

12. Dynamika ruchu obrotowego I

12-1. Wstęp

W rozdziale 11 rozważaliśmy kinematykę ruchu obrotowego. W tym rozdziale, postępując analogicznie jak w przypadku ruchu postępowego, zajmiemy się przyczynami ruchu obrotowego, które są przedmiotem badań dynamiki ruchu obrotowego. Układy podlegające ruchowi obrotowemu złożone są z punktów materialnych, a my już nauczyliśmy się stosować prawa mechaniki klasycznej do opisu ruchu tych punktów. Dlatego też dynamika ruchu obrotowego nie powinna zawierać żadnych zasadniczo nowych cech. Podobnie kinematyka ruchu obrotowego nie wprowadza zasadniczo nowych pojęć; jej parametry θ , ω i α odpowiadają parametrom x , v i a ruchu postępowego dla punktów materialnych, z których składa się obracający się układ. Jednakże podobnie jak w rozdziale 11, wygodniej jest nadać pojęciom ruchu postępowego nową postać, specjalnie wybraną dla opisu układów obracających się.

W rozdziale 11 ograniczyliśmy nasze rozważania nad kinematyką do pojedynczego, lecz bardzo ważnego, szczególnego przypadku, to jest do ciała sztywnego obracającego się dookoła nieruchomej osi w układzie odniesienia, w którym dokonywaliśmy naszych pomiarów. W dynamice ruchu obrotowego przyjmiemy na początku bardziej podstawowy punkt widzenia, zajmiemy się pojedynczym punktem materialnym obserwowanym w inercjalnym układzie odniesienia. Nasze wnioski uogólnimy później na układy punktów materialnych, włączając w to, jako szczególny przypadek, ciała sztywne, obracające się dookoła nieruchomej osi. W rozdziale 13, będziemy omawiać ruch obrotowy ciał sztywnych dookoła osi, które nie są nieruchome w inercjalnym układzie odniesienia.

12-2. Moment siły działającej na punkt materialny

W ruchu postępowym siłę wiążemy z *liniowym przyspieszeniem* ciała. Jaką zaś wielkość będziemy wiązać z *kątowym przyspieszeniem* ciała w ruchu obrotowym? Nie może to być po prostu siła. Jak nas bowiem uczy doświadczenie z ciężkimi drzwiami obrotowymi, dana siła (wektor) może powodować różne kątowe przyspieszenia drzwi, zależnie od tego, gdzie siła ta jest przyłożona i w jakim kierunku. Siła przyłożona wzdłuż zawiasów nie może wytworzyć żadnego przyspieszenia kątowego, podczas gdy siła o tej samej wartości liczo-

bowej, przyłożona pod kątem prostym do drzwi na ich zewnętrznej krawędzi, nadaje im maksymalne przyspieszenie.

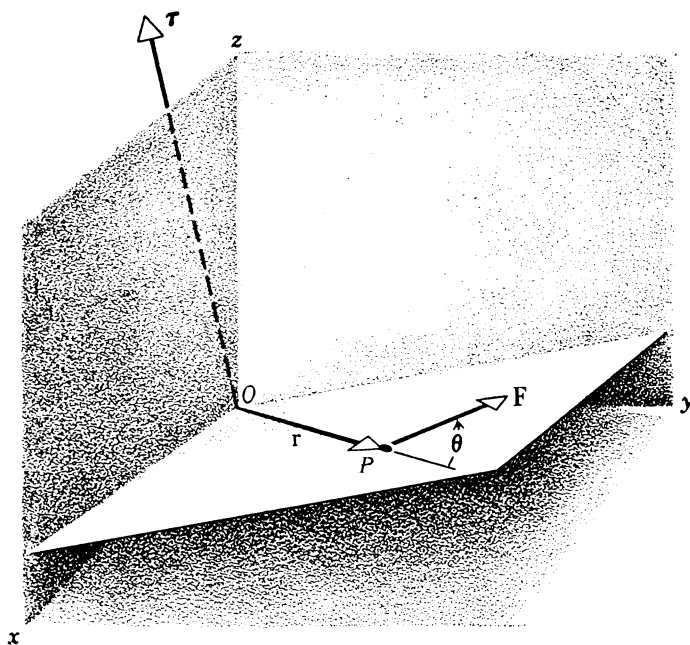
Dla ruchu obrotowego wielkość, która jest odpowiednikiem siły w ruchu postępowym, będziemy nazywali *momentem siły* lub *momentem obrotowym*. Zdefiniujemy teraz moment siły dla szczególnego przypadku pojedynczego punktu materialnego, obserwowanego w inercjalnym układzie odniesienia. Później rozszerzymy pojęcie momentu siły dla układów punktów materialnych (włączając w to ciała sztywne) i pokażemy, że moment siły jest istotnie związany z przyspieszeniem kątowym.

Jeżeli siła $\mathbf{F}$ działa na pojedynczy punkt materialny znajdujący się w punkcie P , którego położenie względem początku O inercjalnego układu odniesienia reprezentuje wektor $\mathbf{r}$ (rys. 12-1), to *moment siły* $\boldsymbol{\tau}$ względem początku układu O definiujemy następująco:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (12-1)$$

Moment siły jest wielkością wektorową. Jego wartość bezwzględna wynosi

$$\tau = rF \sin \theta, \quad (12-2a)$$



Rys. 12-1. Siła $\mathbf{F}$ przyłożona jest w punkcie P , którego położenie względem początku układu określa wektor $\mathbf{r}$. Siła ta tworzy kąt θ z wektorem $\mathbf{r}$. $\boldsymbol{\tau}$ jest momentem siły względem punktu O , jego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{r}$ i $\mathbf{F}$, zgodnie z regułą prawej ręki

gdzie θ jest kątem pomiędzy $\mathbf{r}$ i $\mathbf{F}$; kierunek wektora momentu siły jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez $\mathbf{r}$ i $\mathbf{F}$, a zwrot związany z regułą prawej ręki dla iloczynu wektorowego dwóch wektorów. Jeżeli zagięte palce prawej ręki przesuwają wektor $\mathbf{r}$ w kierunku wektora $\mathbf{F}$ poprzez mniejszy kąt, to duży palec wskaże zwrot wektora $\boldsymbol{\tau}$.

Wymiarem momentu siły jest iloczyn siły przez długość. Używając podstawowych wymiarów M , L , T (masa, długość, czas), wymiar momentu siły wyrażamy jako ML^2T^{-2} . Jest to taki sam wymiar, jak wymiar pracy, jednakże moment siły i praca są całkowicie róż-

nymi wielkościami fizycznymi, np. moment siły jest wektorem, a praca skalar. Jednostką momentu siły jest $\text{N} \cdot \text{m}$ oraz pochodne tej jednostki.

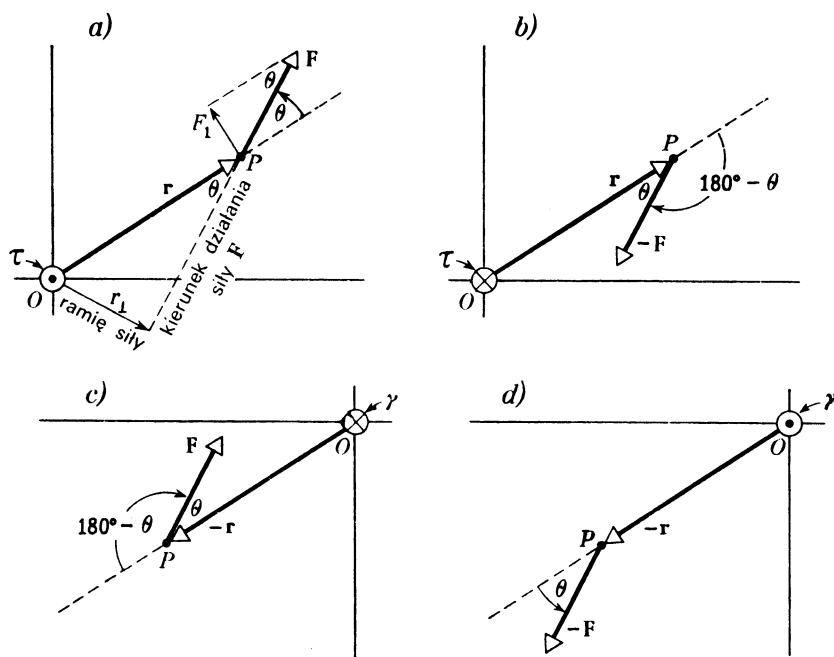
Zwracamy uwagę (równanie (12-1)), że moment siły zależy nie tylko od wartości siły i jej kierunku, lecz także od punktu przyłożenia tej siły względem początku układu, to jest od wektora $\mathbf{r}$. W szczególności, kiedy punkt materialny P znajduje się w początku układu, tak, że linia działania siły $\mathbf{F}$ przechodzi przez początek układu, $\mathbf{r}$ jest równe zero i moment siły $\boldsymbol{\tau}$ jest również równy zero.

Wartość bezwzględną momentu siły τ (równanie (12-2a)) możemy napisać jako

$$\tau = (r \sin \theta) F = Fr_{\perp} \quad (12-2b)$$

albo jako

$$\tau = r(F \sin \theta) = rF_{\perp}; \quad (12-2c)$$



Rys. 12-2. Przedstawione płaszczyzny są określone przez wektory $\mathbf{r}$ i $\mathbf{F}$ (rys. 12-1). (a) Wartość τ równa się $Fr_{\perp}$ (równanie 12-2b) albo $rF_{\perp}$ (równanie 12-2c). (b) Odwrócenie $\mathbf{F}$ pociąga za sobą zmianę kierunku $\boldsymbol{\tau}$ o 180° , lecz wartość pozostaje ta sama. (c) To samo dotyczy wektorów $\mathbf{r}$ i $\boldsymbol{\tau}$. (d) Odwrócenie $\mathbf{F}$ i $\mathbf{r}$ jednocześnie — pozostawia zarówno kierunek jak i wartość nie zmienione. Kierunki $\boldsymbol{\tau}$ przedstawiają znaki $\odot$ (prostopadle nad płaszczyznę rysunku — ostrze (grot strzały) i $\otimes$ (prostopadle pod płaszczyznę rysunku — koniec strzały)

w wyrażeniach tych, jak widać na rys. 12-2a, $r_{\perp} (= r \sin \theta)$ jest składową $\mathbf{r}$ prostopadłą do linii działania siły $\mathbf{F}$, a $F_{\perp} (= F \sin \theta)$ jest składową $\mathbf{F}$ prostopadłą do wektora $\mathbf{r}$. Wielkość r w równaniu (12-2b) nazywana jest *ramieniem siły*. Z równania (12-2c) wynika, że tylko składowa $\mathbf{F}$ prostopadła do $\mathbf{r}$ wpływa na wartość momentu siły. W szczególności kiedy $\theta = 0$ albo 180° , składowa prostopadła siły ($F_{\perp} = F \sin \theta = 0$) znika, linia działania siły przechodzi przez początek układu i ramię siły $r_{\perp}$ jest również równe zero. W tym przypadku zarówno równanie (12-2b), jak i (12-2c) wykazują, że moment siły jest równy zero.

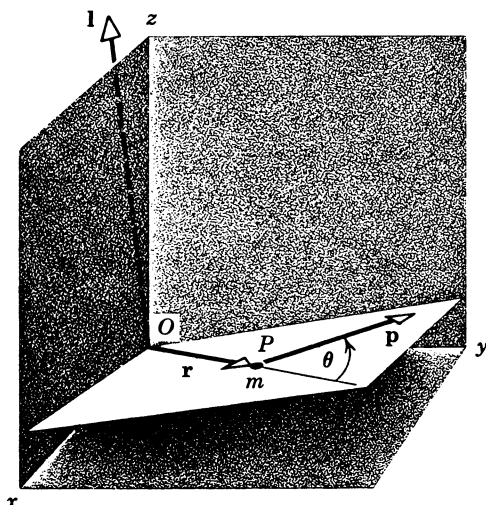
Jeżeli odwrócimy kierunek siły $\mathbf{F}$ (patrz rys. 12-2b), to wartość bezwzględna momentu siły pozostanie nie zmieniona, a kierunek wektora momentu siły odwrócony. Podobnie, jeżeli odwrócimy kierunek $\mathbf{r}$ (patrz rys. 12-2c), czyli zmienimy punkt przyłożenia siły $\mathbf{F}$, to wartość momentu siły τ pozostanie nie zmieniona, a kierunek wektora τ ulega znowu odwróceniu.

Jeżeli odwrócimy zarówno $\mathbf{r}$, jak i $\mathbf{F}$ (patrz rys. 12-2d), to wówczas zarówno wartość, jak i kierunek momentu siły pozostaną bez zmiany. Wnioski te wynikają formalnie z faktu, że (1) $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$, tak że na wartość τ w równaniu (12-2a) to nie wpływa; (2) odwrócenie kierunku jednego wektora w iloczynie wektorowym (albo $\mathbf{r}$ albo $\mathbf{F}$) zmienia kierunek iloczynu wektorowego; (3) odwrócenie kierunków obydwu wektorów w iloczynie wektorowym ($\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$) pozostawia kierunek iloczynu wektorowego nie zmieniony. Czytelnik może łatwo sprawdzić kierunek wektora τ (na rys. 12-2), stosując regułę prawej ręki.

12-3. Moment pędu punktu materialnego

Mając do czynienia z ruchem postępowym układów punktów materialnych (włączając w to również ciała sztywne) stosowaliśmy pojęcie *pędu*. Wiemy, że w zderzeniach pęd jest zachowany. Dla pojedynczego punktu materialnego pęd równa się: masa $\times$ prędkość, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (równanie (9-11)); dla układu punktów materialnych $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{sr.m.}}$ (równanie (9-15)), gdzie M jest całkowitą masą układu, a $\mathbf{v}_{\text{sr.m.}}$ — prędkością środka masy. Co będzie odpowiednikiem pędu w ruchu obrotowym? Wielkość tę będziemy nazywać *momentem pędu* i zdefiniujemy ją poniżej dla szczególnego przypadku, to jest dla pojedynczego punktu materialnego. Później rozszerzymy tę definicję dla układów punktów materialnych i покаżemy, że moment pędu jest tak samo użytecznym pojęciem w ruchu obrotowym, jak pęd w ruchu postępowym.

Rozpatrzmy punkt materialny o masie m i pędzie $\mathbf{p}$, którego położenie względem po-



Rys. 12-3. Punkt materialny o masie m i pędzie $\mathbf{p}$ znajduje się w punkcie P , którego położenie względem początku układu określa wektor $\mathbf{r}$. Wektor $\mathbf{p}$ tworzy kąt θ z wektorem $\mathbf{r}$. Wektor $\mathbf{l}$ jest to moment pędu punktu materialnego względem początku układu O . Jego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\mathbf{r}$ i $\mathbf{p}$ zgodnie z regułą prawej ręki

czątku O inercjalnego układu odniesienia wyznacza wektor $\mathbf{r}$ (rys. 12-3). Definiujemy *moment pędu* $\mathbf{l}$ punktu materialnego *względem początku układu* O jako

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (12-3)$$

Czytelnik powinien zauważyć, że musimy określić początek O , aby zdefiniować pozycję wektora $\mathbf{r}$ w definicji momentu pędu. Moment pędu jest wektorem. Jego wartość obliczamy następująco:

$$l = rpsin\theta, \quad (12-4a)$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy $\mathbf{r}$ i $\mathbf{p}$. Kierunek tego wektora jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\mathbf{r}$ i $\mathbf{p}$, a jego zwrot znajdujemy stosując regułę prawej ręki; tzn. gdy zagięte palce prawej ręki przesuwać $\mathbf{r}$ w kierunku $\mathbf{p}$, poprzez mniejszy kąt między nimi, wtedy wyciągnięty palec duży wskaże zwrot wektora $\mathbf{l}$.

