

13. Dynamika ruchu obrotowego II.

Zasada zachowania momentu pędu

13-1. Wprowadzenie

W rozdziale 12 zajmowaliśmy się dynamiką ruchu obrotowego ciała sztywnego dookoła nieruchomej osi w inercjalnym układzie odniesienia. Dowiedzieliśmy się, że wystarczy znać składowe momentu siły wzdłuż osi obrotu, wchodzące do skalarnej zależności $\tau = I\alpha$ [równanie (12-17)], aby rozwiązać zagadnienia dynamiczne w tym szczególnym przypadku ruchu obrotowego.

W tym rozdziale zajmiemy się ruchem obrotowym ciała sztywnego dookoła osi, która *nie* jest osią nieruchomą w inercjalnym układzie odniesienia. Dla rozwiązania dynamicznych zagadnień w tym, bardziej ogólnym, przypadku będziemy używać ogólnego (wektorowego) równania dla ruchu obrotowego, a mianowicie

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (12.9)$$

W równaniu tym przy wektorze $\boldsymbol{\tau}$ opuściliśmy dla wygody oznaczenie „zew”.

Później wrócimy raz jeszcze do ruchu obrotowego punktów materialnych oraz ciał sztywnych dokoła osi nieruchomych. Teraz jednakże w szczególności będziemy badać działanie momentów sił, które mają składowe prostopadłe do osi obrotu.

Naszym punktem wyjścia będzie nie równanie (12-17) ($\tau = I\alpha$), lecz bardziej ogólne równanie (12-9) ($\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$).

W końcu zajmiemy się układami, w których nie występują momenty sił zewnętrznych, i wprowadzimy bardzo ważną *zasadę zachowania momentu pędu*.

13-2. Bąk

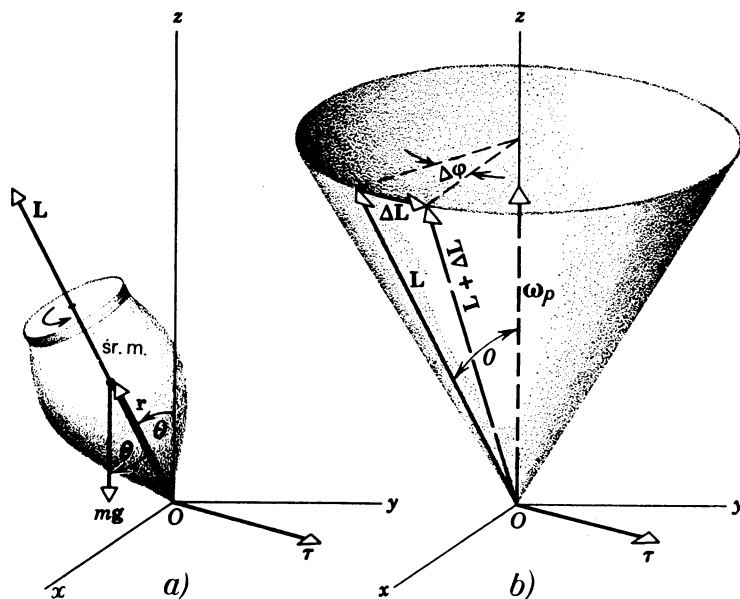
Rysunek 13-1a przedstawia bąk wirujący dookoła swej osi symetrii. Punkt podparcia bąka znajduje się w początku O inercjalnego układu odniesienia. Wiemy z doświadczenia, że oś takiego wirującego bąka będzie poruszać się dookoła osi pionowej, zakreślając powierzchnię stożka. Taki ruch nazywamy *precesją*. Zobaczmy, czy możemy przewidzieć rodzaj tego ruchu, wychodząc z zasad mechaniki klasycznej, w szczególności, czy możemy wyliczyć ω_p , czyli prędkość kątową ruchu precesyjnego.

W sytuacji przedstawionej na rys. 13-1a bąk ma kątową prędkość ω dookoła swojej osi. Ma on również moment pędu L względem tej samej osi*, która tworzy kąt θ z osią pionową.

Na bąk działają dwie siły: siła w punkcie podparcia O działa w górę i siła ciężkości przyłożona do środka masy działa w dół. Siła działająca w górę przechodzi przez punkt O , a jej moment siły względem tego punktu jest równy zero, ponieważ ramię jest równe zero. Ciężar mg jednakże wytwarza moment siły względem punktu O , dany przy pomocy wzoru

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g},$$

gdzie $\mathbf{r}$ określa położenia środka masy względem punktu podparcia. Równanie to wymaga, aby τ było prostopadłe do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{r}$ i $m\mathbf{g}$. Stosując regułę prawej ręki otrzymujemy kierunek wektora τ , jak na rys. 13-1a. Zauważamy, że τ , L i $\mathbf{r}$ obracają się dookoła osi obrotu bąka z prędkością kątową precesji ω_p .



Rys. 13-1. (a) Ruch precesyjny bąka, o ciężarze mg , momencie pędu L i środku masy wyznaczonym przez wektor $\mathbf{r}$. (b) Stożek zakresłony przez oś bąka. Wektor prędkości kątowej precesji ω_p skierowany jest pionowo w górę

Pod wpływem momentu sił działających na ciało sztywne ulega zmianie moment pędu tego ciała, zgodnie z podstawowym wyrażeniem [równanie (12-9)]

$$\tau = d\mathbf{L}/dt. \quad (12-9)$$

Moment pędu L jako wektor może ulegać zmianie co do wartości i kierunku. Równanie (12-9) wskazuje, że zmiana L (tzn. dL) musi być skierowana równoległe do τ . Z rysunku

* Wektor ω zawsze leży wzdłuż (nieruchomej) osi obrotu wirującego ciała, lecz ogólnie nie dotyczy to wektora L (patrz paragraf 13-3). Jednakże dla ciał obracających się dookoła osi symetrii, zarówno ω , jak i L leżą na osi obrotu; zakładamy przy tym, że oś obrotu jest osią nieruchomą. Możemy przyjąć, że wektory ω i L są współosiowe dla wirującego bąka (rys. 13-1a), jeżeli $\omega \gg \omega_p$, a więc gdy prędkość precesji jest względnie mała; w tym przypadku oś obrotu nie jest całkowicie nieruchoma, lecz jej kierunek zmienia się bardzo powoli.

13-1a widzimy, że wektor τ tworzy *kąt prosty* z L . Zatem zmiana L pod wpływem działania momentu siły musi być także prostopadła do L .

Aby zbadać to zjawisko ilościowo, obserwujemy ruch bąka w ciągu czasu Δt . W ciągu tego przedziału czasu zmiana L wynosi

$$\Delta L = \tau \Delta t, \quad (13-1)$$

zgodnie z równaniem (12-9) (jeżeli Δt jest dostatecznie małe). Tę zmianę ΔL , która podobnie jak τ jest prostopadła do L , widzimy na rys. 13-1b. Oś bąka zakresliła tu pełny stożek, ale sam bąk nie został umieszczony na rysunku.

Moment pędu bąka po upływie czasu Δt jest sumą geometryczną L i ΔL . Ponieważ ΔL jest prostopadłe do L i zgodnie z założeniem jest wielkością bardzo małą co do wartości, to nowy moment pędu ma tę samą *wartość*, lecz nieco *zmieniony kierunek*. Dlatego koniec wektora momentu pędu zakresła w miarę upływu czasu okrąg w płaszczyźnie poziomej (rys. 13-1b). Ponieważ wektor ten leży zawsze wzdłuż osi obrotu bąka, określiliśmy w ten sposób ilościowo precesję bąka.

Prędkość kątowna precesji ω_p wynika z rys. 13-1b, na którym

$$\omega_p = \Delta \varphi / \Delta t.$$

Ale ponieważ $\Delta L \ll L$, więc mamy (patrz równanie (13-1))

$$\Delta \varphi \cong \Delta L / L \sin \theta = \tau \Delta t / L \sin \theta$$

albo

$$\omega_p = \Delta \varphi / \Delta t = \tau / L \sin \theta. \quad (13-2a)$$

Ponieważ (rys. 13-1a)

$$\tau = rm g \sin(180^\circ - \theta) = rm g \sin \theta,$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\omega_p = mgr / L. \quad (13-2b)$$

Zwracamy uwagę, że prędkość kątowna precesji nie zależy od kąta θ i zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do wartości momentu pędu. Jeżeli moment pędu jest duży, to prędkość kątowna precesji będzie mała.

