z jaką średnią szybkością energia jest rozpraszana w każdym z trzech elementów obwodu?



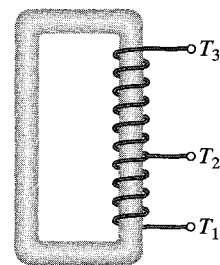
Rys. 33.31. Zadanie 61

33.11. Transformatory

62. Źródło dostarcza napięcia zmiennego o wartości 100 V do uzwojenia pierwotnego transformatora o 50 zwojach. Jak jest napięcie w obwodzie wtórnym, jeżeli uzwojenie wtórne ma 500 zwojów?

63. Transformator ma 500 zwojów w obwodzie pierwotnym i 10 zwojów w obwodzie wtórnym. a) Jak jest napięcie U_w przy otwartym obwodzie wtórnym, jeżeli wartość skuteczna napięcia U_p wynosi 230 V ? b) Jakie są natężenia prądów w obwodzie pierwotnym i wtórnym, jeżeli obwód wtórny jest obciążony oporem 23Ω ?

64. Na rysunku 33.32 przedstawiono autotransformator, który składa się z pojedynczej cewki, nawiniętej na rdzeniu z żelaza. Autotransformator ma trzy zaciski. Między zaciskami T_1 i T_2 znajduje się 200 zwojów, a między zaciskami T_2 i T_3 — 800 zwojów. Dowolne dwa zaciski mogą być traktowane jako „zaciski pierwotne” i dowolne dwa zaciski — jako „zaciski wtórne”. Wymień wszystkie możliwe stosunki napięcia wtórnego do napięcia pierwotnego.



Rys. 33.32. Zadanie 64

65. Niech prostokąt po lewej stronie rysunku 33.29 oznacza wyjście wzmacniacza akustycznego o dużej impedancji i oporze $r = 1000 \Omega$. Niech $R = 10 \Omega$ oznacza cewkę głośnika o małej impedancji. Aby uzyskać maksymalne przekazywanie energii do obciążenia R , musimy mieć $R = r$, co w tym przypadku nie jest spełnione. Jednakże możemy zastosować transformator do „przekształcenia” oporów, aby zachowywały się tak, jak gdyby były większe lub mniejsze niż są w rzeczywistości. Naszkicuj uzwojenia pierwotne i wtórne transformatora, który mógłby być włączony między wzmacniaczem a głośnikiem na rys. 33.29, tak aby dopasować do siebie impedancje. Jaka powinna być przekładnia takiego transformatora?