Wyrażenie na wartość wektora $\mathbf{l}$ możemy napisać albo jako

$$l = (r\sin\theta)p = pr_{\perp} \quad (12-4b)$$

albo jako

$$l = r(p\sin\theta) = rp_{\perp}. \quad (12-4c)$$

$r_{\perp} (= r\sin\theta)$ w tych wyrażeniach jest składową wektora $\mathbf{r}$ w kierunku prostopadłym do kierunku działania $\mathbf{p}$, a $p_{\perp} (= p\sin\theta)$ — składową $\mathbf{p}$ w kierunku prostopadłym do $\mathbf{r}$. Wielkość $r_{\perp}$ w równaniu (12-4b) często przyjmuje nazwę *ramienia pędu*. Z równania (12-4c) wynika, że tylko składowa $\mathbf{p}$ prostopadła do $\mathbf{r}$ wpływa na moment pędu. Kiedy kąt θ pomiędzy $\mathbf{r}$ i $\mathbf{p}$ jest równy 0 albo 180°, czyli gdy nie ma składowej prostopadłej $p_{\perp} = p\sin\theta = 0$, wtedy linia działania wektora $\mathbf{p}$ przechodzi przez początek układu i $r_{\perp}$ jest także równe zero. W tym przypadku obydwa równania (12-4b) i (12-4c) prowadzą do wartości momentu pędu l równej zero.

Przechodzimy teraz do wyprowadzenia ważnej zależności pomiędzy momentem siły i momentem pędu. Widzieliśmy, że siła $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt = d\mathbf{p}/dt$ dla pojedynczego punktu materialnego. Pomnóżmy wektorowo przez $\mathbf{r}$ obie strony tego równania; otrzymujemy

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Lecz $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ jest właśnie momentem siły względem punktu O . Możemy zatem zapisać, że

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (12-5)$$

Różniczkując następnie równanie (12-3) otrzymujemy

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}).$$

Pochodną iloczynu wektorowego obliczamy w ten sam sposób, jak pochodną zwykłego iloczynu, pamiętając przy tym, aby nie zmienić porządku czynników. Mamy

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Lecz ponieważ $d\mathbf{r}$ jest wektorem przemieszczenia punktu materialnego w czasie dt , zatem

$d\mathbf{r}/dt$ jest chwilową prędkością punktu materialnego. Wiemy także, że $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; a więc nasze równanie przepisujemy w zmienionej postaci:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Wiemy też, że $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$, ponieważ iloczyn wektorowy dwóch wektorów równoległych jest zawsze równy zeru. Przeto

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (12-6)$$

Przyjrzenie się równaniom (12-5) i (12-6) prowadzi do wniosku, że

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}. \quad (12-7)$$

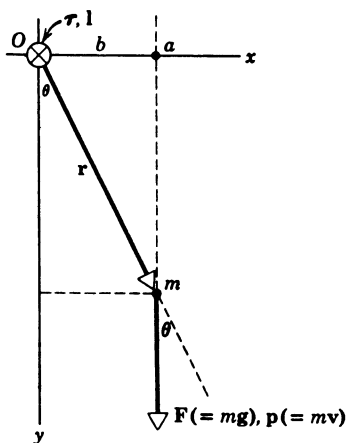
Równanie to mówi, że zmiana momentu pędu punktu materialnego w jednostce czasu jest równa momentowi siły działającej na ten punkt. Jest to równanie ruchu obrotowego, analogiczne do równania (9-12), które głosi, że stosunek zmiany pędu punktu materialnego do czasu, w którym ta zmiana nastąpiła, jest równy sile działającej na ten punkt, czyli że $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$.

Równanie (12-7), podobnie jak wszystkie równania wektorowe, równoważne jest trzem równaniami skalarnym, czyli

$$\tau_x = \left(\frac{dl_x}{dt} \right)_x, \quad \tau_y = \left(\frac{dl_y}{dt} \right)_y, \quad \tau_z = \left(\frac{dl_z}{dt} \right)_z. \quad (12-8)$$

Składowa x momentu przyłożonej siły dana jest przez składową x czasowej zmiany momentu pędu. To samo dotyczy kierunków y oraz z .

Przykład 1. Punkt materialny o masie m spoczywający w punkcie a (rys. 12-4), zaczyna spadać równoległe do pionowej osi y . (a) Znaleźć moment siły działającej na m w dowolnej chwili t , względem początku



Rys. 12-4. Punkt materialny o masie m spada pionowo z punktu a . Moment siły i moment pędu względem punktu O są skierowane prostopadle pod płaszczyznę rysunku i oznaczone umownym symbolem $\otimes$ w punkcie O

układu O . (b) Znaleźć moment pędu punktu m w dowolnej chwili t , względem tego samego punktu. (c) Pokazać, że zależność $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ (równanie (12-7)) prowadzi do poprawnego wyniku, gdy zastosujemy ją do tego dobrze znanego zagadnienia.

(a) Moment siły określa się z równania (12-1), czyli z $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, a jego wartość liczbowa wynosi

$$\tau = rF \sin \theta.$$

W tym przykładzie $r \sin \theta = b$, a $F = mg$, tak że

$$\tau = mgb = a, \quad \text{czyli że jest stałe.}$$

Widzimy, że moment siły jest po prostu iloczynem siły (mg) przez ramię siły (b). Reguła prawej ręki wskazuje, że wektor τ jest skierowany prostopadle za powierzchnię rysunku.

(b) Moment pędu określa nam równanie (12-3), czyli $l = r \times p$, a jego wartość liczbowa wynosi

$$l = rpsin\theta.$$

W przykładzie tym $r\sin\theta = b$, a $p = mv = m(gt)$, tak że

$$l = mgbt.$$

Stosując regułę prawej ręki widzimy, że l jest skierowane prostopadle za rysunek, co oznacza, że l i τ są wektorami równoległymi. W miarę upływu czasu zmienia się tylko wartość wektora l , jego kierunek zaś pozostaje w tym przypadku zawsze ten sam.

(c) Ponieważ dl , tj. zmiana l , oraz τ są równoległe, możemy zamienić wyrażenie wektorowe $\tau = dl/dt$ na wyrażenie skalarne

$$\tau = dl/dt.$$

Używając wyrażeń na τ i l z punktów (a) i (b), obliczonych powyżej, otrzymujemy tożsamość:

$$mgb = \frac{d}{dt}(mgbt) = mgb.$$

Tak więc zależność $\tau = dl/dt$ prowadzi do poprawnego wyniku w tym prostym przypadku. Rzeczywiście, jeżeli skreślimy stałą b z dwóch pierwszych wyrazów powyższego wzoru, a na miejsce gt wstawimy v , otrzymamy

$$mg = \frac{d}{dt}(mv).$$

Ponieważ $mg = F$, a $mv = p$, otrzymujemy znane równanie $F = dp/dt$. Zatem jak wskazywaliśmy poprzednio, zależności takie jak $\tau = dl/dt$, chociaż często szeroko stosowane, nie są nowymi podstawowymi postulatami mechaniki klasycznej, ale są raczej sformułowaniem newtonowskich praw dla ruchu obrotowego.

Zwracamy uwagę, że wartości τ i l w tym przykładzie zależą od wyboru początku układu, to znaczy od b . W szczególności, jeżeli $b = 0$, to $\tau = 0$ i $l = 0$.

12-4. Układy punktów materialnych

Dotychczas zajmowaliśmy się tylko pojedynczymi punktami materialnymi. Przejdźmy teraz do układu wielu punktów materialnych. Aby obliczyć całkowity moment pędu L układu punktów materialnych względem danego punktu, musimy dodać wektorowo momenty pędu wszystkich pojedynczych punktów materialnych układu względem tego samego punktu. Dla układu zawierającego n punktów materialnych piszemy

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_n = \sum_{i=1}^n l_i,$$

pamiętając, że suma (geometryczna), dotyczy wszystkich punktów materialnych układu.

W miarę upływu czasu całkowity moment pędu L układu względem ustalonego punktu odniesienia (który wybraliśmy, podobnie jak przy definiowaniu l za pomocą równania (12-3), za początek inercjalnego układu odniesienia) może ulegać zmianie. Zmiana ta, dL/dt , wynika z dwóch źródeł: (1) siły wewnętrzne działające pomiędzy punktami materialnymi są przyczyną momentów sił działających na punkty materialne układu, (2) siły zewnętrzne są przyczyną momentów sił działających na punkty materialne układu.

Jeżeli obowiązuje trzecie prawo Newtona, tzn. jeżeli siły pomiędzy dowolnymi dwoma punktami materialnymi są nie tylko równe co do wartości bezwzględnej i przeciwnie skierowane, lecz leżą także na linii prostej łączącej te dwa punkty, to całkowity wewnętrzny

moment siły jest równy zeru. Moment siły każdej pary sił akcja-reakcja jest bowiem zawsze równy zeru.

Tak więc pierwsze źródło zmiany momentu pędu w czasie nie daje żadnego wkładu. Dla wybranego punktu odniesienia tylko drugie źródło pochodzące od sił zewnętrznych wpływa na zmianę momentu pędu, czyli

$$\tau_{zew} = \frac{dL}{dt}; \quad (12-9)$$

τ_{zew} oznacza sumę wszystkich zewnętrznych momentów sił działających na układ. Innymi słowy, zmiana całkowitego momentu pędu układu punktów materialnych w jednostce czasu względem początku inercjalnego układu odniesienia jest równa sumie zewnętrznych momentów sił działających na układ. W rozważaniach późniejszych będziemy opuszczać dla wygody indeks „zew” w sytuacjach, w których nie spowoduje to żadnych nieporozumień.

Równanie (12-9) jest uogólnieniem równania (12-7) na układ wielu punktów materialnych. Kiedy mamy tylko jeden punkt materialny, to zarówno siły wewnętrzne, jak i momenty tych sił nie występują. Równanie (12-9) obowiązuje zarówno wtedy, gdy punkty materialne wchodzące w skład układu poruszają się względem siebie, jak i wtedy, gdy zajmują względem siebie ustalone położenie, jak to zachodzi w ciele sztywnym.

Równanie (12-9) jest w ruchu obrotowym odpowiednikiem równania (9-17):

$$\mathbf{F}_{zew} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (9-17)$$

które wskazuje, że dla układu punktów materialnych (ciała sztywnego albo nieszywnego) wypadkowa zewnętrzna siła działająca na układ równa się zmianie pędu układu w jednostce czasu.

Tak jak to założyliśmy przy wyprowadzaniu równania (12-9), obowiązuje ono tylko wówczas, gdy τ i L mierzymy względem początku inercjalnego układu odniesienia. Możemy zapytać, czy równanie to jest słuszne również dla tych dwóch wektorów, mierzonych względem dowolnego punktu (np. jakiegoś punktu materialnego) poruszającego się układu. Ogólnie biorąc, taki punkt poruszałby się po drodze bardzo złożonej, w miarę jak ciało lub układ punktów materialnych przesuwałby się albo też zmieniał swoją konfigurację; zatem równanie (12-9) nie mogłoby być stosowane do takiego punktu odniesienia.

Jednakże, gdy tym wybranym punktem odniesienia byłby środek masy układu, to chociaż nie ma on stałego położenia w naszym układzie odniesienia, równanie (12-9) obowiązuje*. Jest to jedna z ważniejszych właściwości środka masy. Dzięki niej możemy wyodrębnić z ogólnego ruchu układu punktów materialnych ruch postępowy jego środka masy (równanie (9-17)) i ruch obrotowy wokół środka masy (równanie (12-9)).

12-5. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym i moment bezwładności

Zwróćmy teraz naszą uwagę na szczególny przypadek układu punktów materialnych, to jest na *ciało sztywne*. W ciele sztywnym punkty materialne zajmują zawsze te same położenia względem siebie. Badając ruch obrotowy ciała sztywnego rozważymy najpierw

* Patrz zadanie 10 w tym rozdziale oraz K. R. Symon, *Mechanics* trzecie wydanie, Addison-Wesley Publishing Co., 1972, rozdział 4.2.

przypadek szczególny tego ruchu, w którym oś obrotu jest nieruchoma* w inercjalnym układzie odniesienia. Później będziemy badać bardziej ogólne układy i ruchy.

Wyobraźmy sobie teraz ciało sztywne obracające się z prędkością kątową ω dookoła osi, która jest nieruchoma w wybranym układzie inercjalnym, jak to pokazuje rys. 11-1. Każdy punkt takiego obracającego się ciała ma pewną energię kinetyczną. Punkt materialny o masie m i odległości r od osi obrotu porusza się po okręgu o promieniu r z prędkością kątową ω dookoła tej osi i ma prędkość liniową $v = \omega r$. Jego energia kinetyczna wynosi zatem $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$. Całkowita energia kinetyczna ciała jest sumą energii kinetycznych wszystkich jego punktów.

Jeżeli ciało jest sztywne, jak założyliśmy na początku tego paragrafu, ω jest stałe dla wszystkich punktów materialnych. Promień r może być różny dla różnych punktów. Stąd całkowita energia kinetyczna K obracającego się ciała wyraża się jako

$$K = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2.$$

Czynnik $\sum m_i r_i^2$ jest sumą iloczynów mas cząstek przez kwadraty ich odległości od osi obrotu. Jeżeli oznaczymy tę wielkość przez I , to

$$I = \sum m_i r_i^2. \quad (12.10)$$

Wielkość tę nazywamy *momentem bezwładności* ciała względem wybranej osi obrotu. Zwracamy uwagę, że moment bezwładności ciała zależy od wyboru osi obrotu, od kształtu ciała i od sposobu rozmieszczenia masy ciała. Moment bezwładności ma wymiar ML^2 . Zwykle mierzymy go w $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Posługując się pojęciem momentu bezwładności przepiszemy jeszcze raz wyrażenie na energię kinetyczną obracającego się ciała sztywnego w postaci:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (12.11)$$

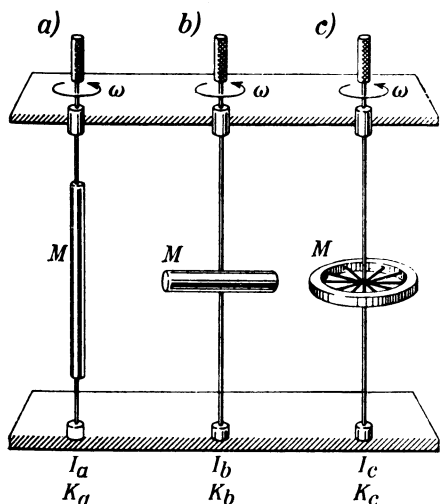
Jest to analogiczne wyrażenie do energii kinetycznej w ruchu postępowym ciała, $K = \frac{1}{2}Mv^2$. Widzieliśmy już, że prędkość kątowa ω jest analogiczną wielkością do prędkości liniowej v . Teraz widzimy, że moment bezwładności I jest analogiczną wielkością do masy m w ruchu postępowym. Chociaż masa ciała nie zależy od jego położenia, moment bezwładności ciała zależy od osi, dookoła której ciało się obraca.

Powinniśmy zdawać sobie sprawę, że energia kinetyczna w ruchu obrotowym, określona równaniem (12-11), jest po prostu sumą zwykłych energii kinetycznych ruchu postępowego wszystkich cząstek ciała, a nie żadnym nowym rodzajem energii. Energia kinetyczna ruchu obrotowego jest po prostu wygodniejszą formą wyrażenia energii kinetycznej dla obracającego się ciała sztywnego.

Równania (12-10) i (12-11) wykazują, że energia kinetyczna ciała, przy danej prędkości kątowej ω , zależy nie tylko od masy ciała, ale także od sposobu, w jaki masa ta jest rozłożona wokół osi obrotu. Doświadczenie zilustrowane na rys. 12-5 pozwala się o tym prze-

* Jak stwierdziliśmy w paragrafie 12-4, ogólny ruch układu punktów materialnych możemy podzielić na ruch postępowy jego środka masy i ruch obrotowy wokół środka masy. Zatem rozważania tego rozdziału odnoszą się także do obrotu dookoła osi, która nie jest nieruchoma w inercjalnym układzie odniesienia, pod warunkiem, że (1) oś przechodzi przez środek masy i (2) że poruszająca się oś ma zawsze ten sam kierunek w przestrzeni, czyli że oś w każdej chwili jest równoległa do osi w chwili następnej. Chociaż będziemy często powoływać się na „oś nieruchomą”, termin ten będzie oznaczał również specjalne przypadki osi ruchomych.