Równanie (13-2b) możemy wyrazić w postaci wektorowej. Przepisujemy najpierw równanie (13-2a) jako

$$\tau = \omega_p L \sin \theta.$$

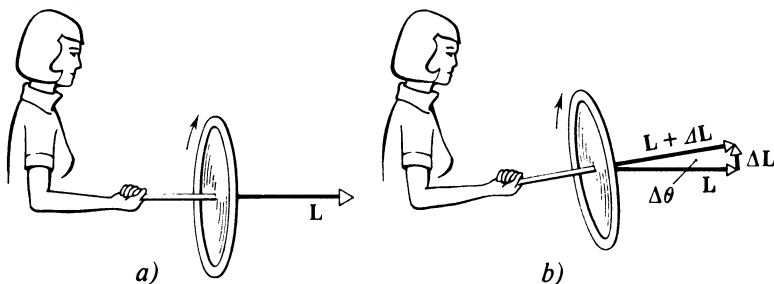
Wektor ω_p jest teraz na rys. 13-1b skierowany w górę i kąt θ leży między ω_p i L . Po prawej stronie powyższego równania rozpoznajemy wartość bezwzględą iloczynu wektorowego $\omega_p \times L$. Widzimy zatem, że równanie to daje wartość bezwzględną wektora τ występującego w równaniu wektorowym

$$\tau = \omega_p \times L. \quad (13-3)$$

Jest to ogólne wyrażenie wektorowe wiążące kątowną prędkość precesji z momentem siły τ i momentem pędu L . Czytelnik łatwo dowiedzie, że równanie (13-2b) wynika z tego ostatniego równania wektorowego. Stosując regułę prawej ręki do wektorów przedstawionych na rys. 13-1b widzimy, że porządek czynników po prawej stronie równania (13-3) jest poprawny, tak że iloczyn wektorowy $\omega_p \times L$ określa zarówno poprawny kierunek, jak i poprawną wartość bezwzględną wektora τ .

Przykład 1. Studentka trzyma koło roweru obracające się z względnie dużą prędkością kątową ω , dookoła poziomego pręta, jak to ilustruje rys. 13-2a. W pewnym momencie skręca pręt (w ciągu czasu Δt) o mały kąt $\Delta\theta$ powyżej poziomu, jak to ilustruje rys. 13-2b. Jaki jest moment siły przyłożonej do pręta, potrzebny do utrzymania go cały czas w płaszczyźnie pionowej?

Studentka wnioskuje z naprężeń odczuwanych w swoim przegubie, że musi przykładać moment siły do pręta, aby po prostu utrzymać go w położeniu poziomym. Moment ten równoważy działanie skręcające siły ciężkości przyłożonej do środka masy i skierowany jest wzdłuż poziomej osi prostopadłej do płaszczyzny rys. 13-2. Studentka musi przyłożyć siłę o tym momencie niezależnie od tego czy koło obraca się, czy też nie.



Rys. 13-2. (a) Studentka trzyma na poziomym pręcie szybko wirujące koło rowerowe (b) w pewnej chwili odchyła pręt od poziomu w górę o mały kąt $\Delta\theta$

Jeżeli teraz obróci ona pręt wirującego koła w górę, to stwierdzi, że koło zboczy na prawo dość nagle, tak że nie utrzyma pręta w płaszczyźnie pionowej. Aby utrzymać ten pręt w płaszczyźnie pionowej podczas skręcania go w górę, studentka musi przyłożyć siłę o dodatkowym momencie. Ten dodatkowy moment siły względem prawie pionowej osi ma za zadanie skrócić pręt w lewo, aby przeciwdziałać usuwaniu pręta z płaszczyzny pionowej. Zobaczmy dlaczego tak się dzieje.

Skręcając pręt w górę zmieniamy jego moment pędu L w czasie Δt o wielkość ΔL , jak to ilustruje rys. 13-2b. Zatem podczas tego przedziału czasu człowiek musi działać na koło siłą o średnim momencie, danym przy pomocy równania (12-9), czyli $\bar{\tau} = \Delta L / \Delta t$; wartość $\bar{\tau}$ wyliczamy z wyrażenia

$$\bar{\tau} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = L \sin \Delta\theta \Delta t.$$

Średni moment siły $\bar{\tau}$ ma ten sam kierunek co ΔL , tzn. jest w przybliżeniu skierowany pionowo w górę, jeżeli kąt $\Delta\theta$ (rys. 13-2b) nie jest zbyt duży. Taki moment siły spowoduje skręt w lewo podczas obracania pręta nie wirującego koła w górę. Tego momentu siły musi dostarczyć studentka obracająca wirujące koło. Jeżeli tego nie uczyni, pręt nie pozostanie w płaszczyźnie pionowej.

Przeprowadzenie takiego eksperymentu z wirującym kołem pozwala stwierdzić zależności pomiędzy wektorami L , ΔL i $\bar{\tau}$. Ten ostatni eksperyment można przeprowadzić z dziecinny bakiem, chociaż nie odczuwamy wówczas działania zależności $\tau = dL/dt$ tak wyraźnie, jak w przypadku doświadczenia z wirującym kołem roweru.

Istnieje analogia pomiędzy eksperymentem przedstawionym na rys. 13-2, a innym eksperymentem, który polega na obracaniu ciężarka zaczepionego na sznurze po poziomym okręgu koła ze stałą prędkością. Podczas takiego eksperymentu w każdym przedziale czasu Δt następuje zmiana kierunku pędu P ciężarka, przy niezmiennionej wartości bezwzględnej tego pędu. Zachodzi to dzięki działaniu siły skierowanej pod kątem prostym do wektora P (a w kierunku ΔP), czyli siły dośrodkowej. W eksperymencie zilustrowanym na rys. 13-2 studentka musi zmienić kierunek momentu pędu L koła w czasie Δt , pozostawiając jego wartość bezwzględną nie zmienioną. W tym celu przykłada siłę, której moment skierowany jest prostopadłe do wektora L (a w kierunku ΔL), to znaczy pionowo w górę*.

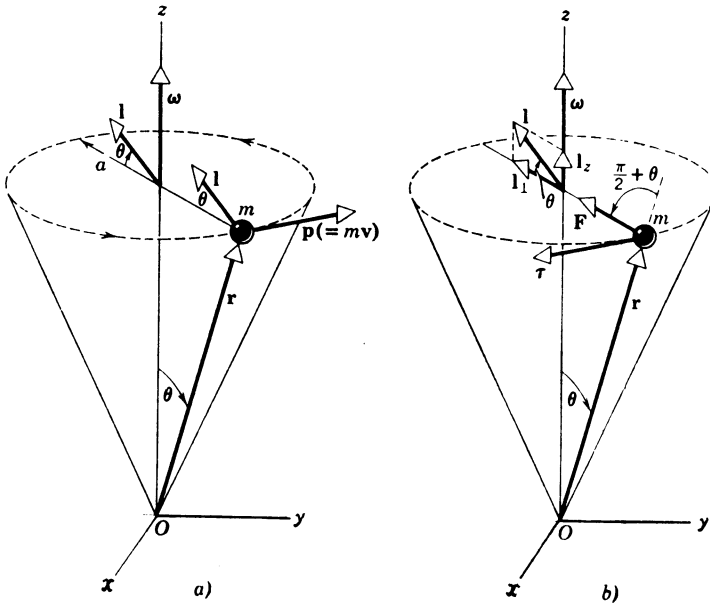
* Analogia ta zbadana jest przez A. E. Benfiela, *American Journal of Physics*, September 1958. Patrz także zadanie 5.

13-3. Moment pędu i prędkość kątową

Zajmiemy się teraz zbadaniem zależności między momentem pędu i prędkością kątową ciał obracających się dookoła nieruchomej osi w inercyjnym układzie odniesienia.

Przed wszystkim rozpatrzmy pojedynczy punkt materialny o masie m , poruszający się z prędkością v , po okręgu koła dookoła osi z w inercyjnym układzie odniesienia (rys. 13-3). Prędkość kątową ω tego punktu leży na osi z -ów i jest skierowana w górę. Jego moment pędu $\mathbf{l}$ względem początku układu odniesienia O obliczamy z równania (12-3), czyli

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$



Rys. 13-3. (a) Punkt materialny o masie m porusza się z prędkością v po okręgu koła o promieniu a w inercyjnym układzie odniesienia. Przez środek koła przechodzi oś z . Moment pędu $\mathbf{l} (= \mathbf{r} \times \mathbf{p})$ względem punktu O zaznaczono dwukrotnie: na obwodzie i w środku koła. (b) Dla tego samego punktu materialnego zaznaczono moment pędu $\mathbf{l}$ i jego składowe, siłę dośrodkową $\mathbf{F}$ oraz moment siły względem punktu O , $\boldsymbol{\tau}$

gdzie $\mathbf{r}$ oraz $\mathbf{p} (= m\mathbf{v})$ przedstawione są na rysunku. Wektor $\mathbf{l}$ jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{r}$ oraz $\mathbf{p}$. Oznacza to, że $\mathbf{l}$ nie jest równoległy do $\boldsymbol{\omega}$. Zwracamy uwagę, że $\mathbf{l}$ ma wektorową składową $\mathbf{l}_z$, która jest równoległa do $\boldsymbol{\omega}$, i ma również inną wektorową składową $\mathbf{l}_\perp$, która jest prostopadła do $\boldsymbol{\omega}$. Zwracamy uwagę również na to, że jeżeli wybierzemy początek układu tak, aby leżał w płaszczyźnie wirującego punktu, to wówczas $\mathbf{l}$ będzie równoległy do $\boldsymbol{\omega}$.