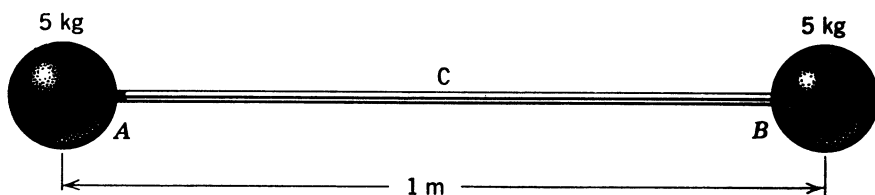
konać. Rysunek przedstawia trzy identyczne aluminiowe pręty i do każdego z nich przy-
czepione jest ciało o masie M wykonane z ołowiu. W przypadku (a) masa jest rozłożona
bardzo blisko wzdłuż pręta, tak że wielkości r_i w równaniu (12-10) dla cząstek ołowiu są
względnie małe; w przypadku (b) cząstki są, średnio biorąc, położone dalej od pręta
i w przypadku (c), w którym uformowano pierścień wirujący, cząstki ołowiu są jeszcze
dalej, co odpowiada jeszcze większym wartościom r_i .



Rys. 12-5. Doświadczenie to ma pokazać, że $I_a < I_b < I_c$.
Trzy ciała mają tę samą masę M , lecz w różny sposób
rozmieszczoną względem osi obrotu

Obróćmy teraz każde z tych ciał, nadając im jednakową prędkość kątową ω . Wiemy
z doświadczenia, że do nadania tej prędkości prętowi (a) potrzebna jest stosunkowo mała
praca, nieco większa potrzebna jest prętowi (b), a jeszcze większa prętowi (c). W istocie,
gdybyśmy nie byli pewni, które ciało związane jest z którym prętem, moglibyśmy łatwo
to sprawdzić, przeprowadzając powyższe doświadczenie. Ponieważ wykonana praca na-
dająca prędkość obrotową każdemu z prętów jest równa energii kinetycznej $\frac{1}{2}I\omega^2$, a wynik
doświadczenia wskazuje, że $K_a < K_b < K_c$ — gdy każdy pręt uzyskuje tę samą prędkość
kątową — dochodzimy do wniosku, że $I_a < I_b < I_c$. Jest to właśnie dokładnie to, czego
oczekiwaliśmy na podstawie definicji momentu bezwładności I (równanie (12-10)). W pa-
ragrafie 12-6 zobaczymy, że tak jak masa M , którą możemy nazywać bezwładnością, jest
miarą oporu stawianego przez ciało przy zmianie jego ruchu postępowego, tak I — mo-
ment bezwładności — jest miarą oporu stawianego przez ciało, przy zmianie jego ruchu
obrotowego dookoła danej osi.

Przykład 2. Rozważmy ciało składające się z dwóch kul o masach 5,0 kg każda, połączonych ze
sobą lekkim, sztywnym prętem o długości 1 m (rys. 12-6). Kule traktujemy jako cząstki punktowe, a masę
pręta pomijamy. Obliczyć moment bezwładności: (a) względem osi normalnej przechodzącej przez środek
układu C, (b) względem osi normalnej przechodzącej przez jedną z kul.



Rys. 12-6. Przykład 2. Obliczanie momentu bezwładności ciężarków połączonych prętem

(a) Gdy oś obrotu jest prostopadła do pręta łączącego kule i przechodzi przez C , moment bezwładności wynosi

$$I_C = \sum m_i r_i^2 = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 = (5,0 \text{ kg})(0,5 \text{ m})^2 + (5,0 \text{ kg})(0,5 \text{ m})^2 = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

(b) Jeżeli oś obrotu jest normalna do płaszczyzny rysunku i przechodzi przez kulę A albo B , to możemy napisać dwa równania na moment bezwładności:

$$I_A = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 = (5,0 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 + (5,0 \text{ kg})(1,0 \text{ m})^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_B = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 = (5,0 \text{ kg})(1,0 \text{ m})^2 + (5,0 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

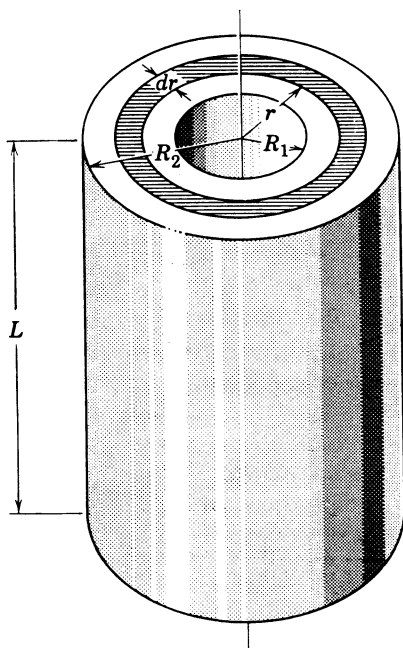
Zatem moment bezwładności jest dwa razy większy, gdy oś obrotu przechodzi przez jeden z końców, niż w przypadku, gdy oś przechodzi przez środek układu.

Dla ciała sztywnego, które nie składa się z oddzielnych mas punktowych, lecz ma ciągły rozkład masy, wyrażenie określające moment bezwładności jest bardziej złożone. Proces sumowania we wzorze $I = \sum m_i r_i^2$ zastępujemy procesem całkowania. Wyobraźmy sobie ciało podzielone na nieskończenie małe elementy o równych masach dm . Niech r oznacza odległość każdego takiego elementu od osi obrotu. W takim przypadku moment bezwładności otrzymujemy z wyrażenia

$$I = \int r^2 dm, \quad (12-12)$$

gdzie całkowanie odbywa się po całej objętości ciała. Przejście od sumowania dla nieciągłego rozkładu masy do całkowania dla ciągłego rozkładu jest takie samo, jak przy omawianiu środka masy w paragrafie 9-1. Dla ciał o nieregularnym kształcie proces całkowania może być trudny do przeprowadzenia. Dla ciał o prostym geometrycznym kształcie całkowanie daje się łatwo przeprowadzić, gdy za oś obrotu obierzemy oś symetrii tego ciała.

Dla przykładu weźmy rurę cylindryczną, obracającą się dookoła swej osi (rys. 12-7). Najbardziej wygodnym, nieskończenie małym elementem masy będzie powłoka cylin-



Rys. 12-7. Obliczanie momentu bezwładności rury cylindrycznej

dryczna o promieniu r , grubości dr i długości L . Jeżeli gęstość materiału, czyli ilość masy na jednostkę objętości oznaczmy przez ϱ , to

$$dm = \varrho r dV,$$

gdzie dV jest objętością cylindrycznej powłoki o masie dm . Wiemy, że

$$dV = (2\pi r dr)L,$$

stąd

$$dm = 2\pi L \varrho r dr.$$

Zatem moment bezwładności względem osi cylindra wynosi

$$I = \int r^2 dm = 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} \varrho r^3 dr.$$

R_1 oznacza tu wewnętrzny promień cylindra, a R_2 — zewnętrzny.

Jeżeli ciało ma zmienną gęstość ϱ , to powinniśmy znać zależność tej gęstości od r albo od innych współrzędnych i uwzględnić to przy całkowaniu. Przyjmijmy jednak dla uproszczenia, że gęstość ciała jest stała w całej objętości cylindra. Wtedy

$$I = 2\pi L \varrho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi L \varrho \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \varrho \pi (R_2^2 - R_1^2) L \frac{R_2^2 + R_1^2}{2}.$$

Całkowita masa cylindra M równa się iloczynowi gęstości przez objętość $\pi(R_2^2 - R_1^2)L$, czyli

$$M = \varrho \pi (R_2^2 - R_1^2) L.$$

Moment bezwładności rury cylindrycznej (albo pierścienia) o masie M , wewnętrznym promieniu R_1 i zewnętrznym R_2 , wynosi zatem

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

względem osi cylindra. Jeżeli promień wewnętrzny znika, czyli $R_1 = 0$, to mamy walec pełny (albo krążek), zatem

$$I = \frac{1}{2} M R^2,$$

gdzie R jest promieniem pełnego walca o masie M .

Cylinder przejdzie w obręcz, gdy grubość jego ścianek będzie bardzo mała. W tym przypadku

$$R_1 \cong R_2 \cong R,$$

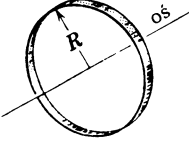
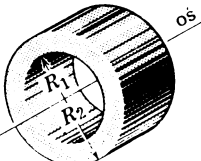
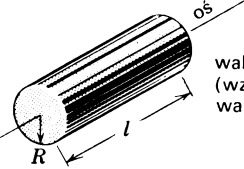
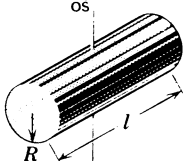
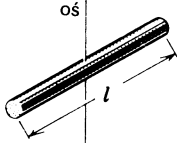
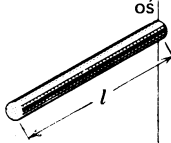
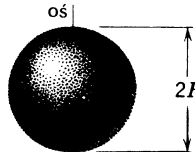
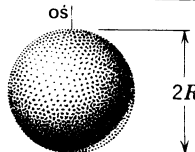
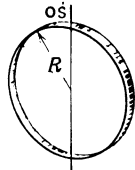
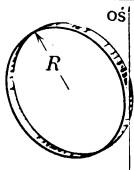
i wyrażenie

$$I = M R^2$$

będzie momentem bezwładności obręczy o masie M i promieniu R względem osi symetrii obręczy.

Wzór ten jest oczywisty dla cienkiej obręczy, ponieważ każdy element masy obręczy znajduje się w tej samej odległości R od osi obrotu. Walec pełny (albo krążek), o *tej samej masie* co obręcz, będzie miał mniejszy moment bezwładności niż obręcz, ponieważ większa część masy walca (albo krążka), znajduje się w mniejszej odległości od osi obrotu niż R .

Tablica 12-1 podaje momenty bezwładności kilku typowych brył względem pewnych osi.

 obręcz (względem osi obręczy) $I = MR^2$ a)	 pierścień (względem osi pierścienia) $I = \frac{M}{2} (R_1^2 + R_2^2)$ b)
 walec pełny (względem osi walcu) $I = \frac{MR^2}{2}$ c)	 walec pełny albo dysk (względem średnicy przechodzą- cej przez środek walcu) $I = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$ d)
 cienki pręt (względem osi symetrii prostopadłej do pręta) $I = \frac{Ml^2}{12}$ e)	 cienki pręt (względem osi przechodzącej przez jeden z jego końców prostopadłej do pręta) $I = \frac{Ml^2}{3}$ f)
 kula pełna (względem dowolnej średnicy) $I = \frac{2MR^2}{5}$ g)	 bardzo cienka powłoka sferyczna (względem dowolnej średnicy) $I = \frac{2MR^2}{3}$ h)
 obręcz (względem dowolnej średnicy) $I = \frac{MR^2}{2}$ i)	 obręcz (względem dowolnej linii stycznej) $I = \frac{3MR^2}{2}$ j)

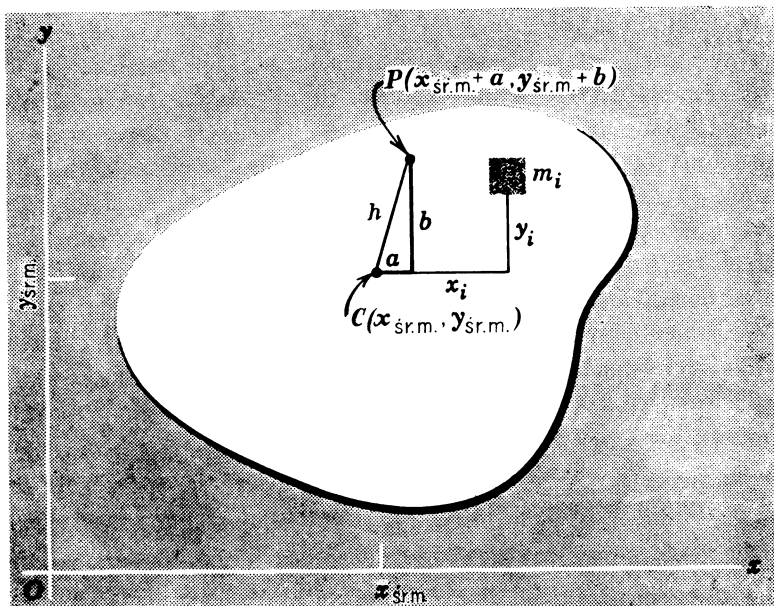
Każdy z tych wzorów otrzymujemy w drodze całkowania przeprowadzonego podobnie jak w przypadku cylindra. M w każdym z podanych równań oznacza masę całkowitą.

Istnieje prosta zależność między momentem bezwładności ciała względem danej osi I a jego momentem bezwładności $I_{s.r.m.}$ względem osi *przechodzącej przez środek masy*

i równoległej do poprzedniej. Jeżeli M jest całkowitą masą ciała, a h — odległością między osiami, to spełnione jest równanie

$$I = I_{sr.m.} + Mh^2. \quad (12-13)$$

Dowód tej zależności (twierdzenie Steinera) jest następujący. Niech punkt C będzie środkiem masy ciała o dowolnym kształcie, którego przekrój przedstawia rys. 12-8. Środek masy ma współrzędne $x_{sr.m.}$ i $y_{sr.m.}$. Wybieramy płaszczyznę xy tak, że $z_{sr.m.}$ równa się zero, czyli że C leży na tej płaszczyźnie. Rozważmy teraz punkt P o współrzędnych $(x_{sr.m.} + a)$ i $(y_{sr.m.} + b)$. Odległość tego punktu od środka masy wynosi $h = \sqrt{a^2 + b^2}$. Kwadrat odległości elementu masy m_i od osi przechodzącej przez punkt C równa się $x_i^2 + y_i^2$,



Rys. 12-8. Wyprowadzenie twierdzenia Steinera. Znając moment bezwładności względem C , możemy znaleźć jego wartość względem P

gdzie x_i i y_i są współrzędnymi tego elementu. Natomiast kwadrat odległości tego samego elementu m_i od osi przechodzącej przez punkt P wynosi $(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2$. Stąd moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt P zapiszemy w postaci:

$$I = \sum m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum m_i x_i - 2b \sum m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum m_i.$$

Z definicji środka masy mamy

$$\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = 0,$$

zatem dwa wyrazy środkowe znikają. Pierwszy wyraz jest po prostu momentem bezwładności $I_{sr.m.}$ względem osi przechodzącej przez środek masy, a drugi wyraz równa się Mh^2 . Dlatego też moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez punkt P wynosi $I = I_{sr.m.} + Mh^2$.

Przy pomocy wzoru (12-13) niektóre zależności z tablicy 12-1 można otrzymać z poprzednich. Na przykład (f) wynika z (e), (j) wynika z (i), gdy uwzględnimy równanie (12-13). Wyprowadzona formuła okaże się szczególnie potrzebna przy rozwiązywaniu zadań, w których mamy do czynienia z ruchem złożonym, postępowo-obrotowym.

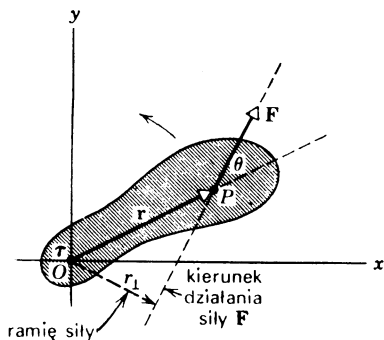
12-6. Dynamika ciała sztywnego

W paragrafie tym będziemy dalej zajmowali się ruchem obrotowym ciała sztywnego dookoła osi nieruchomej w inercjalnym układzie odniesienia*. Przede wszystkim wprowadzimy pojęcie momentu siły w zastosowaniu do ciała sztywnego, a później powiązemy moment siły z przyspieszeniem kątowym tego ciała poruszającego się ruchem obrotowym.

Przypuśćmy, że przykładamy siłę o momencie τ do jednego z punktów ciała sztywnego. Ponieważ wszystkie punkty prawdziwie sztywnego ciała pozostają w ustalonych wzajemnych odległościach, to możemy powiedzieć, że przyłożona siła działa na całe ciało sztywne. Ogólnie biorąc, wektor τ nie będzie leżał wzdłuż osi, dookoła której ciało sztywne może się obracać. W tym paragrafie nie jesteśmy zainteresowani momentami sił przyłożonych do ciała, lecz tylko ich składowymi leżącymi wzdłuż osi obrotu**, bowiem tylko te składowe mogą powodować obrót ciała dookoła wybranej osi. Składowe momentu siły prostopadłe do osi obrotu starają się ją wytrącić z ustalonego położenia. Na wstępie założyliśmy jednak, że oś pozostaje w ustalonym położeniu. Ciało sztywne może być przytwierdzone do sztywnego pręta, który zajmuje ustalone położenie dzięki łożyskom znajdującym się na jego końcach. Jeżeli moment przyłożonej siły ma składowe prostopadłe do tego pręta, starające się go obrócić, to pojawi się automatycznie równy co do wartości i przeciwnie skierowany moment siły łożysk na pręt, równoważąc efekt składowych prostopadłych.

Rysunek 12-9 (porównać z rys. 11-3) przedstawia fragment ciała sztywnego, które może obracać się dookoła osi z w inercjalnym układzie odniesienia. Siła F , leżąca umownie w płaszczyźnie xy , działa na punkt P ciała sztywnego. Położenie P względem osi obrotu (osi z) definiuje wektor r . Siła działająca na punkt P działa tym samym na ciało sztywne jako całość, co wyraża równanie (12-1) albo

$$\tau = r \times F.$$



Rys. 12-9. Siła F działa na punkt P ciała sztywnego, tworząc moment siły $\tau = r \times F$ względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku przechodzącej przez punkt O . Zaznaczone jest ramię siły $r_{\perp}$. Wektor τ jest skierowany prostopadłe do płaszczyzny rysunku

Ponieważ wybraliśmy r i F w płaszczyźnie xy , więc moment siły τ będzie skierowany wzdłuż osi z . Z reguły prawej ręki wynika, że wektor τ będzie skierowany prostopadłe nad płaszczyznę xy (rys. 12-9). Jeżeli r i F nie leżałyby w płaszczyźnie rysunku, to τ nie byłby równo-

* Patrz odnośnik na str. 274.

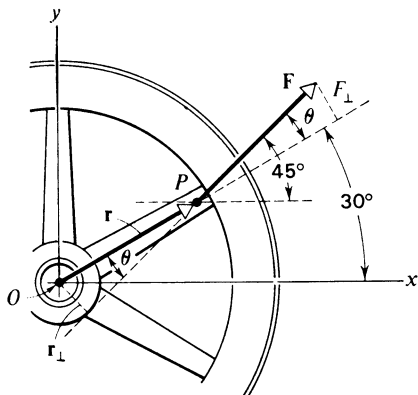
** Tak jak dla każdego innego wektora, możemy mówić o wektorowej składowej momentu siły w dowolnym kierunku; może to być dana oś obrotu. Dla momentu siły — oraz dla innych wielkości kątowych — często mówimy o składowej względem danego kierunku czy osi. Znaczenie jest to samo.

legły do osi z i rozpatrywalibyśmy tutaj tylko jego składowe wzdłuż tej osi. Wartość τ obliczamy z równania (12-2) albo z

$$\tau = rF \sin \theta,$$

co, jak wiemy, może być napisane w postaci $\tau = rF_{\perp}$ albo $\tau = Fr_{\perp}$.

Przykład 3. Koło wagonu może się obracać dookoła osi poziomej przechodzącej przez punkt O . Do szprychy przykładamy siłę 10 kG w punkcie P odległym od osi o 30 cm. Odcinek OP tworzy z poziomem (osią x) kąt 30° . Siła F leżąca w płaszczyźnie koła tworzy z poziomem kąt 45° (z osią x -ów). Jaki jest moment siły działającej na koło?



Rys. 12-10. Przykład 3

Kąt między wektorem r łączącym punkty O i P a przyłożoną siłą F (rys. 12-10) oznaczamy przez θ .
Lecz

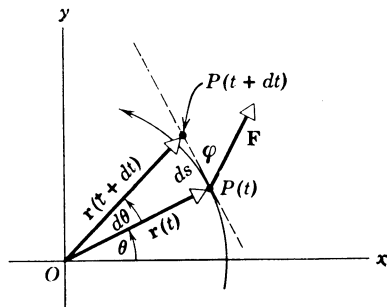
$$\theta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

Stąd wartość momentu siły wynosi

$$\tau = rF \sin \theta = 0,3 \text{ m} \cdot 10 \text{ kG} \cdot \sin 15^\circ = 0,78 \text{ kG} \cdot \text{m}.$$

Ten sam wynik otrzymamy, oczywiście, stosując wzory: $\tau = rF_{\perp}$ lub $\tau = Fr_{\perp}$. Moment siły jest wektorem ($\tau = r \times F$) skierowanym poza płaszczyznę rysunku i leżącym na osi obrotu. Jego wartość bezwzględna wynosi 0,78 kGm.

Znajdziemy teraz zależność pomiędzy momentem siły przyłożonej do ciała sztywnego (rys. 12-9) i jego przyspieszeniem kątowym. W ciągu nieskończenie krótkiego przedziału czasu dt ciało sztywne obróci się o nieskończenie mały kąt $d\theta$. Wiemy już, że możemy opisać ruch obrotowy ciała sztywnego dookoła nieruchomej osi, badając ruch pojedynczego punktu tego ciała, np. punktu P (rys. 12-9). Dla wygody bierzemy pod uwagę nie całe ciało sztywne rys. (12-11), lecz tylko P , który je reprezentuje, i wektor r , który wyznacza położenie punktu P względem osi obrotu.



Rys. 12-11. W czasie dt punkt P ciała sztywnego (z rys. 12-9) zakresli łuk ds o promieniu r . Ciało sztywne (nie zaznaczone na rysunku) i wektor wodzący r zakreslą kąt $d\theta$ w tym samym czasie dt

W czasie dt punkt P zakreśli nieskończenie krótki łuk ds wzdłuż okręgu o promieniu r , gdy w tym samym czasie ciało obróci się o nieskończenie mały kąt $d\theta$, zatem

$$ds = r d\theta.$$

Praca dW wykonana przez siłę F podczas tego małego obrotu wynosi

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F \cos \varphi ds = (F \cos \varphi)(r d\theta),$$

gdzie $F \cos \varphi$ jest składową siły F w kierunku ds .

Wyrażenie $(F \cos \varphi)r$ jest wartością bezwzględną chwilowego momentu siły F , działającej na ciało sztywne, względem osi przechodzącej przez O i prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Zatem

$$dW = \tau d\theta. \quad (12-14)$$

Jest to różniczkowe wyrażenie na pracę wykonaną w czasie obrotu (dookoła nieruchomej osi), równoważne wyrażeniu $dW = F dx$ na pracę wykonaną w ruchu postępowym (wzdłuż linii prostej).

Aby otrzymać wyrażenie na moc w ruchu obrotowym (dookoła nieruchomej osi), dzielimy obydwie strony równania (12-14) przez nieskończenie mały przedział czasowy dt , w którym ciało obróciło się o kąt $d\theta$, a więc

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt},$$

czyli

$$P = \tau \omega,$$

co jest mocą chwilową P . To ostatnie wyrażenie jest analogiczne do wyrażenia $P = Fv$ dla ruchu postępowego (wzdłuż linii prostej).

Jeżeli na ciało działa kilka sił F_1, F_2 itd. leżących w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu, to praca wykonana przez te siły w ciągu czasu dt , kiedy ciało obróci się o kąt $d\theta$, będzie równa

$$dW = F_1 \cos \varphi_1 r_1 d\theta + F_2 \cos \varphi_2 r_2 d\theta + \dots = (\tau_1 + \tau_2 + \dots) d\theta = \tau d\theta,$$

gdzie $r_1 d\theta$ równa się ds_1 , czyli przemieszczeniu punktu, do którego przyłożona jest siła F_1 , kąt φ_1 jest to kąt między wektorami F_1 i ds_1 itd., a τ jest wartością składowej momentu siły względem osi przechodzącej przez O . Przy obliczaniu wypadkowego momentu siły znak każdego momentu składowego uznajemy za dodatni albo ujemny, w zależności od tego, jaki obrót powodowałaby dana siła, działając na ciało oddzielnie. Przyjmujemy, że moment siły jest dodatni, jeżeli pod wpływem tej siły ciało obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara; moment siły jest ujemny, gdy siła powoduje ruch zgodny ze wskazówkami zegara.

Jeżeli ciało jest doskonale sztywne, nie występuje wewnętrzny ruch jego punktów. Wszystkie punkty pozostają zawsze na określonych stałych miejscach względem siebie i poruszają się tylko jako całość. Wewnątrz ciała doskonale sztywnego nie ma zatem rozpraszania energii. Możemy więc porównać pracę wykonaną w jednostce czasu z przyrostem energii kinetycznej na jednostkę czasu. Moc, czyli praca wykonana nad ciałem sztywnym w jednostce czasu wynosi

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega. \quad (12-15)$$

Przyrost energii kinetycznej ciała sztywnego w jednostce czasu wynosi

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}I\omega^2).$$

I jest wielkością stałą w czasie, bowiem ciało jest sztywne, a oś obrotu nieruchoma. Dlatego piszemy:

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}I\omega^2) = \frac{1}{2}I \frac{d}{dt}(\omega^2) = I\omega \frac{d\omega}{dt} = I\omega\alpha. \tag{12-16}$$

Z równań (12-15) i (12-16) otrzymujemy

$$\tau\omega = I\alpha\omega,$$

a stąd

$$\tau = I\alpha. \tag{12-17}$$

Równanie (12-17) dotyczy ruchu obrotowego ciała sztywnego dookoła osi nieruchomej. Moment siły τ , prędkość kątowna ω i przyspieszenie kątowe α muszą leżeć wzdłuż tej osi i przyjmują kierunek zgodnie z regułą prawej ręki. Odpowiednikiem tego stanu w ruchu postępowym jest przypadek, w którym siła F działająca na ciało, jego prędkość v i jego przyspieszenie a , leżą na danej linii prostej, przyjmując jeden z dwóch możliwych kierunków.

Sześć powyższych wielkości są to wektory, które mogą przyjmować tylko dwa kierunki, jeśli są położone wzdłuż nieruchomej prostej. Przyjmując jeden z tych kierunków za dodatni (+), a drugi za ujemny (−), możemy traktować te wektory jako wielkości algebraiczne i brać pod uwagę tylko ich wartości bezwzględne. Wyprowadzając równanie (12-17)($\tau = I\alpha$), po prostu przekształciliśmy drugą zasadę Newtona z postaci skalarnej, używanej w ruchu postępowym ($F = Ma$), do postaci wygodnej w ruchu obrotowym. Tak jak siła ma związek z przyspieszeniem ciała w ruchu postępowym, tak moment siły ma związek z przyspieszeniem kątowym ciała dookoła danej osi. Moment bezwładności I jest miarą oporu ciała, przeciw zmianie jego ruchu obrotowego przez moment siły. Podobnie w ruchu postępowym bezwładność albo masa M jest miarą oporu ciała przeciwko zmianie jego ruchu postępowego przez daną siłę.

Tablica 12-2

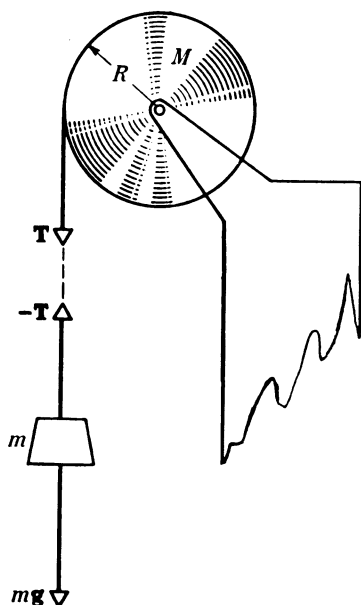
Ruch prostoliniowy		Ruch obrotowy dookoła osi nieruchomej	
przemieszczenie	x	przemieszczenie kątowe	θ
prędkość	$v = \frac{dx}{dt}$	prędkość kątowa	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
przyspieszenie	$a = \frac{dv}{dt}$	przyspieszenie kątowe	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
masa (bezwładność)	M	moment bezwładności	I
siła	$F = Ma$	moment siły	$\tau = I\alpha$
praca	$W = \int Fdx$	praca	$W = \int \tau d\theta$
energia kinetyczna	$\frac{1}{2}Mv^2$	energia kinetyczna	$\frac{1}{2}I\omega^2$
moc	$P = Fv$	moc	$P = \tau\omega$
pęd	Mv	moment pędu	$I\omega$

W tablicy 12-2 porównujemy ruch postępowy ciała sztywnego — wzdłuż linii prostej z ruchem obrotowym ciała sztywnego — dookoła nieruchomej osi.

Obrót ciała sztywnego dookoła nieruchomej osi (obrot, do którego stosuje się równanie $\tau = I\alpha$) nie jest najbardziej ogólnym rodzajem ruchu obrotowego. W ogólnym przypadku ciało podczas ruchu może nie pozostawać sztywne i jego oś obrotu może nie być nieruchoma w inercjalnym układzie odniesienia. W tym ogólnym przypadku stosujemy równanie (12-9), czyli $\tau_{zew} = dL/dt$. Jak już poprzednio zaznaczyliśmy, jest to równoważnik drugiej zasady Newtona dla bardziej ogólnego ruchu postępowego układu punktów materialnych, a mianowicie równania (9-17) albo równania $F_{zew} = dP/dt$.

Do końca tego rozdziału ograniczymy swoje rozważania tylko do obrotów ciała sztywnego dookoła osi nieruchomej. Ale w rozdziale 13 będziemy rozważać pewne ruchy obrotowe bardziej ogólne.

Przykład 4. Jednorodny krążek o promieniu R i masie M zawieszono na łożysku, które obraca się bez tarcia (patrz rys. 12-12). Na obwodzie krążka nawinięty jest lekki sznur, do którego przyłożono stałą siłę T skierowaną w dół. Znaleźć kątowne przyspieszenie krążka i przyspieszenie styczne punktów znajdujących się na obwodzie.



Rys. 12-12. Przykład 4. Stała siła T działająca w dół obraca krążek. Przykład 5. Siły T dostarcza spadająca masa m

Moment siły względem osi krążka wynosi $\tau = TR$, a moment bezwładności względem tej samej osi $I = \frac{1}{2}MR^2$. Z równania

$$\tau = I\alpha$$

mamy

$$TR = (\frac{1}{2}MR^2)\alpha,$$

albo

$$\alpha = \frac{2T}{MR}.$$

Jeżeli masa krążka $M = 2,5$ kg, jego promień $R = 20$ cm i siła $T = 5$ N, to

$$\alpha = \frac{2 \cdot 5 \text{ N}}{2,5 \text{ kg} \cdot 0,2 \text{ m}} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

Przyspieszenie liniowe punktów znajdujących się na obwodzie krążka wynosi

$$a = R\alpha = 20 \text{ rad/s}^2 \cdot 0,2 \text{ m} = 4 \text{ m/s}^2.$$

Przykład 5. Uzupełniamy poprzednie zadanie w ten sposób, że do sznurka przerzuconego przez krążek przywiązujemy ciało o masie m . Znaleźć przyspieszenie kątowe krążka i przyspieszenie styczne punktów na obwodzie krążka.