Ten, być może, nieoczekiwany wynik, że $\mathbf{l}$ i $\boldsymbol{\omega}$ w tym prostym przypadku nie są do siebie równoległe, może spowodować u Czytelnika pewien niepokój. Jednakże wynik ten jest w całkowitej zgodzie z zależnością ogólną $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$, dla momentu siły działającej na pojedynczy punkt materialny. Wektor $\mathbf{l}$ zmienia się w czasie w miarę ruchu punktu materialnego. Jest to wyłącznie zmiana kierunku, a nie wartości, tak jak to miało również miejsce

dla ruchu precesyjnego bąka, omawianego w poprzednim paragrafie. Ponieważ prawa strona zależności ($d\mathbf{l}/dt$) jest różna od zera, to i lewa strona ($\boldsymbol{\tau}$) musi być również różna od zera. Znaczący to, że siła działająca na punkt materialny ma pewien moment względem początku układu. Taki moment siły występuje rzeczywiście. Na cząstkę poruszającą się po okręgu koła musi działać siła dośrodkowa $\mathbf{F}$ (rys. 13-3b). Możemy sobie wyobrazić, że siła $\mathbf{F}$ jest siłą naprężenia nici, która wiąże obracający się punkt materialny z osią z . Moment siły $\mathbf{F}$ względem początku układu O , dany równaniem (12-1), wynosi

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Moment siły $\boldsymbol{\tau}$ jest styczny do koła (prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{r}$ i $\mathbf{F}$) i ma kierunek wskazany na rys. 13-3b, co można łatwo sprawdzić stosując regułę prawej ręki.

Przykład 2. Wykazać, że w przypadku poruszającego się punktu materialnego (rys. 13-3) spełnione jest równanie $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$.

Dowód przebiega w ten sam sposób jak dla wirującego bąka z rozdz. 13-2, gdyż z punktu widzenia rachunku wektorowego te dwa zagadnienia są identyczne. W każdym przypadku mamy do czynienia z precesją wektora momentu pędu [$\mathbf{L}$ dla bąka i $\mathbf{l}$ dla punktu materialnego (rys. 13-3)] dookoła osi pionowej z prędkością precesji ω_p dla bąka i prędkością ω dla punktu materialnego. W każdym przypadku mamy moment siły, który jest zawsze prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{L}$ (albo $\mathbf{l}$) i przez $\boldsymbol{\omega}_p$ (albo $\boldsymbol{\omega}$).

Tak więc ponieważ te dwa zagadnienia są formalnie identyczne, wystarczy stwierdzić, czy punkt materialny poruszający się po okręgu (rys. 13-3) spełnia wektorowe równanie dla precesji ($\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}$; równanie 13-3). Równanie to wyprowadziliśmy dla ruchu precesyjnego bąka bezpośrednio z zależności $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ [równanie (12-9)], z którą jest ono równoznaczne. Możemy napisać zależność $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}$ posługując się wartościami bezwzględnyymi. Zatem

$$\tau = \omega \sin(90^\circ - \theta) = \omega l \cos \theta, \quad (13-4)$$

gdzie podstawiliśmy ω zamiast ω_p i l zamiast L . Z rysunku 13-3a widzimy, że kąt pomiędzy $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{l}$ wynosi $90^\circ - \theta$. Dla τ i l , posługując się znów oznaczeniami z rys. 13-3a, piszemy

$$\tau = Fr \sin(90^\circ + \theta) = m\omega^2(r \sin \theta)r \cos \theta$$

oraz

$$l = r p \sin 90^\circ = r(mv) = rm\omega(r \sin \theta),$$

gdzie $r \sin \theta$ jest promieniem a okręgu, po którym porusza się punkt materialny, ($90^\circ + \theta$) jest kątem pomiędzy wektorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{F}$, a 90° jest kątem pomiędzy wektorami $\mathbf{r}$ i $\mathbf{p}$. Podstawiając te dwa wyrażenia do równania (13-4) otrzymujemy

$$m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta = \omega(m\omega r^2 \sin \theta) \cos \theta,$$

co jest tożsamością. Posługując się zatem wartościami bezwzględnyymi udowodniliśmy postawione twierdzenie. Czytelnik może wrócić do rys. 13-3 i upewnić się, że kierunek wektora $\boldsymbol{\tau}$ jest taki sam jak kierunek $d\mathbf{l}/dt$ [równanie (12-7)] albo kierunek $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}$ [równanie (13-3)].

Zajmiemy się teraz zależnością pomiędzy l_z i ω dla punktu materialnego z rys. 13-3. Z przykładu 2 wiemy, że

$$l = mr^2 \omega \sin \theta.$$

Z rysunku 13-3b widzimy, że

$$l_z = l \sin \theta = m\omega r^2 \sin^2 \theta.$$

W zależności tej $r \sin \theta = a$ jest promieniem okręgu, po którym porusza się punkt materialny. To prowadzi do wyrażenia

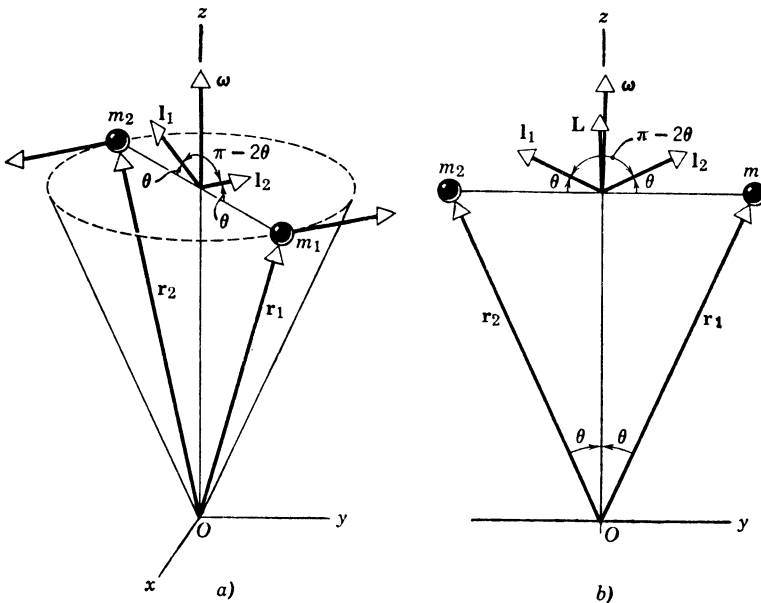
$$l_z = ma^2 \omega, \quad (13-5)$$

w którym ma^2 jest momentem bezwładności I punktu materialnego względem osi z . Stąd

$$l_z = I\omega; \quad (13-6)$$

równanie to porównujemy z równaniem (12-18) ($L = I\omega$) dla ruchu obrotowego ciała sztywnego dookoła osi nieruchomej. Zwracamy uwagę, że wektorowa zależności $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\omega}$ nie jest poprawna w tym przypadku, ponieważ $\mathbf{l}$ i $\boldsymbol{\omega}$ nie mają tego samego kierunku. Jednakże $\mathbf{l}_z$ i $\boldsymbol{\omega}$ mają ten sam kierunek, tak że równanie (13-6) możemy również napisać w postaci wektorowej jako $\mathbf{l}_z = I\boldsymbol{\omega}$.

Dodajmy teraz do układu przedstawionego na rys. 13-3 jeszcze jeden punkt materialny o masie m . W szczególności dodajmy ten punkt do tej samej orbity i każmy mu poruszać się z tą samą prędkością, ale zawsze niech ten punkt znajduje się w punkcie diametralnie przeciwnym do położenia pierwszego punktu względem osi obrotu. Moment pędu $\mathbf{l}_2$ drugiego punktu materialnego względem początku O będzie miał taką samą wartość jak $\mathbf{l}_1$ dla punktu pierwszego i będzie tworzył taki sam kąt $90^\circ - \theta$ z osią z . Te dwa momenty pędu będą miały jednak różną orientację względem osi obrotu. Jak przedstawia rys. 13-4a, wektor $\mathbf{l}_2$ będzie leżał w płaszczyźnie utworzonej przez $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{l}_1$, ale będzie się znajdował po przeciwnej stronie osi z , w porównaniu z założeniem wektora $\mathbf{l}_1$. Kąt między wektorami $\mathbf{l}_1$ i $\mathbf{l}_2$ wynosi $180^\circ - 2\theta$.