Niech T będzie naprężeniem sznurka. Ponieważ zawieszone ciało będzie miało przyspieszenie skierowane w dół, więc siła ciężkości musi przewyższać siłę T , jaka działa na ciało. Przyspieszenie a zawieszonego ciała jest takie samo, jak przyspieszenie styczne punktów znajdujących się na obwodzie krążka. Z drugiej zasady Newtona mamy

$$mg - T = ma.$$

Wypadkowy moment siły działającej na krążek wynosi TR , a moment bezwładności $\frac{1}{2}MR^2$, tak że z równania

$$\tau = I\alpha$$

otrzymujemy

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha.$$

Korzystając z zależności $a = R\alpha$ możemy ostatnie równanie przedstawić w postaci:

$$2T = Ma.$$

Rozwiązanie pierwszego i ostatniego równania prowadzi do zależności

$$a = \left(\frac{2m}{M+2m} \right) g$$

oraz

$$T = \left(\frac{Mm}{M+2m} \right) g.$$

Jeżeli teraz krążek ma masę $M = 2,5 \text{ kg}$ i promień $R = 20 \text{ cm}$, jak poprzednio, a masa zawieszonego ciała $m = 5 \text{ N}$, to przyspieszenie liniowe

$$a = \frac{2mg}{M+2m} = \frac{2 \cdot 5 \text{ N}}{2,5 \text{ kg} + 2(5/9,8) \text{ kg}} = 2,85 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a przyspieszenie kątowe

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2,85 \text{ m/s}^2}{0,2 \text{ m}} = 14,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Zwracamy uwagę na fakt, że przyspieszenia dla zawieszonego ciała o ciężarze 5 N są mniejsze niż dla stałej siły 5 N skierowanej w dół i przyłożonej do sznurka (przykład 4). Wiąże się to z faktem, że naprężenie sznurka wpływające na moment siły jest teraz mniejsze niż 5 N i wynosi

$$T = \frac{Mmg}{M+2m} = \frac{2,5 \text{ kg} \cdot 5 \text{ N}}{(2,5+1) \text{ kg}} = 3,6 \text{ N}.$$

Naprężenie sznurka jest zawsze mniejsze od ciężaru zawieszonego ciała, jeżeli ciało to ma przyspieszenie skierowane w dół.

Przykład 6. Przyjmując, że krążek w przykładzie 5 znajdował się początkowo w stanie spoczynku, obliczyć pracę wykonaną przez moment przyłożonej siły działającej w ciągu 2 s . Wyliczyć także przyrost energii kinetycznej ruchu obrotowego krążka.

Ponieważ moment siły jest stały, przyspieszenie kątowe będzie także stałe. Całkowitą drogę kątową w ruchu obrotowym jednostajnie zmiennym otrzymamy z równania (11-5).

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,$$

w którym $\omega_0 = 0$, $\alpha = 14,3 \text{ rad/s}^2$ i $t = 2 \text{ s}$. Po podstawieniu tych wartości otrzymamy

$$\theta = 0 + 0,5 \cdot (14,3 \text{ rad/s}^2) \cdot (2 \text{ s})^2 = 28,6 \text{ rad}.$$

Kiedy moment siły jest stały, wtedy praca wykonana na określonej drodze kąto-
wej

$$W = \tau(\theta_2 - \theta_1),$$

gdzie

$$\tau = TR = 3,6 \text{ N} \cdot 0,2 \text{ m} = 0,72 \text{ N} \cdot \text{m}$$

oraz

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta = 28,6 \text{ rad}.$$

Zatem

$$W = (0,72 \text{ N} \cdot \text{m}) \cdot (28,6 \text{ rad}) = 20,5 \text{ J}.$$

Praca ta powiększy energię kinetyczną ruchu obrotowego krążka. Prędkość kąto-
wa krążka zwiększy się od 0 do wartości ω . Energia kinetyczna przyjmie wartość $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\omega^2$. Aby otrzymać ω , korzy-
stamy z równania (11-3):

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

w którym

$$\omega_0 = 0, \quad t = 2 \text{ s}, \quad \alpha = 14,3 \text{ rad/s}^2.$$

Zatem

$$\omega = 0 + 14,3 \text{ rad/s}^2 \cdot 2 \text{ s} = 28,6 \text{ rad/s}.$$

Energia kinetyczna będzie więc miała wartość

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{4} \cdot 2,5 \text{ kg} \cdot (0,20 \text{ m})^2 \cdot (28,6 \text{ rad/s})^2 = 20,5 \text{ J}.$$

Przyrost energii kinetycznej krążka jest równy, jak należało oczekiwać, pracy wykonanej przez siłę wy-
padkową.

Przykład 7. Pokazać, że w układzie przedstawionym w przykładzie 5 obowiązuje zasada zachowania
energii mechanicznej.

Siła wypadkowa działająca na układ jest siłą ciężkości zawieszonego ciała. Jest to siła zachowawcza.
Patrząc na układ jako całość widzimy, że zawieszone ciało traci energię potencjalną U , kiedy opuszcza się
w dół:

$$U = mgy,$$

gdy y jest pionową odległością, na jaką opuściło się ciało. W tym samym czasie ciało zawieszone uzyskuje
energję kinetyczną ruchu postępowego, a krążek energję kinetyczną ruchu obrotowego. Całkowity przyrost
energii kinetycznej wynosi $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, gdzie v jest prędkością liniową zawieszonoj masy. Następnie
musimy wykazać, że $mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. W ruchu prostoliniowym bez prędkości początkowej $v^2 =$
 $= 2ay$. W przykładzie 5 otrzymaliśmy, że $a = 2mg/(M+2m)$. Stąd

$$mgy = \frac{mgv^2}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{g}{a} \right) = \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{M+2m}{2m} \right) = \frac{1}{4}(M+2m)v^2.$$

Wiemy także, że $\omega = v/R$, a $I = \frac{1}{2}MR^2$. Wstawiając te zależności do prawa zachowania energii, otrzymu-
jemy

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2) \left(\frac{v^2}{R^2} \right) = \frac{1}{4}(M+2m)v^2.$$

A więc energia mechaniczna jest zachowana.

Przykład 8. Wyprowadzić zależność $L = I\omega$, zamieszczoną w tablicy 12-2, dla momentu pędu ciała
sztywnego mogącego się obracać dookoła osi nieruchomej.

Wychodząc ze skalarnej zależności $\tau = I\alpha$ i z definicji $\alpha (= d\omega/dt)$, możemy napisać

$$\tau = I\alpha = I(d\omega/dt) = d(I\omega)/dt,$$

gdzie ostatnie przekształcenie jest możliwe, ponieważ moment bezwładności I jest stały dla danego ciała
sztywnego i danej osi obrotu.

Następnie stosujemy wektorową zależność $\tau_{zew} = dL/dt$ [równanie (12-9)] i piszemy odpowiednie
zależności dla składowych skalarnych τ i dL wzdłuż nieruchomej osi obrotu, otrzymując

$$\tau = dL/dt.$$

Przez porównanie tych dwóch równań otrzymujemy zależność:

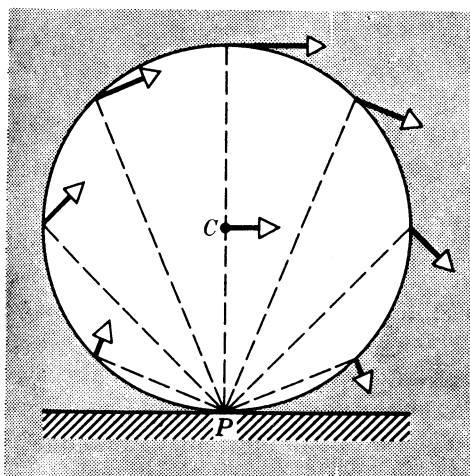
$$L = I\omega. \quad (12-18)$$

Podobnie jak równanie (12-17) ($\tau = I\alpha$), również ta skalarna zależność obowiązuje tylko dla ruchu obrotowego ciała sztywnego dookoła osi nieruchomej. Składowa L wektora momentu pędu $\mathbf{L}$ ciała sztywnego i jego moment bezwładności I muszą odnosić się do tej samej osi obrotu.

Równanie (12-18) jest odpowiednikiem wyrażenia $\mathbf{P} = M\mathbf{v}$ dla pędu ciała sztywnego o masie M w ruchu postępowym z prędkością liniową v . Wyraża ono moment pędu ciała sztywnego o momencie bezwładności I i prędkości kątowej ω , poruszającego się ruchem obrotowym dookoła osi nieruchomej.

12-7. Ruch postępowo-obrotowy ciała sztywnego

Dotychczas rozpatrywaliśmy wyłącznie ruch obrotowy ciał dookoła pewnych osi nieruchomych. Jednakże, jeżeli ciało toczy się, to występuje zarówno ruch postępowy, jak i obrotowy. Dlatego też toczenie się należy traktować jako kombinację ruchu obrotowego i postępowego, chociaż można je również opisywać jako czysty ruch obrotowy, jak to zaraz zobaczymy. Wykażemy równoważność tych dwóch metod.



Rys. 12-13. Ciało toczące się możemy traktować jako obracające się dookoła punktu zetknięcia P

Rozważmy cylinder toczący się po poziomej powierzchni, jak na rys. 12-13. Podstawa cylindra w każdej chwili spoczywa, jeżeli przyjmiemy, że przy toczeniu nie ma poślizgu. Cylinder obraca się dookoła chwilowej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt zetknięcia P . Liniowa prędkość każdego punktu cylindra jest w każdej chwili prostopadła do linii łączącej ten punkt z punktem P . Wartość bezwzględna tej prędkości jest proporcjonalna do odległości między tymi punktami. Inaczej można powiedzieć, że cylinder obraca się dookoła nieruchomej osi przechodzącej przez P z pewną prędkością kątową ω w danej chwili, a więc jest to wyłącznie czysty ruch obrotowy. Energia kinetyczna takiego ruchu może być zapisana w postaci

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2, \quad (12-19)$$

gdzie I_P jest momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt P . Zastępujemy teraz twierdzenie Steinera, w myśl którego

$$I_P = I_{\text{c.m.}} + MR^2,$$

gdzie $I_{\text{sr.m.}}$ jest momentem bezwładności cylindra o masie M i promieniu R względem osi przechodzącej przez środek masy i równoległej do poprzedniej. Równanie (12-19) przyjmie postać

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{sr.m.}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2. \quad (12-20)$$

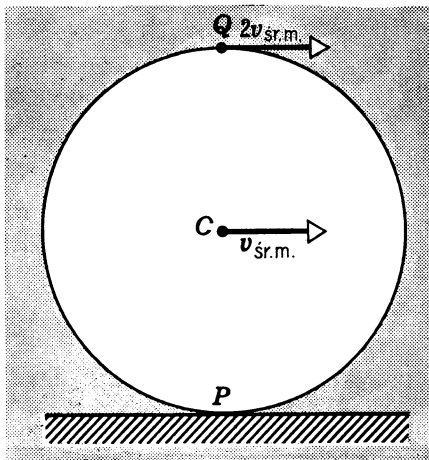
Wielkość $R\omega$ jest prędkością liniową środka masy cylindra względem nieruchomego punktu P . Niech $R\omega = v_{\text{sr.m.}}$. Równanie (12-20) przyjmie postać

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{sr.m.}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{sr.m.}}^2. \quad (12-21)$$

Zauważmy, że prędkość środka masy względem punktu P jest taka sama, jak prędkość punktu P względem środka masy. Stąd prędkość kątowna ω środka masy dookoła punktu P obserwowana z punktu P jest taka sama, jak prędkość kątowna punktu P dookoła środka masy C , obserwowana z tego środka przez obserwatora (poruszającego się wraz z cylindrem). Innymi słowy, dowolna linia odniesienia na cylindrze zakreśli ten sam kąt w danym czasie, niezależnie od tego, czy cylinder obserwujemy z nieruchomego, czy też z ruchomego układu odniesienia. Możemy zatem interpretować równanie (12-21), wyprowadzone przy założeniu, że ruch jest czysto obrotowy, w następujący sposób: pierwszy wyraz $\frac{1}{2}I_{\text{sr.m.}}\omega^2$ jest energią kinetyczną cylindra obracającego się tylko dookoła osi przechodzącej przez środek masy, bez ruchu postępowego, drugi wyraz $\frac{1}{2}Mv_{\text{sr.m.}}^2$ jest energią kinetyczną cylindra poruszającego się tylko ruchem postępowym, z prędkością środka masy, bez ruchu obrotowego. Chwilowa oś obrotu nie jest teraz w ogóle brana pod uwagę. Równanie (12-21) stosuje się do dowolnego ciała przesuwającego się i obracającego jednocześnie dookoła osi prostopadłej do kierunku ruchu postępowego, niezależnie od tego, czy ciało toczy się przy tym po jakiejś powierzchni, czy też nie.

Ruch ciała złożony z ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy jest równoważny czystemu ruchowi obrotowemu zachodzącemu z tą samą prędkością kątową dookoła osi przechodzącej przez punkt zetknięcia z powierzchnią, po której może się ono toczyć bez poślizgu.

Pokażemy to na prostym przykładzie. Weźmy pod uwagę prędkość chwilową różnych punktów toczącego się cylindra. Jeżeli prędkość środka masy obserwowana przez obserwatora niezmiennego swego położenia wynosi $v_{\text{sr.m.}}$, chwilowa prędkość kątowna dookoła osi przechodzącej przez punkt P wynosi $\omega = v_{\text{sr.m.}}/R$. Przeciwny punkt Q będzie miał



Rys. 12-14. Ponieważ punkty Q i C mają tę samą prędkość kątową względem punktu P , zatem Q ma dwa razy większą prędkość liniową od C , bowiem znajduje się dwa razy dalej od P

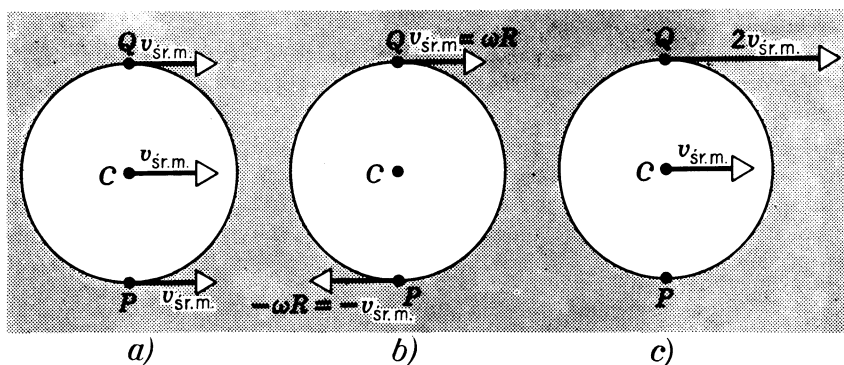
w tej samej chwili prędkość $\omega 2R = 2v_{\text{śr.m.}}$. Punkt zetknięcia P chwilowo spoczywa. Tego typu czysty ruch obrotowy przedstawia rys. 12-14.