Rys. 13-4. (a) Dwa punkty materialne o masie m każdy poruszają się jak punkt materialny z rys. 13-3, lecz zajmują diametralnie przeciwne położenia. (b) Rzut tych punktów na płaszczyznę wyznaczoną przez oś obrotu i odcinek między punktami. Całkowity moment pędu $\mathbf{L} (= \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2)$ układu dwóch punktów materialnych leży na osi obrotu, tak samo jak $\boldsymbol{\omega}$

Całkowity moment pędu $\mathbf{L}$ układu dwóch punktów materialnych jest to suma geometryczna momentów pędu poszczególnych punktów, czyli $\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$. Wektor wypadkowy $\mathbf{L}$, jak widzimy na rys. 13-4b, leży na osi z (w kierunku $\boldsymbol{\omega}$) i ma stałą wartość bezwzględną. Zwracamy uwagę, że stwierdzenie to jest prawdziwe niezależnie od tego, gdzie umieścimy początek układu O na osi obrotu.

Fakt, że $\mathbf{L}$ jest stały (zarówno co do kierunku, jak i co do wartości bezwzględnej) dla takiego układu dwu punktów materialnych oznacza, że $d\mathbf{L}/dt = 0$, co z kolei [równanie

(12-9)] prowadzi do wniosku, że dla tego układu $\tau = 0$. Czytelnik może się łatwo przekonać, przy pomocy rys. 13-3b, że w tym przypadku momenty sił działających na punkty materialne względem punktu O są równe co do wartości, lecz przeciwnie skierowane. Tak więc całkowity moment sił działających na układ dwóch punktów materialnych jest równy zeru.

Fakt, że ω i L mają w tym przypadku ten sam kierunek, a nie miały go w przypadku pojedynczego punktu materialnego, daje się łatwo wyjaśnić symetrią układu. Punkty materialne mają bowiem te same masy, znajdują się w tej samej odległości od osi obrotu w diametralnie przeciwnych położeniach.

Możemy teraz uogólnić nasze rozważania na przypadek ciała sztywnego będącego układem wielu punktów materialnych. Jeżeli ciało jest symetryczne względem osi obrotu, to możemy je rozpatrywać jako układ par punktów materialnych podobnych do omawianych powyżej. Przez symetrię ciała względem osi obrotu rozumiemy to, że dla każdego elementu ciała istnieje identyczny element znajdujący się w diametralnie przeciwnym położeniu i w tej samej odległości od osi obrotu. Ponieważ L i ω są równoległe dla każdej takiej pary elementów ciała, więc są one również równoległe w przypadku ciał sztywnych mających tego rodzaju symetrię. Zwracamy uwagę, że wszystkie układy z tablicy 12-1 spełniają to kryterium z wyjątkiem przypadków (f) i (j).

Ponieważ dla symetrycznych ciał sztywnych L i ω są równoległe, więc równanie (12-18) ($L = I\omega$) możemy zapisać w postaci wektorowej, czyli

$$L = I\omega. \quad (13-7)$$

Nie możemy jednak zapomnieć, że jeżeli L oznacza *całkowity* moment pędu, to równanie (13-7) stosuje się tylko do ciał mających symetrię względem (nieruchomej) osi obrotu*. Jeżeli natomiast L oznacza składową wektorową momentu pędu wzdłuż osi obrotu (to jest L_z), to równanie (13-7) jest równoważne równaniu (12-8) i obowiązuje dla dowolnego ciała sztywnego (symetrycznego albo niesymetrycznego), obracającego się dookoła nieruchomej osi.

Przykład 3. W przykładzie 5 (rozdział 12) znaleźć przyspieszenie spadającego ciała, równanie (12-9) ($\tau = dL/dt$).

Na układ z rys. 12-12 składający się z krążka M i masy m działają dwie zewnętrzne siły. Przyciąganie ziemskie mg działa na masę m , a łożyska osi krążka działają siłą skierowaną w górę. Naprężenie sznura jest siłą wewnętrzną i nie działa na układ (krążek + ciężarek). Tylko pierwsza z tych sił zewnętrznych ma moment względem początku układu (oś krążka); jego wartość wynosi $(mg)R$.

Moment pędu układu względem osi obrotu w każdej chwili wynosi

$$L = I\omega + (mv)R.$$

$I\omega$ jest momentem pędu (symetrycznego) krążka, a $(mv)R$ jest momentem pędu (pęd · ramię) spadającego ciała względem osi obrotu. Obydwa te momenty (tworzące moment pędu L) mają ten sam kierunek, to znaczy są prostopadłe do płaszczyzny rys. 12-12 i skierowane na zewnątrz.

* Uprościliśmy znacznie warunki symetrii. Każde ciało sztywne niezależnie od tego, jak nieregularny ma kształt, ma trzy prostopadłe osie przechodzące przez środek masy ciała, względem których wektory L i ω , do siebie równoległe, związane są wektorową zależnością $L = I\omega$. Te trzy osie nazywamy *osiami głównymi*. Najwygodniejszą osią obrotu jest zawsze oś główna, jak również osie prostopadłe do niej i przechodzące przez środek masy. Jednakże, ogólnie biorąc, wektory L i ω nie są do siebie równoległe w przypadku obrotu wokół innych osi niż osie główne. [Patrz: W. Rubinowicz i W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1961].

Stosując równanie $\tau = dL/dt$ (w postaci skalarnej) otrzymamy

$$(mg)R = \frac{d}{dt}(I\omega + mvR) = I(d\omega/dt) + mR(dv/dt) = I\alpha + mRa.$$

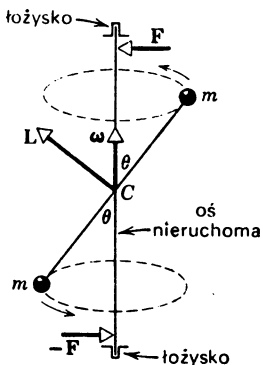
Ponieważ $a = \alpha R$ i $I = \frac{1}{2}MR^2$, więc wyrażenie redukuje się do postaci:

$$mgR = (\frac{1}{2}MR^2)(a/R) + mRa;$$

stąd

$$a = \frac{2mg}{M+2m}.$$

Przykład 4. Zajmiemy się prostym, niesymetrycznym ciałem sztywnym, które porusza się ruchem obrotowym. Są to dwa ciężarki na drążku, który tworzy kąt θ z nieruchomą osią obrotu przechodzącą przez środek masy układu. Ciało obraca się ze stałą prędkością kątową ω ; wektor ω jest skierowany wzdłuż osi obrotu, jak to widzimy na rys. 13-5. Z doświadczenia wiemy, że układ taki jest „niezrównoważony”. Gdyby oś obrotu nie była odpowiednio sztywna, to przy dostatecznie dużych prędkościach kątowych ulegałaby ona złamaniu w punkcie C. Układ ten ma tendencję do zmiany kąta θ w kierunku 90° . Przy takim bowiem kącie układ ten stałby się symetryczny względem osi obrotu.



Rys. 13-5. Przykład 4

(a) Wykazać ilościowo, że dla niesymetrycznego układu z rys. 13-5 wektory L i ω nie są równoległe.

Każdy ciężarek o masie m ma moment pędu względem punktu C równy $r \times p$. W chwili określonej na rysunku górny ciężarek porusza się w kierunku prostopadłym na zewnątrz płaszczyzny rysunku, a ciężarek dolny porusza się w kierunku prostopadłym za płaszczyznę rysunku. Tak więc wektory pędu i położenia tych dwóch mas są równe co do wartości bezwzględnej, lecz przeciwnie skierowane. Stosując do iloczynu wektorowego $r \times p$ regułę prawej ręki, widzimy, że moment pędu każdego ciężarka jest równy L . Natomiast suma wektorów L , czyli całkowity moment pędu L układu dwóch mas jest prostopadły do pręta łączącego te masy, jak to widzimy na rys. 13-5. Zatem wektory L i ω nie są równoległe do siebie w danej chwili. Z naszego rozważania wynika, że kiedy dwa ciężarki obracają się, wtedy ich całkowity moment pędu, chociaż stały co do wartości, obraca się dookoła nieruchomej osi obrotu.

(b) Fakt, że wektory L i ω nie są do siebie równoległe, jest w doskonałej zgodzie z podstawową zależnością $\tau = dL/dt$. Spotkaliśmy się już poprzednio dwukrotnie z faktem (patrz paragraf 13-2 i przykład 1), że wektor momentu pędu mający stałą wartość bezwzględną i wirujący dookoła nieruchomej osi musi być wynikiem istnienia momentu siły τ prostopadłego do płaszczyzny utworzonej przez wektory L i ω . W sytuacji przedstawionej na rys. 13-5 tą płaszczyzną jest płaszczyzna rysunku. Czy istnieje taki moment siły w tym przypadku, jeżeli tak, to jakie jest jego pochodzenie?

Występuje tu rzeczywiście ten moment siły i wynika on z działania niezrównoważonych sił bocznych, z jakimi oddziałują łożyska na oś obrotu. Siły te przenoszone są następnie przez oś obrotu na drążek ciężarków. W chwili określonej na rysunku górna masa ma tendencję do poruszania się na zewnątrz, na prawo. Oś obrotu pociągnęłaby na prawo górne łożysko, które z kolei oddziałuje siłą F na oś obrotu. Podobnie dolna masa ma tendencję do poruszania się na zewnątrz, na lewo. Oś obrotu pociągnęłaby dolne łożysko w lewo, które z kolei oddziałuje siłą $-F$ na oś obrotu. Moment siły τ tych dwóch sił względem punktu C jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i skierowany na zewnątrz. Tym samym jest on prostopadły do

płaszczyzny utworzonej przez wektory $\mathbf{L}$ i $\boldsymbol{\omega}$ i skierowany w kierunku właściwym dla ruchu obrotowego wektora $\mathbf{L}$ (Czytelnik może to łatwo sprawdzić).

Siły $\mathbf{F}$ i $-\mathbf{F}$ w danej chwili leżą w płaszczyźnie rysunku (rys. 13-5). W miarę obrotu ciężarków siły te, a zatem i moment siły $\boldsymbol{\tau}$, wirują. Jednakże moment siły $\boldsymbol{\tau}$ zawsze pozostaje prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{L}$ (porównać z rysunkiem 13-1). Siły $\mathbf{F}$ i $-\mathbf{F}$ są przyczyną „bicia osiowego” w górnym i dolnym łożysku. Łożyska i ich zamocowania muszą być dostatecznie wytrzymałe na działanie tych sił. Ciała symetryczne wirują bez „bicia osiowego”* i bez chybota osi obrotu.

13-4. Zasada zachowania momentu pędu

W rozdziale 12 dowiedzieliśmy się, że stosunek zmiany całkowitego momentu pędu układu punktów materialnych względem punktu związanego z inercjalnym układem odniesienia (albo względem środka masy) do czasu, w którym ta zmiana nastąpiła, jest równy sumie momentów sił zewnętrznych działających na ten układ, to znaczy

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{zew}} = d\mathbf{L}/dt. \quad (12-9)$$

Przypuśćmy teraz, że suma momentów sił zewnętrznych $\boldsymbol{\tau}_{\text{zew}} = 0$; znaczy to, że $d\mathbf{L}/dt = 0$, zatem $\mathbf{L}$ jest wektorem stałym.

Jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ wynosi zero, całkowity moment pędu układu pozostaje stały. Jest to zasada zachowania momentu pędu. Dla układu n punktów materialnych całkowity moment pędu względem pewnego punktu wynosi

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{L}_n.$$

Jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ wynosi zero, to

$$\dot{\mathbf{L}} = \text{const} = \mathbf{L}_0, \quad (13-8)$$

gdzie $\mathbf{L}_0$ jest stałym wektorem całkowitego momentu pędu. Momenty pędu poszczególnych punktów materialnych mogą się zmieniać, lecz ich suma wektorowa $\mathbf{L}_0$ pozostaje stała, gdy wypadkowy moment sił zewnętrznych równa się zeru.

Moment pędu jest wielkością wektorową, a zatem równanie (13-8) jest równoważne trzem równaniom skalarnym, odpowiadającym trzem osiom współrzędnych przechodzących przez punkt odniesienia. Na podstawie zasady zachowania momentu pędu otrzymujemy trzy warunki na ruch układu.

Jeżeli układem punktów materialnych jest ciało sztywne, obracające się dokoła pewnej osi (na przykład osi z), która jest nieruchoma w inercjalnym układzie odniesienia, to możemy napisać, że

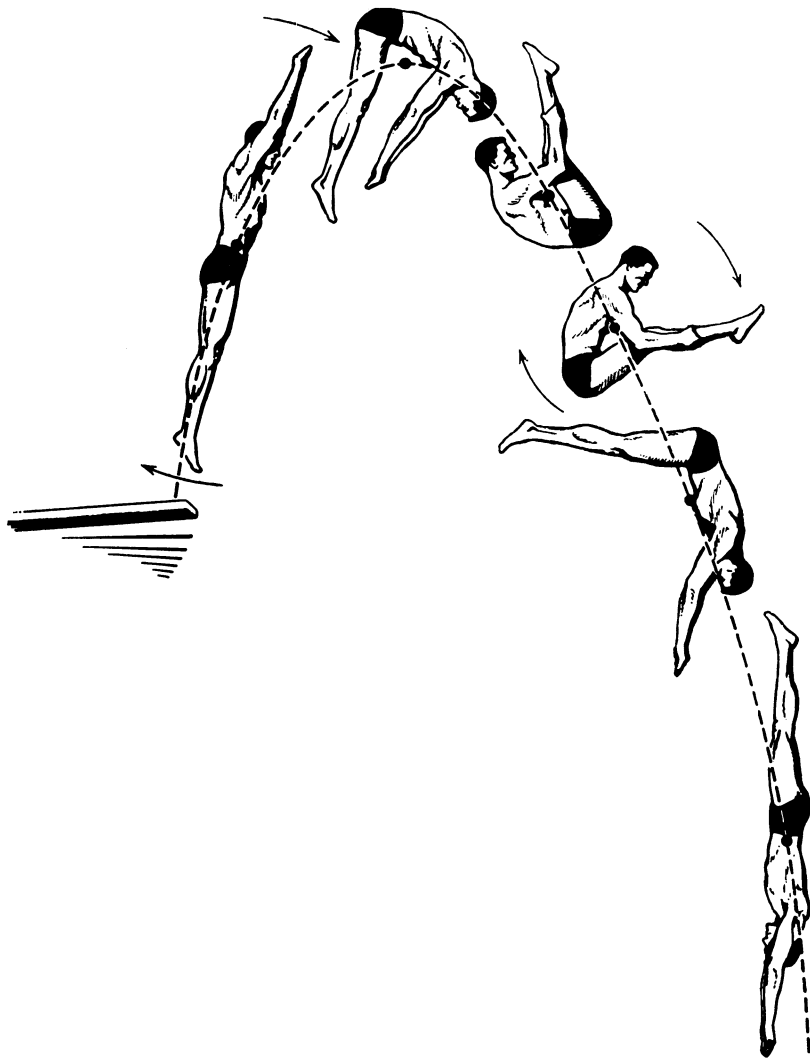
$$L_z = I\omega, \quad (13-7)$$

* Bicie osiowe w łożyskach i wewnętrzne naprężenia mogą być poważnym praktycznym problemem do rozwiązania w takich wirujących przedmiotach, jak wirnik turbin przeznaczonych do ruchu na wysokich obrotach. Chociaż według projektu takie wirniki powinny być symetryczne, jednakże z powodu małych błędów w rozmieszczeniu łopatek i innych elementów cały układ wirujący może stać się nieznacznie asymetryczny. Układy wirujące podlegają procesowi wyważania, który polega na wprawianiu w szybki ruch obrotowy i obserwowaniu, w którym miejscu wirującego ciała należy odjąć względnie dodać pewną nieznaczną masę. Proces ten dokonuje się automatycznie w specjalnych urządzeniach. Najbardziej ilustrującym przykładem wyważania może być wyważanie opon samochodowych z obręczami. Aby zredukować bicia osiowe w łożyskach koła samochodowego, przy dużych prędkościach obrotowych dokłada się w odpowiednich miejscach na obręczy koła kawałki ołowianych nakładek.

gdzie L_z jest składową momentu pędu wzdłuż osi obrotu, a I jest momentem bezwładności układu względem tej samej osi. Wartość momentu bezwładności obracającego się ciała może ulec zmianie przez przestawienie względem siebie poszczególnych części układu wirującego. Gdy nie występują momenty sił zewnętrznych, składowa L_z musi pozostać stała, i gdy moment bezwładności I ulega zmianie, wtedy dla spełnienia warunku stałości L_z musi ulec zmianie również prędkość kątowna ω . Zasada zachowania momentu pędu w tym przypadku daje się wyrazić w postaci:

$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{const.} \quad (13-9)$$

Równanie (13-9) obowiązuje nie tylko dla ruchu obrotowego dookoła osi nieruchomej,



Rys. 13-6. Skoczek odbija się od trampoliny z wyciągniętymi nogami i rękoma z pewną początkową prędkością kątowną. Ponieważ w powietrzu nie występują momenty sił zewnętrznych, jego moment pędu $L(= I\omega)$ jest stały. Gdy skoczek podkurczy ręce i nogi, zmaleje I , ale odpowiednio wzrośnie ω . Przy ponownym wyprostowaniu kończyn jego prędkość kątowna wróci do początkowej wartości. Środek masy skoczka porusza się po paraboli, co jest wspólną cechą dla tego typu ruchów płaskich w polu siły ciężkości

lecz także dookoła osi przechodzącej przez środek masy układu, który się porusza w ten sposób, że jego oś obrotu pozostaje zawsze równoległa do siebie (patrz str. 274).