Popatrzmy teraz na toczenie jako na przykład ruchu złożonego. Jest to więc ruch obrotowy dookoła środka masy C i ruch postępowy środka masy cylindra. Jeżeli brać pod uwagę tylko ruch postępowy, wszystkie punkty cylindra mają prędkość środka masy $v_{\text{śr.m.}}$ (rys. 12-15a). Gdy przyjmujemy, że zachodzi tylko ruch obrotowy, wtedy środek masy spoczywa, górny punkt Q ma prędkość $+\omega R$ (w dodatnim kierunku osi x), a dolny punkt P — prędkość $-\omega R$ (w ujemnym kierunku osi x) (rys. 12-15b). Złóżmy teraz te dwa ruchy. Pamiętając, że $\omega = v_{\text{śr.m.}}/R$, otrzymamy

$$\text{dla punktu } Q \quad v = v_{\text{śr.m.}} + \omega R = v_{\text{śr.m.}} + \frac{v_{\text{śr.m.}}}{R} R = 2v_{\text{śr.m.}},$$

$$\text{dla punktu } C \quad v = v_{\text{śr.m.}} + 0 = v_{\text{śr.m.}},$$

$$\text{dla punktu } P \quad v = v_{\text{śr.m.}} - \omega R = v_{\text{śr.m.}} - \frac{v_{\text{śr.m.}}}{R} R = 0.$$

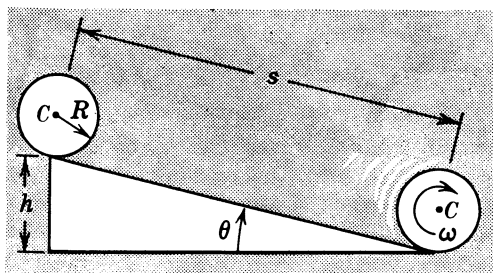


Rys. 12-15. (a) W ruchu postępowym wszystkie punkty poruszają się z taką samą prędkością. (b) W ruchu obrotowym wokół punktu C punkty przeciwległe poruszają się z prędkościami przeciwnymi. (c) Kombinacja ruchu obrotowego i postępowego wymaga sumowania odpowiednich wektorów z (a) i (b)

Wyniki te przedstawione są na rys. 12-15c. Takie same wyniki otrzymaliśmy poprzednio (rys. 12-14), traktując toczenie jako ruch czysto obrotowy.

Przykład 9. Rozważmy pełny walec o masie M i o promieniu R , toczący się w dół po równi pochyłej bez poślizgu. Znaleźć prędkość środka masy walca przy podstawie równi (rys. 12-16). Dla rozwiązania zadania stosujemy zasadę zachowania energii mechanicznej. Walec początkowo spoczywa. Staczając się w dół traci energię potencjalną Mgh , gdzie h jest wysokością równi. Natomiast przyrost energii kinetycznej wynosi

$$\frac{1}{2}I_{\text{śr.m.}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2,$$



Rys. 12-16. Przykład 9. Ruch walca staczającego się z równi pochyłej

gdzie v jest prędkością liniową środka masy, a ω — prędkością kątową dookoła tego środka po stoczeniu się. Mamy zatem zależność

$$Mgh = \frac{1}{2}I_{sr.m.}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2,$$

w której

$$I_{sr.m.} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{v}{R}.$$

Stąd

$$Mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)Mv^2,$$

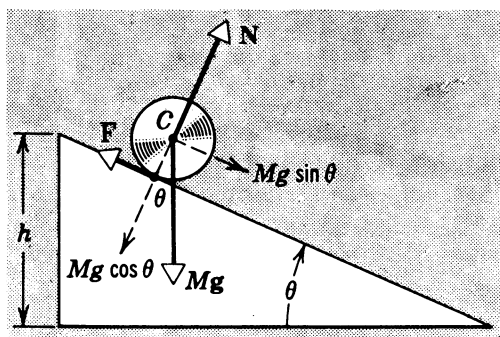
$$v^2 = \frac{4}{3}gh, \quad \text{czyli} \quad v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Jeżeli walec ześlizgiwałby się po równi bez tarcia, to prędkość środka masy wynosiłaby $v = \sqrt{2gh}$. Zatem prędkość toczącego się walca jest mniejsza niż ześlizgującego się, ponieważ część energii potencjalnej zamieniła się na energię kinetyczną ruchu obrotowego walca, a tym samym mniejsza jej część przypada na energię kinetyczną ruchu postępowego. Chociaż toczący się walec przybędzie później do podstawy równi, niż gdyby ześlizgiwał się bez tarcia, w obydwu przypadkach nabędzie on taką samą energię kinetyczną. Przy ześlizgiwaniu się walec nabywa tylko energię kinetyczną ruchu postępowego, a przy toczeniu również i energię kinetyczną ruchu obrotowego.

Zaznaczamy, że do tego, aby walec zaczął się obracać, potrzebne jest tarcie statyczne. Pamiętając, że tarcie jest siłą rozpraszającą energię, jak można usprawiedliwić stosowanie zasady zachowania energii w tym zadaniu?

Przykład 10. Poprzedni przykład rozwiązywaliśmy korzystając z zasady zachowania energii. Rozwiązemy to samo zagadnienie używając tylko metod dynamicznych.

Rozkład sił działających na walec przedstawiony jest na rys. 12-17. Ciężar walca Mg działa pionowo w dół i przechodzi przez środek masy*, N jest siłą normalną, jaką równia działa na walec, a F siłą tarcia statycznego przyłożoną w punkcie zetknięcia.



Rys. 12-17. Przykład 10. Rozkład sił działających na walec staczający się z równi pochyłej

Jeżeli założymy, że wszystkie siły zewnętrzne są przyłożone do środka masy, otrzymamy *ruch postępowy* ciała. Z drugiej zasady Newtona mamy

$$N - Mg \cos \theta = 0 \quad \text{dla ruchu prostopadłego do równi,}$$

$$Mg \sin \theta - F = Ma \quad \text{dla ruchu wzdłuż równi.}$$

Ruch obrotowy dookoła środka masy opisany jest równaniem

$$\tau = I_{sr.m.}\alpha.$$

* Rysując rozkład sił zakładamy milcząco, że całkowity ciężar ciała jest przyłożony do jego środka masy. Z paragrafu 9-2 wiemy, że jest to usprawiedliwione przy rozpatrywaniu ruchu postępowego. Przy ruchu obrotowym będziemy jednak również korzystać z tego założenia. Słuszność takiego postępowania uzasadnimy w paragrafie 14-3, gdzie wykażemy, że siła ciężkości jest przyłożona do środka masy zarówno w ruchu postępowym jak i obrotowym.

Obrotu nie powoduje jednak ani N , ani Mg , ponieważ siły te przechodzą przez środek masy C i ich moment wypadkowy znika. Moment siły różny od zera daje tylko siła tarcia F , której ramię równe jest R , tak że

$$FR = I_{sr.m.} \alpha.$$

Lecz

$$I_{sr.m.} = \frac{1}{2}MR^2, \quad \alpha = a/R,$$

tak, że

$$F = I_{sr.m.} \alpha / R = Ma/2.$$

Podstawiając to do drugiego równania ruchu postępowego otrzymujemy

$$a = \frac{2}{3}g \sin \theta.$$

Przyspieszenie środka masy toczącego się walca ($\frac{2}{3}g \sin \theta$) jest więc mniejsze niż przyspieszenie środka masy walca ześlizgującego się po równi ($g \sin \theta$).

Wynik ten jest słuszny dla dowolnej chwili czasu. Środek masy ma więc stałe przyspieszenie liniowe. Aby znaleźć prędkość środka masy, przy zerowej prędkości początkowej, korzystamy z zależności:

$$v^2 = 2as,$$

tak że

$$v^2 = 2(\frac{2}{3}g \sin \theta)s = \frac{4}{3}g \frac{h}{s} s = \frac{4}{3}gh,$$

a stąd

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Na podstawie zasady zachowania energii otrzymaliśmy ten sam wynik. Pierwsza metoda jest na pewno prostsza i bardziej bezpośrednia. Jeżeli jednak chcemy znaleźć działające siły, takie jak N i F , musimy posługiwać się równaniami dynamiki.

Możemy obliczyć na przykład minimalną siłę tarcia statycznego, jaka potrzebna jest do tego, aby zachodziło toczenie

$$F = Ma/2 = (M/2)(\frac{2}{3}g \sin \theta) = \frac{1}{3}Mg \sin \theta.$$

Co nastąpiłoby, gdyby siła tarcia statycznego była mniejsza od powyższej wartości?

Przykład 11. Kula i walec o tych samych masach i promieniach staczają się po tej samej równi pochyłej z zerową prędkością początkową. Które z tych ciał znajdzie się wcześniej u podstawy równi?

Dla kuli $I_{sr.m.} = \frac{2}{5}MR^2$. Stosując równania dynamiki otrzymujemy

$$Mg \sin \theta - F = Ma, \quad \text{ruch postępowy śr.m.,}$$

$$FR = I_{sr.m.} \alpha = (\frac{2}{5}MR^2)(a/R), \quad \text{obróć dookoła śr.m.,}$$

stąd dla kuli mamy

$$F = \frac{2}{5}Ma, \quad a = \frac{5}{7}g \sin \theta.$$

Dla walca (przykład 10):

$$a = \frac{2}{3}g \sin \theta.$$

Widzimy więc, że przyspieszenie środka masy kuli jest zawsze większe niż przyspieszenie środka masy walca, zatem kula znajdzie się u podstawy równi szybciej.

Które z ciał przy podstawie ma większą energię kinetyczną ruchu obrotowego, a które ruchu postępowego?

Zauważmy, że wzór na przyspieszenie toczącej się kuli i walca nie zawiera ich mas ani promieni. Jak zachowałyby się na równi dwa walce o różnych masach i promieniach, a jak dwie różne kule? Jak wyglądałby ruch walca i kuli o różnych promieniach i masach?

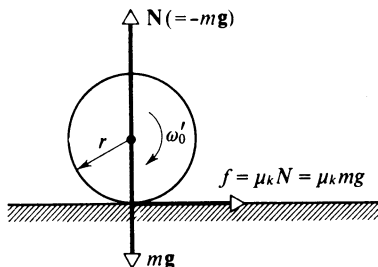
Przykład 12. Jednorodnemu walcowi o promieniu r i masie m nadano początkową prędkość kątową ω_0 i opuszczono na płaską poziomą powierzchnię. Kinetyczny współczynnik tarcia między walcem a tą powierzchnią oznaczamy przez μ_k . Początkowo walec ślizga się, ale po czasie t zaczyna się wyłącznie toczyć. (a) Jaka jest prędkość v jego środka masy po czasie t . (b) Ile wynosi czas t ?

(a) Rysunek 12-18 ilustruje siły działające na walec. Przyspieszenie a środka masy jest stałe, ponieważ wszystkie działające siły są stałe; tak że dla ruchu postępowego możemy napisać

$$F = ma = m \left(\frac{V_f - V_i}{t - 0} \right).$$

W tym $V_i = 0$ a $V_f = V$ po czasie t , kiedy zaczyna się wyłącznie toczenie. Z drugiej strony siła wypadkowa F równa się $\mu_k mg$, tak że

$$\mu_k mg = mV/t. \quad (12-22)$$



Rys. 12-18. Przykład 12

Przyspieszenie kątowe α dookoła osi przechodzącej przez środek masy jest także stałe (dlaczego), tak że dla ruchu obrotowego możemy napisać

$$\tau = I\alpha = I \left(\frac{\omega_f - \omega_i}{t - 0} \right).$$

Tu $\omega_f = \omega = V/r$ po upływie czasu t , a $\omega_i = \omega_0$. Także wartość bezwzględna wypadkowego momentu siły τ równa jest $\mu_k mgr$. Ten moment siły powoduje kątowe opóźnienie, a zatem

$$\mu_k mgr = \left(\frac{1}{2} mr^2 \right) \left(\frac{\omega_0 - V/r}{t} \right). \quad (12-23)$$

Jeżeli wyeliminujemy t z naszych dwóch równań (tzn. dzieląc równanie (12-23) przez równanie (12-22)) i obliczymy V (należy dokonać niezbędnych przekształceń algebraicznych), to otrzymamy

$$V = \frac{1}{3} \omega_0 r.$$

Zwracamy uwagę, że V nie zależy od wielkości m, g ani μ_k . Co jednak by się działo, gdyby jedna z tych wielkości była równa zero.

(b) Eliminując V z równań (12-22) i (12-23) znajdujemy t (dokonując odpowiednich przekształceń algebraicznych), a więc

$$t = \frac{\omega_0 r}{3\mu_k g}.$$

Należy zauważyć, że w tym przykładzie ani energia mechaniczna, ani pęd, ani moment pędu nie są zachowane, ale *zmiany* pędu i momentu pędu są bezpośrednio związane ze sobą, gdyż są wywołane przez tę samą siłę tarcia.

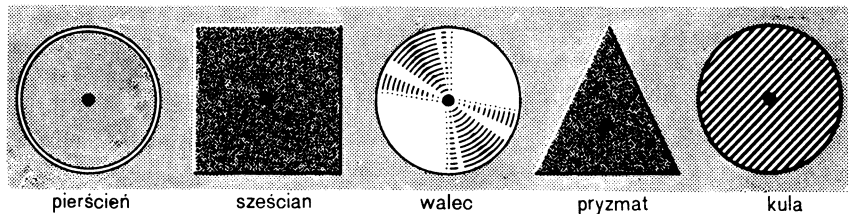
Pytania

1. W jakich jednostkach mierzymy moment pędu? Jak można wytłumaczyć fakt, że wymiar momentu pędu równa się wymiarowi energii pomnożonemu przez czas?
2. Czy iloczyn wektorowy dwóch wektorów musi być wektorem osiowym*?
3. Czy w celu obliczenia momentu bezwładności ciała można przyjąć, że masa tego ciała skupiona jest w jego środku masy?
4. Względem której osi jednorodny sześcián ma najmniejszy moment bezwładności?
5. Która z kołowych płyt ma większy moment bezwładności względem osi przechodzącej przez jej środek: czy płyta wykonana jest z metalu o większej gęstości, czy o mniejszej, jeżeli ich ciężary i grubości są sobie równe?

* Patrz uzupełnienie II.

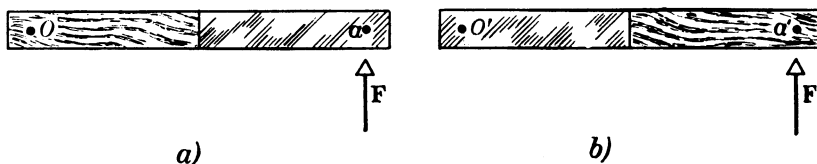
6. Należy określić moment bezwładności ciała o skomplikowanym kształcie. Kształt ciała jest taki, że obliczenie jego momentu bezwładności za pomocą wzoru $\int r^2 dm$ jest bardzo trudne. Podać metody eksperymentalne, przy pomocy których można zmierzyć ten moment.

7. Na rysunku 12-19 pokazane są przekroje pięciu brył. Przekroje mają równe maksymalne szerokości i wysokości. Oś obrotu są prostopadłe do przekrojów i przechodzą przez narysowane punkty. Bryły mają równe masy. Która z tych brył ma największy moment bezwładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku przechodzącej przez środek masy? Która najmniejszy?



Rys. 12-19. Pytanie 7

8. Pręt metrowej długości (rys. 12-20a) złożony jest z dwóch równych części drewnianej i stalowej. W przypadku (a) oś obrotu O przechodzi przez część drewnianą, a siła F przyłożona jest do części stalowej w punkcie a . W przypadku drugim (rys. 12-20b) oś obrotu O' przechodzi przez część stalową, a ta sama siła przyłożona jest w punkcie a' części drewnianej. Czy pręt uzyska takie samo przyspieszenie kątowe w obydwu przypadkach? Wyjaśnić.



Rys. 12-20. Pytanie 8

9. Można rozróżnić, które jajko jest ugotowane na twardo, a które jest surowe, wprawiając je w ruch obrotowy na stole. Wyjaśnić jak. Również po zatrzymaniu obracającego się surowego jajka palcami i szybkim puszczeniu go, będzie się ponownie obracało. Dlaczego?