Ponieważ I zależy od kwadratu odległości poszczególnych części układu od osi obrotu, zasadę tę często wykorzystują akrobaci, skoczkowie do wody, tancerze baletowi, łyżwiarze i inni, zmieniając w znacznym stopniu tę odległość przez wyciągnięcie albo podkurczenie rąk względnie nóg. Popatrzmy na skoczka* przedstawionego na rys. 13-6. Kiedy skoczek opuszcza trampolinę, ma pewną prędkość kątową ω_0 dookoła poziomej osi przechodzącej przez jego środek masy, dzięki temu wykona on pół obrotu, zanim wpadnie do wody. Jeżeli chce on w tym samym czasie wykonać półtora obrotu, musi potroić swoją prędkość kątową. Oprócz siły ciężkości żadne siły zewnętrzne podczas lotu na niego nie działają, a siła ciężkości nie daje momentu siły względem jego środka masy. Zatem moment pędu skoczka pozostaje stały i $I_0\omega_0 = I\omega$. Ponieważ $\omega = 3\omega_0$, skoczek musi zmienić swój moment bezwładności względem poziomej osi przechodzącej przez jego środek masy od wartości I_0 do wartości $\frac{1}{3}I_0$. Zmiana ta następuje poprzez ściągnięcie rąk i nóg do środka ciała. Im bardziej skoczek powiększy swoją prędkość kątową zmniejszając moment bezwładności, tym więcej obrotów wykona w danym czasie.

Powinniśmy zwrócić uwagę na to, że energia kinetyczna skoczka nie jest stała. Rzeczywiście, ponieważ

$$I\omega = I_0\omega_0, \quad I < I_0,$$

więc

$$\frac{1}{2}I\omega^2 > \frac{1}{2}I_0\omega_0^2,$$

czyli kinetyczna energia obrotowa skoczka *wzrasta*. Wzrost ten powoduje sam skoczek, który wykonuje pracę ściągając do środka części swego ciała.

W ten sam sposób łyżwiarz, czy tancerz baletowy mogą zwiększyć albo zmniejszyć prędkość obrotową dookoła osi pionowej. Na tej samej zasadzie kot zawsze spada na łapy; pomaga mu w tym ogon, ale tylko jako środek dodatkowy.

Przykład 5. Mały przedmiot o masie m przywiązano do sznurka, który przechodzi przez pustą rurkę. Sznurek trzymamy w jednej ręce, a rurkę w drugiej. Przedmiot obraca się po okręgu o promieniu r_1 z prędkością v_1 . Pociągając sznurek w dół skracamy promień do wartości r_2 (rys. 13-7). Znaleźć nowe prędkości v_2 i ω_2 , jeżeli znamy wartości v_1 i ω_1 i promienie r_1 i r_2 .

Siła ciągnąca sznurek w dół przenosi się jako siła radialna na przedmiot. Taka siła powoduje, że moment siły działający na przedmiot względem środka obrotu jest równy zeru. Ponieważ żadne momenty sił zewnętrznych względem osi obrotu nie występują, więc moment pędu jest zachowany. Stąd

początkowy moment pędu = końcowy moment pędu,

$$mv_1r_1 = mv_2r_2,$$

$$v_2 = v_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right).$$

Ponieważ $r_1 > r_2$, przedmiot zwiększy swoją prędkość. Prędkość kątową obliczamy z równania

$$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2,$$

skąd

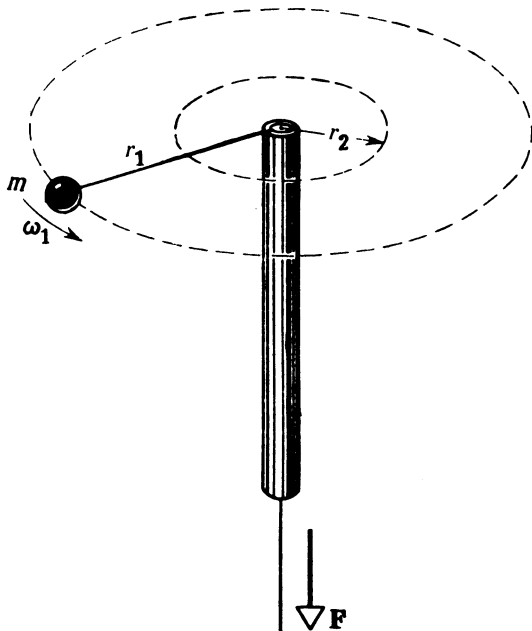
$$\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \omega_1,$$

czyli prędkość kątową wzrasta (patrz zadanie 31). Jakie znaczenie ma w tym zadaniu siła ciężkości (ciężar przedmiotu)?

* Patrz: The Mechanics of Swimming and Diving, R. L. Page, *The Physics Teacher*, February 1976 (znajduje się tam interesująca analiza biomechaniczna).

Przykład 6. Człowiek siedzi na krześle, które może się swobodnie obracać dookoła swej osi pionowej. W wyciągniętych poziomo rękach trzyma ciężarki o wadze 35,6 N każdy. Będąc w takiej pozycji, został wprawiony w ruch obrotowy z prędkością kątową 0,50 obr/s.

Zakładamy, że nie występuje tarcie i nie ma momentów sił względem osi pionowej. Moment bezwładności samego człowieka wynosi $6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; wówczas gdy człowiek ma ręce z ciężarkami wyprostowane w bok, jego zmiana następuje tylko dzięki przybliżeniu do osi obrotu trzymanych w rękach ciężarków, z odległości 90 cm na odległość 15 cm. Znaleźć zmianę prędkości kąto-
wej.



Rys. 13-7. Przykład 5. Masa umocowana na końcu sznurka porusza się po okręgu o promieniu r_1 z prędkością kątową ω_1 . Sznurek przeciągnięty jest przez rurkę. F dostarcza siły dośrodkowej

Ponieważ jedyną siłą zewnętrzną jest tu siła ciężkości, o momencie względem osi obrotu (przechodzącej przez środek masy) równym zero, moment jest zachowany,

początkowy moment pędu = końcowy moment pędu,

$$I_0 \omega_0 = I \omega.$$

Mamy

$$I = I_{\text{człowiek}} + I_{\text{cięż.}},$$

$$I_0 = 6,0 + 2 \cdot 4 \cdot 0,9^2 = 12,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I = 6,0 + 2 \cdot 4 \cdot 0,15^2 = 6,18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\omega_0 = 0,50 \text{ obr/s} = \pi \text{ rad/s}.$$

Zatem

$$\omega = \frac{I_0}{I} \omega_0 = \frac{12,5}{6,18} \pi \text{ rad/s} = 2,1 \pi \text{ rad/s} = 1,0 \text{ obr/s}.$$

Końcowa prędkość kątową jest dwa razy większa od początkowej.

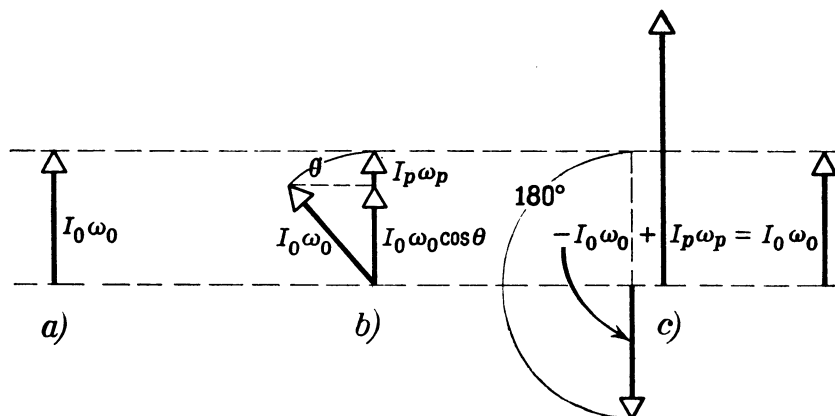
Jeżeli moment bezwładności zostanie zmniejszony na skutek przyciągania rąk do siebie, końcowa prędkość kątową będzie znacznie większa.

Jakie zmiany spowodowałoby tarcie? Czy jeżeli człowiek przyciąga ręce do siebie, a następnie ponownie je wyprostowuje, to energia kinetyczna jest zachowana, przy założeniu, że nie ma tarcia? Wyjaśnić to.

Przykład 7. Omówimy doświadczenie ilustrujące wektorowy charakter prawa zachowania momentu pędu. Człowiek stoi na stole, który może się obracać tylko dookoła osi pionowej. W swych rękach trzyma

koło rowerowe. Koło to obraca się dookoła osi pionowej z prędkością kątową ω_0 . Człowiek będąc sam w spoczynku stara się zmienić kierunek obrotu koła. Co w tym przypadku zauważymy?

Rozpatrzmy układ składający się z człowieka, stołu obrotowego i koła. Początkowy całkowity moment pędu $I_0\omega_0$ pochodzi od wirującego koła. I_0 jest momentem bezwładności koła względem osi pionowej, ω_0 — wektorem początkowej prędkości kątowej skierowanym w górę (rys. 13-8a ilustruje początkowy stan układu).



Rys. 13-8. Przykład 7. (a) Moment pędu (początkowy) koła poziomego. (b) Płaszczyzna koła odchylona jest od poziomu o kąt θ . Ponieważ nie ma momentu siły w kierunku pionowym, moment pędu w tym kierunku musi być zachowany. Ubytek momentu pędu równy $(1 - \cos\theta)I_0\omega_0$ odnajduje się w obrocie człowieka trzymającego koło. (c) Koło obrócone o 180° . Ubytek wynosi teraz $2I_0\omega_0$; podobnie jak poprzednio, otrzymuje go człowiek trzymający koło

Następnie oś obrotu koła zostaje odchylona od pionu o kąt θ (w tym celu potrzebny jest pewien moment siły; patrz przykład 1, jednakże ten moment siły jest momentem siły wewnętrznej układu zgodnie z podaną poprzednio definicją). Ponieważ zewnętrzna składowa momentu siły układu względem osi pionowej nie występuje, składowa pionowa momentu pędu musi pozostać stała. Koło obraca się teraz dookoła nowej osi skierowanej pod kątem θ do pionu. Składowa pionowa momentu pędu wynosi teraz tylko $I_0\omega_0\cos\theta$. Zatem człowiek ze stołem musi dostarczyć dodatkowego momentu pędu względem osi pionowej i zaczyna się dookoła niej obracać. Ten dodatkowy pionowy moment pędu $I_p\omega_p$ w sumie z momentem $I_0\omega_0\cos\theta$ musi równać się początkowemu momentowi pędu $I_0\omega_0$. A więc

$$I_p\omega_p = I_0\omega_0(1 - \cos\theta),$$

co jest przedstawione na rys. 13-8b. I_p jest momentem bezwładności człowieka i stołu, a ω_p ich prędkością kątową względem osi pionowej.

Jeżeli człowiek obróci koło o kąt $\theta = 180^\circ$, to uzyska razem ze stołem pionowy moment pędu $2I_0\omega_0$. Całkowity pionowy moment pędu jest w dalszym ciągu zachowany, czyli równa się początkowemu momentowi pędu $I_0\omega_0$ (rys. 13-8c).

Rozważmy teraz moment pędu samego koła. Człowiek obracając oś obrotu koła o kąt θ przykłada do niego moment siły w ciągu czasu Δt , tyle bowiem trwa nowe ustawienie osi obrotu. Składowa pionowa sił reakcji na ten „impulsowy” moment siły działa na człowieka i wpływa na pionową składową momentu siły człowieka i stołu.

Koło trzymane pod kątem θ względem pionowej osi porusza się ruchem precesyjnym względem tej osi, podobnie jak to miało miejsce w przypadku bąka z rys. 13-1. Teraz, podobnie jak w przypadku bąka, poziomy moment siły, który pozostaje zawsze pod kątem prostym do płaszczyzny utworzonej przez oś pionową i oś koła, musi w tym przypadku pochodzić od człowieka.

Dokładna analiza ruchu tego układu opiera się na wektorowym równaniu $\tau = dL/dt$ oraz wektorowej naturze wielkości stosowanych wyżej. Pozostawiamy ją zainteresowanemu Czytelnikowi jako samodzielne ćwiczenie.

13-5. Niektóre dalsze aspekty zasady zachowania momentu pędu

Zasada zachowania momentu pędu obowiązuje zarówno w fizyce atomowej i jądrowej, jak i w mechanice nieba i ciał makroskopowych. Mechanika Newtona nie potwierdza się w dziedzinie fizyki atomowej i jądrowej. Zatem zasada zachowania momentu pędu musi być bardziej podstawowa niż zasady Newtona. Przy wyprowadzeniu tej zasady przyjęliśmy bardziej sztywne założenia, niż to było konieczne nawet w ramach mechaniki klasycznej. Czytelnik powinien zauważyć zasadniczą rolę trzeciej zasady Newtona w wyprowadzeniu zasady zachowania momentu pędu. Użyliśmy tej zasady, aby usprawiedliwić założenie, że suma momentów sił wewnętrznych znika. Założyliśmy, że siły akcji i reakcji są równe co do wartości i przeciwnie skierowane („słaba” forma) i że leżą wzdłuż prostej łączącej dwa oddziałujące na siebie punkty materialne („silna” forma trzeciej zasady). Wiadomo, że w pewnych oddziaływaniach elektromagnetycznych „silniejsze” sformułowanie nie obowiązuje. Jednakże założenie, że suma momentów sił wewnętrznych układu punktów materialnych jest równa zeru, może być uzasadnione na podstawie o wiele słabszego warunku niż ten, który obowiązuje zgodnie z trzecią zasadą dynamiki*.

Zasada zachowania momentu pędu w postaci przez nas podanej obowiązuje dla układu ciał, które można traktować jako punkty materialne, tzn. można pominąć ich ruch obrotowy. Gdy jednak poszczególne ciała układu mają własny ruch obrotowy, zasada zachowania pędu obowiązuje nadal po uwzględnieniu momentu pędu związanego z tym obrotem. Jednakże ciała takie nie są już prostymi cząstkami, których ruch opisuje dynamika punktu materialnego.

W fizyce atomowej i jądrowej stwierdzamy, że „cząstki elementarne”, takie jak: elektrony, protony i neutrony itd. (patrz załącznik I) mają moment pędu wywołany z jednej strony własnym ruchem obrotowym, a z drugiej strony — ruchem względem pewnego punktu zewnętrznego. W takim przypadku, kiedy stosujemy zasadę zachowania całkowitego momentu pędu, musimy włączyć do sumy momentów własny moment pędu, nazwany *spinem*. Podstawową właściwością układów cząsteczkowych, atomowych i jądrowych jest to, że ich momenty pędu mogą przyjmować ściśle określone, nieciągłe wartości. Mówimy wtedy, że moment pędu jest skwantowany. Dlatego też moment pędu odgrywa główną rolę przy opisie zachowania się tego rodzaju układów (patrz zadania 9 i 10). Takie układy będziemy jeszcze omawiać w dalszych rozdziałach.

Jeżeli patrzylibyśmy na Słońce, planety i Księżyc jako na cząstki nie mające własnych momentów pędu dookoła własnej osi, to moment pędu Układu Słonecznego nie byłby stały. Ale ciała te mają własny moment pędu. Istotnie, siły przyptywów przenoszą częściowo własny moment pędu na orbitalny moment pędu planet i księżyców. Kiedy stosujemy zasadę zachowania momentu pędu, musimy uwzględnić ten obrotowy moment pędu względem własnych osi. Zasada zachowania momentu pędu odgrywa podstawową rolę w rozwoju teorii o początku Układu Słonecznego, kurczeniu się gwiazd olbrzymów i w innych zagadnieniach astronomii. Niektóre zastosowania astronomiczne tej zasady omówimy w rozdziale 16.

Ten raczej prosty sposób analizy całkowitego momentu pędu układów atomowych albo astronomicznych opiera się na twierdzeniu (patrz zadanie 15), że: *całkowity moment pędu L dowolnego układu względem początku inercjalnego układu odniesienia jest sumą momentu pędu względem środka masy tego układu (własnego momentu pędu, czyli spinu) i momentu pędu wynikającego z ruchu obrotowego środka masy, względem początku układu (orbitalny moment pędu).*

Zasady zachowania całkowitej energii, pędu i momentu pędu mają podstawowe znaczenie w fizyce i obowiązują we wszystkich współczesnych teoriach fizycznych. Będziemy mieli okazję wielokrotnie stosować je w dalszych rozdziałach.

13-6. Dynamika ruchu obrotowego — przegląd

Ruchy obrotowe punktów materialnych i ciał sztywnych są tak skomplikowane, że całkowicie ogólne rozważania na ich temat wychodzą poza zakres tego podręcznika. Wydaje się rzeczą celową zebrać w jednym miejscu wszystkie równania dotyczące dynamiki ruchu obrotowego i opisać warunki, przy których równania te mogą być stosowane. Dokonałmy tego w tablicy 13-1.

* Patrz E. Gerjuoy, *American Journal of Physics*, 17, 477 (1949).