10. Moment siły ma takie same jednostki jak praca czy energia. Czy jest więc moment siły pracą lub energią?

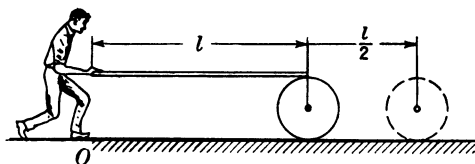
11. Skomentować każdą z poniższych prawd narciarskich. (a) W zjeździe w dół potrzebne są narty, które z trudnością skręcają. (b) W slalomie wymagane są narty, które skręcają łatwo. (c) Dlatego też, moment bezwładności nart zjazdowych winien być większy niż moment bezwładności nart slalomowych. (Patrz: J. I. Shonie i D. L. Nordick, *The Physics of Ski Turns*, *The Physics Teacher*, December 1972 r.)

12. Biorąc pod uwagę fakt, że jest małe tarcie między nartami i śniegiem oraz że środek ciężkości narciarza znajduje się mniej więcej nad środkiem nart, w jaki sposób narciarz musi przykładać moment siły, aby skręcić lub nie dopuścić do skrętu? (Patrz odnośnik do pyt. 11).

13. Czy wyrażenia na a oraz T w przykładzie 5 dadzą poprawne wyniki w szczególnych przypadkach, w których $g = 0$, $M = 0$, $M \rightarrow \infty$, $m = 0$, oraz $m \rightarrow \infty$?

14. Całkowity pęd układu punktów materialnych nie zależy od ruchu względem środka masy układu. Czy to samo można powiedzieć o całkowitej energii kinetycznej układu punktów materialnych.

15. Człowiek toczy walec na odległości $l/2$ popychając opartą na walcu deskę o długości l . Deska nie ślizga się po walcu ani walec po podłodze. Przebieg doświadczenia ilustruje rys. 12-21. Gdzie znalazła się deska? Na jaką odległość przesunął się człowiek?

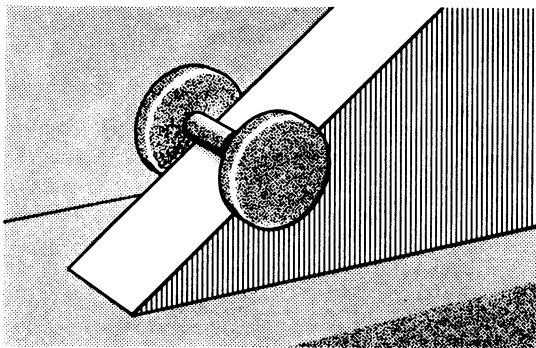


Rys. 12-21. Pytanie 15

16. Dla magazynowania energii wiatru lub energii słonecznej zaproponowano koła zamachowe. Ilość energii magazynowana w takim kole zależy od gęstości i wytrzymałości materiału, z którego wirujące koło jest zrobione. Dla danego ciężaru wymagany jest wytrzymały materiał o najmniejszej gęstości. (Patrz: R. F. Post i S. F. Post, Flywheels, *Scientific American*, Dec. 1973). Czy można to zakwestionować?

17. Pełna kula drewniana stacza się w dół po dwóch równiach pochyłych o tej samej wysokości, ale różnym nachyleniu. Czy w obydwu przypadkach kula osiągnie tę samą prędkość u podstawy równi? Czy czas toczenia się będzie równy w obu przypadkach? Jeżeli nie, to który z tych czasów jest dłuższy i dlaczego?

18. Dwa ciężkie krążki połączone są krótkim prętem, którego promień jest o wiele mniejszy od promieni krążków. Układ ten umieszczono na równi pochyłej tak, że krążki wiszą po obu jej stronach, a pręt stacza się po równi bez poślizgu (rys. 12-22). W pobliżu podstawy równi krążki dotykają do poziomego stołu i układ zaczyna się poruszać ruchem postępowym z prędkością o wiele większą od poprzedniej. Wyjaśnić dokładnie opisane zjawiska.

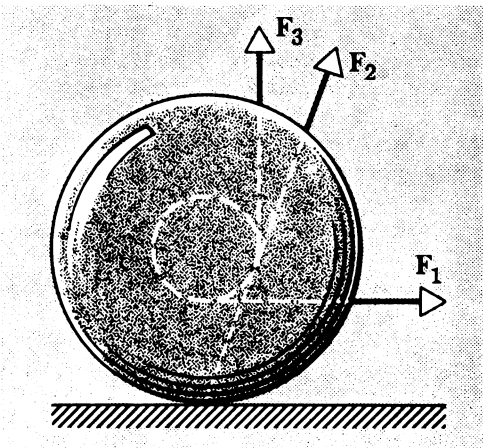


Rys. 12-22. Pytanie 18

19. Aby ściąć drzewo, drwal zaczyna ścinanie z tej strony, w którą chce, aby drzewo upadło. Wyjaśnić dlaczego. Czy byłoby bezpiecznie stać blisko drzewa po stronie przeciwnej niż ta, w którą drzewo upada?

20. Rozważyć sytuację, w której pręt stoi jednym końcem na powierzchni pokrytej lodem (brak tarcia). Jaką drogę przebędzie środek masy, jeżeli pręt upadnie?

21. Na poziomym stole znajduje się szpula mogąca się po nim toczyć (rys. 12-23). W którą stronę będzie się toczyć szpula, jeżeli będziemy ciągnąć poziomo siłą F_1 za nią nawiniętą na niej? Co się stanie, jeżeli zostanie przyłożona siła F_2 (jej kierunek przechodzi przez punkt styku szpuli ze stołem)? Co się stanie, jeżeli nic nie będziemy ciągnąć w kierunku pionowym siłą F_3 ?



Rys. 12-23. Pytanie 21

22. Podczas obserwowania koła samochodu jadącego ze stałą prędkością jeden z obserwatorów wyraża opinię, że: „Górna część koła porusza się dwa razy szybciej niż oś, ale dolna część koła nie porusza się wcale”. Czy można zgodzić się z tym twierdzeniem? Omówić to.

23. Sformułować trzy zasady Newtona dla ciał znajdujących się w ruchu obrotowym.

Zadania

Paragraf 12-2

1. (a) Mając dane $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ i $\mathbf{F} = iF_x + jF_y + kF_z$ znaleźć moment siły $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. (b) Pokazać że jeżeli $\mathbf{r}$ i $\mathbf{F}$ leżą w danej płaszczyźnie, to $\boldsymbol{\tau}$ nie ma składowych w tej płaszczyźnie.

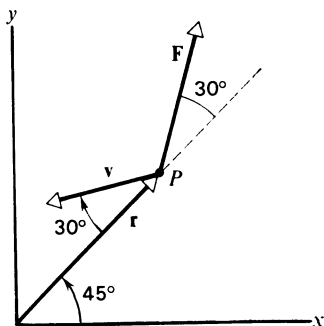
Odp.: (a) $i(yF_z - zF_y) + j(zF_x - xF_z) + k(xF_y - yF_x)$.

2. Pokazać, że moment pędu pojedynczego punktu materialnego względem dowolnego punktu poruszającego się ze stałą prędkością pozostaje stały podczas ruchu.

Paragraf 12-3

3. Punkt materialny o masie 2 kg zajmuje pozycję $\mathbf{r}$ oraz ma prędkość $\mathbf{v}$ jak na rys. 12-24. Oddziałuje na niego siła $\mathbf{F}$. Wszystkie trzy wektory leżą na wspólnej płaszczyźnie. Założyć, że $r = 3$ m, $v = 4$ m/s i $F = 2$ N. Obliczyć (a) moment pędu punktu materialnego, (b) moment siły oddziałującej na punkt materialny. Jakie są kierunki obu tych wektorów?

Odp.: (a) $12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, poza powierzchnię kartki; (b) $3 \text{ N} \cdot \text{m}$, poza powierzchnię kartki.



Rys. 12-24. Zadanie 3

4. Jeżeli dane są r , p oraz θ , możemy obliczyć moment pędu cząstki z równania (12-4a). Jednakże czasami dane są składowe (x, y, z) wektora $\mathbf{r}$ i (p_x, p_y, p_z) wektora $\mathbf{p}$. (a) Pokazać, że składowe wektora $\mathbf{l}$ wzdłuż osi x , y oraz z dają się wyrazić równaniami

$$l_x = yp_z - zp_y, \quad l_y = zp_x - xp_z, \quad l_z = xp_y - yp_x,$$

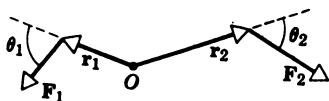
(b) Pokazać, że jeżeli punkt materialny porusza się tylko w płaszczyźnie xy , to wypadkowy moment pędu, ma tylko składową z .

5. (a) Wyrazić siłę $\mathbf{F}$ i wektor $\mathbf{r}$ z przykładu 1, za pomocą wektorów jednostkowych i wyliczyć wektor $\boldsymbol{\tau}$. To samo przeprowadzić dla przykładu 3. (b) W przykładzie 1 wyrazić $\mathbf{p}$ oraz $\mathbf{r}$, za pomocą wektorów jednostkowych i wyliczyć moment pędu $\mathbf{l}$.

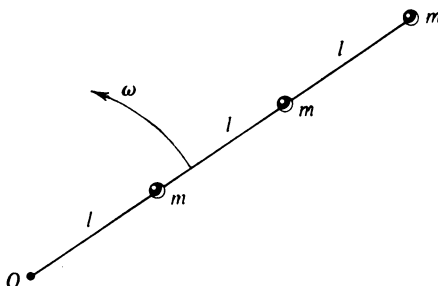
Odp.: (a) $\boldsymbol{\tau} = +k mgb$; (b) $\mathbf{l} = +k mgbt$.

Paragraf 12-4

6. Na rysunku 12-25 widzimy linie działania i ramiona dwóch sił względem punktu O . Wyobraźmy sobie, że te siły działają na ciało sztywne podparte w punkcie O . Wszystkie przedstawione wektory znajdują się w płaszczyźnie rysunku. Znaleźć wartość i kierunek wypadkowego momentu siły.



Rys. 12-25. Zadanie 6



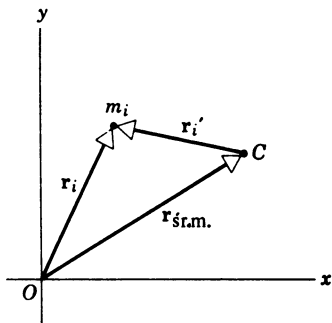
Rys. 12-26. Zadania: 8 i 13

7. Dwa punkty materialne każdy o masie m i prędkości v poruszają się w przeciwnych kierunkach wzdłuż linii równoległych odległych od siebie o d . Pokazać, że wektor momentu pędu układu tych punktów materialnych, bez względu na to jaki punkt jest traktowany jako początek układu, jest taki sam.

8. Trzy punkty materialne o masach m są połączone ze sobą i z osią obrotu trzema cienkimi sznurkami każdy o długości l (rys. 12-26). Układ obraca się względem osi obrotu z prędkością kątową ω w taki sposób, że punkty materialne znajdują się na jednej prostej. (a) Obliczyć moment bezwładności układu względem punktu O . (b) Jaki jest moment pędu środkowego punktu materialnego? (c) Jaki jest całkowity moment pędu tych trzech punktów materialnych? Wyrazić odpowiedź używając symboli: m , l oraz ω .

9. Wychodząc z trzeciej zasady dynamiki Newtona dowieść, że wypadkowy moment sił wewnętrznych układu punktów materialnych jest równy zeru.

10. *Zależność pomiędzy wypadkowym momentem sił zewnętrznych i momentem pędu układu punktów materialnych względem środka masy tego układu.* Niech $\mathbf{r}_{sr,m}$, przedstawia wektor położenia środka masy C układu cząstek względem początku O inercjalnego układu odniesienia. Niech $\mathbf{r}'_i$ przedstawia wektor położenia i -tego punktu materialnego o masie m_i względem środka masy C . Zatem $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{sr,m} + \mathbf{r}'_i$ (patrz rys. 12-27). Zdefiniujemy teraz całkowity moment pędu układu punktów materialnych względem środka masy



Rys. 12-27. Zadanie 10

układu jako $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$, gdzie $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}'_i/dt$. (a) Pokazać, że $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}_i/dt - m_i d\mathbf{r}_{sr,m}/dt = \mathbf{p}_i - m_i \mathbf{v}_{sr,m}$. (b) Pokazać następnie, że $d\mathbf{L}'/dt = \sum \mathbf{r}'_i \times d\mathbf{p}'_i/dt$. (c) Połączyć wyniki punktów (a) i (b) i używając definicji środka masy i trzeciej zasady Newtona, wykazać, że $\boldsymbol{\tau}'_{zew} = d\mathbf{L}'/dt$, gdzie $\boldsymbol{\tau}'_{zew}$ jest sumą wszystkich momentów sił zewnętrznych działających na układ względem jego środka masy.

Paragraf 12-5

11. Przypuśćmy, że Ziemia ma kształt kuli o jednorodnej gęstości. (a) Jaka jest energia kinetyczna ruchu obrotowego? Przyjąć, że promień Ziemi jest równy $6,4 \cdot 10^3$ km, a jej masa $6 \cdot 10^{24}$ kg. (b) Przypuśćmy, że energia ta jest możliwa do wykorzystania dla potrzeb ludzi. Jak długo może Ziemia dostarczać każdemu człowiekowi 1 kW mocy, jeżeli ilość ludzi jest równa $4,2 \cdot 10^9$?

Odpo.: (a) $2,6 \cdot 10^{29}$ J; (b) $2 \cdot 10^9$ lat.

12. Cząsteczka tlenu ma masę $5,30 \cdot 10^{-26}$ kg oraz moment bezwładności $1,94 \cdot 10^{-46}$ kg $\cdot$ m² względem osi przechodzącej przez środek odcinka łączącego atomy i do niego prostopadłej. Przypuśćmy, że cząsteczka ta ma średnią prędkość równą 500 m/s i że jej energia kinetyczna ruchu obrotowego jest równa dwóm trzecim energii kinetycznej ruchu postępowego. Znaleźć średnią prędkość kątową tej cząsteczki.

13. Niech sznurki z zadania 8 zastąpione będą jednorodnymi prętami, każdy o masie M . (a) Jaki jest całkowity moment bezwładności układu względem punktu O ? (b) Jaka jest energia kinetyczna układu?

Odpo.: (a) $14ml^2 + 9Ml^2$. (b) $(7m + 9M/2)l^2\omega^2$.

14. (a) Wykazać, że momenty bezwładności walca o masie M i promieniu R oraz cienkiej obryczy o masie M i promieniu $R/\sqrt{2}$, względem ich osi geometrycznych są sobie równe. (b) Oznaczamy przez k odległość od osi obrotu punktu, w którym można umieścić całą masę ciała, nie zmieniając jego momentu bezwładności względem tej osi. Wykazać, że tzw. *promień bezwładności*

$$k = \sqrt{I/M}.$$

Wzór ten określa promień „równoważnej obryczy”.

15. Cienki pręt o długości l i masie m został zawieszony swobodnie za jeden koniec. Pręt został wychylony i gdy go puszczono, zaczął wahać się dookoła osi poziomej z prędkością kątową ω w chwili przechodzenia przez punkt najniższy. Na jaką wysokość wzniesie się środek masy tego pręta w stosunku do najniższego położenia? Pominąć tarcie oraz opór powietrza.

Odp.: $l^2\omega^2/6g$.

16. (a) Wykazać, że moment bezwładności cienkiego pręta o długości l względem osi przechodzącej przez jego środek i do niego prostopadłej wynosi $I = \frac{1}{12}Ml^2$. (Patrz tablica 12-1). (b) Zastosować twierdzenie Steinera, aby wykazać, że moment bezwładności tego pręta względem osi przechodzącej przez jego koniec $I = \frac{1}{3}Ml^2$.

17. (a) Wykazać, że suma momentów bezwładności ciała o płaskim kształcie względem dwu wzajemnie prostopadłych osi leżących w płaszczyźnie tego ciała jest równa momentowi bezwładności tego ciała względem osi prostopadłej do jego powierzchni i przechodzącej przez punkt przecięcia obu osi. (b) Zastosować to twierdzenie do kołowego krążka, aby obliczyć jego moment bezwładności względem średnicy.

Odp.: (b) $MR^2/4$.

18. Wykazać, że moment bezwładności płyty prostokątnej o bokach a i b względem osi prostopadłej do jej powierzchni i przechodzącej przez jej środek wynosi $\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$.

19. Pręt o długości l m utrzymywany jest w pozycji pionowej. Jeden jego koniec oparty jest o podłogę. W pewnej chwili prętowi pozwolono padać. Znaleźć prędkość drugiego końca pręta w chwili, gdy uderza on o podłogę, przyjmując, że koniec oparty o podłogę nie ślizga się.

Odp.: $5,4 \text{ m/s}$.

20. Wysoki komin pęka u podstawy i zaczyna padać. Wyrazić: (a) radialne oraz (b) styczne przyspieszenie liniowe szczytu kominu jako funkcję kąta θ , jaki tworzy komin z pionem. (c) Czy wypadkowe przyspieszenie liniowe może przekroczyć g ? (d) W czasie padania komin uległ złamaniu. Wyjaśnić, dlaczego to się stało. (Patrz: Albert A. Bartlett, More on the Falling Chimney, *The Physics Teacher*, September 1976).

Paragraf 12-6

21. Silnik samochodowy rozwija moc $7,5 \cdot 10^4 \text{ W}$ przy 1800 obr/min. Jaki moment siły wytwarza silnik?

Odp.: $400 \text{ N} \cdot \text{m}$.

22. Obliczyć: (a) moment siły, (b) energię, (c) średnią moc niezbędną do przyspieszenia Ziemi ze stanu spoczynku do jej obecnej prędkości kątowej względem jej osi w jeden dzień.

23. Na krążek o momencie bezwładności $10^4 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ i promieniu 10 cm oddziałuje siła przyłożona stycznie do brzegu krążka, która zmienia się w czasie następująco: $F = 0,5t + 0,3t^2$, gdzie F podano w niutonach, a t w sekundach. Jeżeli krążek był w stanie spoczynku, jaka jest jego prędkość kątowa po 3 sekundach.

Odp.: $5 \cdot 10^2 \text{ rad/s}$.

24. Koło o masie M i promieniu bezwładności k (patrz zadanie 14) wiruje na nieruchomej poziomej ośce przechodzącej przez piastę. Piasta trze o ośkę o promieniu a w najwyższym jej punkcie. Kinetyczny współczynnik tarcia wynosi μ_k . Koło nadano początkową prędkość kątową ω_0 . Założyć jednostajne przyspieszenie ujemne i znaleźć (a) czas, i (b) liczbę obrotów zanim koło przestanie się obracać.

25. Jednorodny pręt stalowy o długości $1,20 \text{ m}$ i masie $6,40 \text{ kg}$ ma zaczepione na końcach dwie małe kule o masie $1,06 \text{ kg}$ każda. Pręt może się obracać w płaszczyźnie poziomej dookoła osi pionowej przechodzącej przez jego środek. W pewnej chwili zaobserwowano, że jego prędkość kątowa wynosi $39,0 \text{ obr/s}$. Ze względu na istnienie sił tarcia pręt zatrzymał się po 32 s . Zakładając działanie stałego momentu siły tarcia wyliczyć: (a) przyspieszenie kątowe, (b) opóźniający moment siły tarcia, (c) całkowitą pracę wykonaną przez siłę tarcia i (d) liczbę obrotów wykonaną podczas $32,0 \text{ s}$. (e) Przypuśćmy, że moment siły tarcia podczas tego ruchu nie jest stały. Które z wielkości (a), (b), (c) czy (d) można w dalszym ciągu wyliczyć bez dodatkowych informacji? Jeżeli rozwiązanie jest możliwe podać wartości liczbowe.

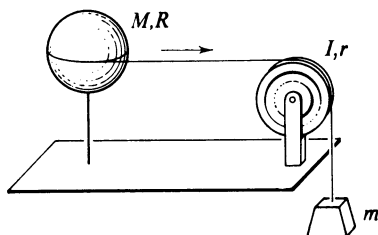
Odp.: (a) $-7,67 \text{ rad/s}^2$; (b) $-11,7 \text{ N} \cdot \text{m}$; (c) $4,58 \cdot 10^4 \text{ J}$; (d) 624 obr ; (e) całkowita praca wykonana; $4,58 \cdot 10^4 \text{ J}$.

26. Moment pędu koła zamachowego mającego moment bezwładności $0,125 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ zmalał z 3 do $2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ w okresie $1,5 \text{ s}$. (a) Jaki jest średni moment siły działający na koło zamachowe podczas tego okresu? (b) Zakładając stałe przyspieszenie kątowe, ile obrotów wykonałoby koło zamachowe? (c) Ile wykonano pracy? (d) Jaka była średnia moc dostarczona przez koło zamachowe?

27. Ciężarki w maszynie Atwooda (rys. 5-9) mają masy 500 g oraz 460 g. Zawieszone są one na linie przerzuconej przez krążek umieszczony na poziomej osi i mogący obracać się bez tarcia. Promień krążka wynosi 5 cm. Gdy ciężarkom pozwolono spadać, ciężarek większy spadł z wysokości 75 cm w ciągu 5 s. Obliczyć moment bezwładności krążka.

Odp.: $1,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

28. Jednorodna powierzchnia kulista obraca się względem pionowej osi bez tarcia (rys. 12-28). Cienki sznurek opasuje równik owej powierzchni, następnie przepuszczany jest przez blok i połączony z małym przedmiotem, który nie podtrzymywany przez sznurek spadłby pod wpływem przyciągania ziemskiego. Jaka prędkość osiągnąłby przedmiot, gdyby spadł z wysokości h , mając zerową prędkość początkową?



Rys. 12-28. Zadanie 28

29. Na szczycie równi pochyłej, nachylonej pod kątem 30° do poziomu, znajduje się nieruchomy krążek o ciężarze 1 kG i promieniu 10 cm. Przez ten krążek przerzucono linkę, do której jednego końca przymocowano ciężarek 3 kG leżący na równi, a do drugiego końca ciężarek 9 kG zwisający pionowo w dół. Współczynnik tarcia kinetycznego między równią a ciężarkiem wynosi 0,1. Znaleźć: (a) przyspieszenie zwiśającego ciężarka, (b) napięcie linki po obu stronach krążka. Założyć, że krążek jest jednorodny.

Odp.: (a) 578 cm/s^2 , (b) $T_9 = 3,8 \text{ kG}$, $T_3 = 3,5 \text{ kG}$.

Paragraf 12-7

30. Obręcz o promieniu 3 m i masie 150 kg toczy się po poziomej podłodze tak, że środek jej masy osiąga prędkość 0,15 m/s. Ile pracy należy wykonać, aby obręcz zatrzymać?

31. Samochód ma masę 1700 kg. Przyspiesza ze stanu spoczynku do 40 km/h w ciągu 10 s. Każde koło ma masę 32 kg i promień bezwładności (patrz zadanie 14) 0,3 m. Znaleźć, przy końcu tego 10-sekundowego okresu: (a) obrotową energię kinetyczną każdego koła względem jego osi; (b) całkowitą energię kinetyczną każdego koła; (c) całkowitą energię kinetyczną samochodu.

Odp.: (a) 990 J; (b) 3000 J; (c) $1,1 \cdot 10^5 \text{ J}$.

32. Pokazać, że walec będzie ześlizgiwał się po równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem θ , jeżeli współczynnik tarcia statycznego walca o równię będzie mniejszy od $\frac{1}{3}\tan\theta$.

33. Drabina o długości 10 m opiera się o ścianę tworząc z poziomą podstawą kąt równy 60° . W pewnej chwili zaczyna ona ślizgać się. Znaleźć położenie osi obrotu drabiny w tej chwili.

Odp.: 5 m poziomo od ściany i $5\sqrt{3}$ m pionowo ponad podłogę.

34. Pod górę równi pochyłej o kącie nachylenia 30° wtacza się kula. Przy podstawie równi środek masy kuli miał prędkość liniową 16 m/s. (a) Jak daleko wtoczy się kula na równię? (b) Ile czasu upłynie do chwili powrotu kuli do podstawy równi?

35. Ciało o promieniu R i masie m toczy się poziomo bez poślizgu z prędkością v . Ciało to następnie wtacza się po powierzchni wznoszącej się na wysokość h . Jeżeli $h = 3v^2/4g$, to (a) jaki jest moment bezwładności ciała, (b) co to mogło być za ciało?

Odp.: (a) $\frac{1}{2}mR^2$; (b) sztywny kołowy cylinder.

36. We wnętrzu wydrążonej dużej półkuli może się toczyć bez poślizgu mała kulka. Zaczyna się ona staczać z brzegu półkuli z prędkością początkową równą zero. (a) Jaka energię kinetyczną będzie miała kulka w najniższym położeniu? Jaką część tej energii stanowi energia ruchu obrotowego? Jaką część energia ruchu postępowego? (b) Jaką siłą w kierunku normalnej oddziaływać będzie kulka w najniższym położeniu? Przyjąć, że promień małej kulki jest r , jej masa m , a promień kulki wynosi R .

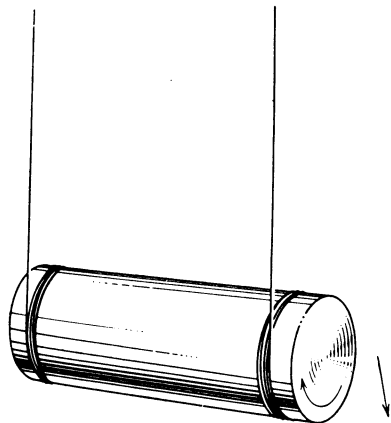
37. Jednorodny krążek o masie M i promieniu R leży na jednym boku, na powierzchni poziomej doskonale gładkiej. Następnie działa na niego stała siła F przyłożona stycznie do jego obwodu, przez nawięziętą na nim nić. Opisać postępowy i obrotowy ruch krążka.

Odp.: $\alpha = 2F/MR$; $a = F/M$.

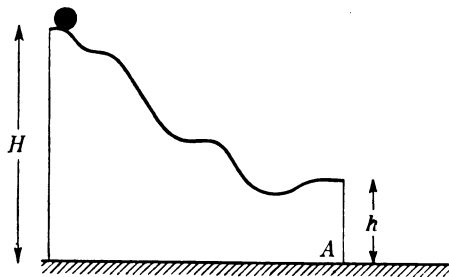
38. Na walcu o masie M i promieniu R nawinięta jest linka. Linka jest ciągnięta do góry i odwija się z walcu z taką prędkością, że środek ciężkości walcu nie zmienia swego położenia. (a) Jakie jest napięcie linki? (b) Jaka praca została wykonana nad walcem do chwili, gdy osiągnął on prędkość kątową ω ? (c) Jaka długość linki odwinęła się do tego czasu.

39. Walec o długości L i promieniu R ma ciężar W . Dwie linki zostały nawinięte na walec, każda w pobliżu jednego z jego końców. Końce linek umocowano na hakach wbitych do sufitu. Linki znajdują się w położeniu niemal pionowym i utrzymują walec w pozycji poziomej. W pewnej chwili pozwolono walcowi opadać w dół (rys. 12-29). Znaleźć: (a) napięcie linek podczas ich odwijania, (b) przyspieszenie liniowe opadającego walcu.

Odp.: (a) $W/6$, (b) $2g/3$.



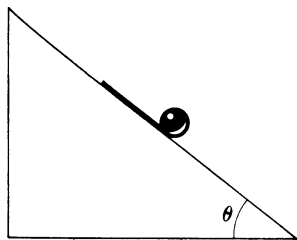
Rys. 12-29. Zadanie 39



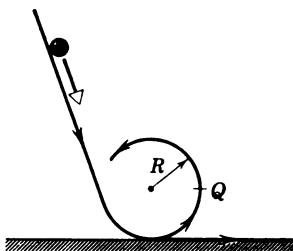
Rys. 12-30. Zadanie 40

40. Kula jednorodna rusza ze stanu spoczynku z górnego punktu toru przedstawionego na rys. 12-30 i toczy się bez poślizgu aż do końca toru. Określić odległość od punktu A do miejsca, w którym kula zetknie się z poziomym odcinkiem toru, jeżeli $H = 204$ cm, a $h = 64$ cm i tor przy końcu jest poziomy.

41. Giętka taśma o długości l jest ciasno zwinięta. Zwinięta taśma rozwija się w dół równi pochyłej, która tworzy kąt θ z poziomem. Górny koniec taśmy jest umocowany (rys. 12-31). Wykaż, że taśma rozwinię się całkowicie w czasie $T = \sqrt{3l/(g \sin \theta)}$.



Rys. 12-31. Zadanie 41



Rys. 12-32. Zadanie 42

42. Mała kula marmurowa o masie m i promieniu r toczy się bez poślizgu wzdłuż pętli przedstawionej na rys. 12-32, puszczona w którymś miejscu na prostym odcinku drogi. (a) Z jakiej najmniejszej wysokości musi być puszczona kula, aby osiągnęła szczyt pętli? (Promień pętli wynosi R , przyjmijmy, że $R \gg r$). (b) Jeżeli kula była puszczona z wysokości $6R$, jaka jest pozioma składowa siły działającej na nią w punkcie Q?

43. „Jo-jo” zrobiono z dwóch jednolitych krążków o promieniu R i łącznej masie m . Krótki pręt łączący oba te krążki ma bardzo mały promień r . Na pręt nawinięty jest parokrotnie sznurek o długości

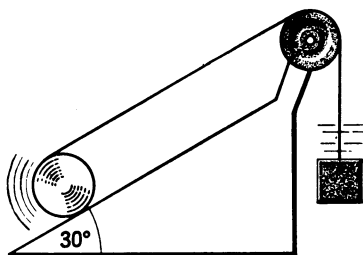
$(L + R)$. Operujący urządzeniem uwalnia „jo-jo” trzymając za koniec sznurka. Przyjmijmy, że sznurek przez cały czas przyjmuje pozycję pionową. (a) Jakie jest napięcie nici, gdy „jo-jo” porusza się w dół oraz gdy porusza się do góry? (b) Ile czasu wraca „jo-jo” do rąk operującego?

Odp.: (a) $mgR^2/(R^2 + 2r^2)$ — ruch w dół i w górę. (b) $\frac{2}{r} \sqrt{L(2r^2 + R^2)/g}$.

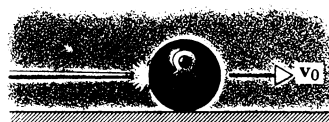
44. Jednorodny sztywny cylinder o promieniu R i o prędkości kątowej ω_0 względem swej osi, zostaje puszczony pionowo na płaski, poziomy stół. Stół nie jest doskonale gładki, więc cylinder zaczyna się poruszać ślizgając się. Jaka jest prędkość środka masy cylindra, gdy się tylko toczy?

45. Lekką, cienką taśmę nawinięto na pełny cylinder o ciężarze 23 kg i promieniu 7,6 cm. Taśma jest przerzucona przez lekki, gładki, nieruchomy blok, przytwierdzony u szczytu równi. Na drugim końcu taśmy zamieszczono pionowo ciężar 4,5 kG (rys. 12-33). Gdy płaszczyzna, po której porusza się cylinder, jest nachylona pod kątem 30° do płaszczyzny poziomej, znaleźć: (a) liniowe przyspieszenie cylindra w dół równi pochyłej, (b) napięcie taśmy przyjmując, że nie ma poślizgu.

Odp.: (a) $0,47 \text{ m/s}^2$. (b) 48 N .



Rys. 12-33. Zadanie 45



Rys. 12-34. Zadanie 46

46. Rysunek 12-34 ilustruje nadanie kuli bilardowej początkowej prędkości v_0 . Wektor popędu siły jest dokładnie poziomy i przechodzi przez środek kuli. Prędkość początkowa v_0 , promień R , masa M kuli i współczynnik tarcia μ pomiędzy kulą a stołem są znane. Jak daleko przesunie się kula po stole, zanim przestanie się ślizgać?