Najważniejsze równania dla ruchu obrotowego

Nr równania	Równanie	Uwagi
I. Definicja		
(12-1)	$\tau = r \times F$ $\tau_{zew} = \sum \tau_i = \sum (r_i \times F_i)$	Moment siły względem punktu O spowodowany wypadkową siłą F działającą na punkt materialny Wypadkowy moment względem punktu O sił zewnętrznych działających na układ punktów materialnych
(12-3)	$l = r \times p$ $L = \sum l_i = \sum (r_i \times p_i)$	Moment pędu punktu materialnego względem punktu O Wypadkowy moment pędu układu punktów materialnych względem punktu O
II. Równania		
(12-7)	$\tau = dI/dt$	Równanie ruchu pojedynczego punktu materialnego, na który działa siła o momencie τ . Jest to równanie odpowiadające równaniu $F = dp/dt$ [(równanie (9-12))]. Równanie (12-7) obowiązuje tylko wówczas, gdy τ i I są mierzone względem dowolnego punktu O nieruchomego w inercjalnym układzie odniesienia
(12-9)	$\tau_{zew} = dL/dt$	Równanie ruchu układu punktów materialnych, na który działają siły zewnętrzne o momencie wypadkowym τ_{zew} . Równanie to odpowiada równaniu $F = dP/dt$ [równanie (9-7)]. Równanie (12-9) obowiązuje tylko wówczas, gdy τ_{zew} i L są mierzone względem: (a) dowolnego punktu O nieruchomego w inercjalnym układzie odniesienia i (b) środka masy układu
III. Specjalny przypadek ruchu obrotowego ciała sztywnego dookoła osi nieruchomej w inercjalnym układzie odniesienia (patrz odnośnik na str 274)		
(12-17)	$\tau = I\alpha$	α musi leżeć wzdłuż osi obrotu; I musi odnosić się również do tej samej osi, a τ musi być składową skalarną wektora τ_{zew} skierowanego wzdłuż tej samej osi. Równanie to jest odpowiednikiem równania $F = Ma$ dla ruchu prostoliniowego
(12-18)	$L = I\omega$	ω musi leżeć wzdłuż osi obrotu; I musi odnosić się do tej samej osi, a L musi być skalarną składową wzdłuż tej samej osi całkowitego momentu pędu. Jeżeli oś obrotu jest osią symetrii (tzn. jeżeli jest jedną z osi głównych: patrz odnośnik na str. 308), to wektory L i ω są skierowane wzdłuż tej samej osi. Równanie to jest odpowiednikiem równania $P = Mv$ dla ruchu prostoliniowego

Pytania

1. Poznaliśmy dotąd wiele wielkości wektorowych: położenie, przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie, siłę, pęd i moment pędu. Które z tych wielkości można zdefiniować niezależnie od wyboru początku układu odniesienia?

2. (a) Dlaczego w przykładzie 1 jedynie obrót pręta w górę przesuwają koło w prawą stronę względem człowieka, który je trzyma? (b) Jeżeli człowiek byłby przywiązany do podłogi wielkiego statku kosmicznego poruszającego się w obszarze wolnym od grawitacji, to jaki miałoby to wpły, jeżeli w ogóle by go miało, na przeprowadzany przez niego eksperyment?

3. W przypadku gdy bąk przedstawiony na rys. 13-1 nie wiruje, przewróci się. Jeżeli jego moment pędu związany z ruchem wirowym jest dostatecznie duży w porównaniu z przyłożonym do bąka momentem siły, to bąk będzie wykonywał ruch precesyjny. Co się stanie, jeżeli moment pędu nie będzie dostatecznie duży, tj. gdy bąk będzie wirował powoli.

4. Wirujący bąk ma sferyczną powierzchnię o wielkim promieniu na jednym końcu i ostry pręt na drugim końcu, na którym wiruje. Gdy bąk ten przestaje wirować, kładzie się na bok i opiera swoją sferyczną powierzchnię o podstawę. Wyjaśnić dlaczego tak się dzieje?

5. Sławny fizyk, R. W. Wood, który lubił żarty, zamontował szybko wirujące koło w walizce, którą wręczył bagażowemu prosząc, aby szedł za nim. Co się stanie, kiedy bagażowy szybko zmieni kierunek ruchu zakręcając na rogu? Wyjaśnić posługując się wyrażeniem $\tau = dL/dt$.

6. Żeby samolot jednosilnikowy mógł lecieć poziomo, należy wyważyć go przez podniesienie jednej lotki w górę, a opuszczenie do dołu lotki po stronie przeciwnej. W jakim celu należy to uczynić? Czy jeżeli warunki są normalne, jest to konieczne w przypadku samolotu dwusilnikowego?

7. Śmigło samolotu obraca się zgodnie ze wskazówkami zegara, gdy patrzymy na nie od tyłu. Pilot wychodząc w górę ze stromego nurkowania stwierdza konieczność stosowania lewego steru, gdy jest w najniższym położeniu, aby zachować kurs lotu. Podać wyjaśnienie.

8. Dłaczego długi pręt pomaga linoskoczkowi utrzymać równowagę?

9. Człowiek idący po szynie kolejowej w pewnej chwili zaczyna tracić równowagę. W którą stronę wychyli on ciało w celu odzyskania równowagi, jeżeli zaczyna opadać w prawo? Wyjaśnić to.

10. Opisać przy pomocy równania $\tau = dL/dt$ dynamikę ruchu obrotowego kół szybkiego pociągu poruszającego się na zakręcie.

11. Zaproponować prostą teorię wyjaśniającą stabilność jadącego roweru. (Patrz: David E. H. Jones, *The Stability of the Bicycle, Physics Today*, April 1970.)

12. Wyjaśnić, posługując się pojęciami momentu pędu i momentu bezwładności, jak można rozhuścić huśtawkę? (Patrz: P. L. Tea, H. Falk, Pumping on a Swing, *American Journal of Physics*, December 1968; B. F. Gore, The Child's Swing, *American Journal of Physics*, March 1970; J. T. McMullan, On Initiating the Motion in a Swing, *American Journal of Physics*, May 1972; S. M. Curry, How Children Swing, *American Journal of Physics*, October 1976.)

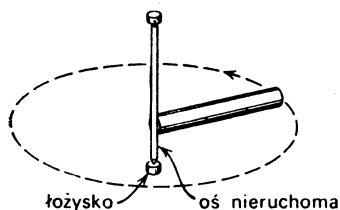
13. Dla uniknięcia poślizgu kuli bilardowej na początku jej toru, uderzamy ją kijem nie w środek (tzn. na wysokości od powierzchni stołu równej promieniowi kuli R), lecz dokładnie na wysokości $\frac{2}{3}R$ powyżej środka. Wyjaśnić to. (Patrz: Arnold Sommerfeld, *Mechanics, Volume I of Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press, New York 1964; wydanie broszurowe).

14. Istnieją takie punkty na kiju do gry w baseball, że jeżeli siła jest przykładana do piłki właśnie w tych punktach, to ręce gracza mogą zboleć, a kij może się złamać. Wyjaśnić to zjawisko. (Patrz: P. Kirkpatrick, Batting the Ball, *American Journal of Physics*, August 1963).

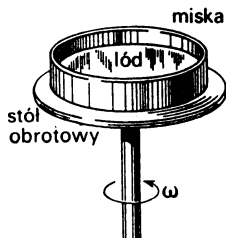
15. Przyjąć, że jednolity pręt znajdujący się w pozycji pionowej na powierzchni o nieznacznym tarciu, uderzono poziomo w dolny koniec. Opisać ruch środka masy pręta oraz ruch jego górnego końca.

16. Cylinder obraca się z prędkością kątową ω dokoła osi przechodzącej przez jeden z jego końców, jak to ilustruje rysunek 13-9. Wybrać właściwy początek układu i znaleźć wektory L i ω . Czy są one równoległe i czy właściwości symetryczne układu mają tu jakieś znaczenie?

17. Rozważyć ruch piłki nożnej spadającej w powietrzu. Czy moment pędu względem środka masy piłki jest zachowany podczas lotu? Czy wartość albo kierunek prędkości kątowej zmienia się względem osi nieruchomej w przestrzeni albo osi związanej z piłką?



Rys. 13-9. Pytanie 16



Rys 13-10. Pytanie 22

18. W rozdziale 1 zauważono, że topnienie pokrywy lodowej na biegunie północnym może być przyczyną zmiany okresu obrotu Ziemi. Wyjaśnić to zjawisko.

19. Dużo wielkich rzek płynie w kierunku równika. Jaki wpływ na obrót Ziemi wywierają osady unieszone przez te rzeki do morza?

20. Człowiek znajdujący się na krześle obrotowym obraca się z prędkością kątową ω . W wyciągniętych ramionach trzyma on dwa równe ciężarki. W pewnej chwili upuszcza te ciężarki nie zmieniając położenia rąk. Jak zmieni się (i czy zmieni się) prędkość kątowa? Czy prawo zachowania momentu pędu jest spełnione? Wyjaśnić to.

21. Jeżeli w przykładzie 5 sznurek uwolnimy nagle tak, aby przedmiot mógł poruszać się po kole o promieniu r_1 , to czy wróci on do swej początkowej prędkości? Co się zdarzy, gdy ktoś pociągnie sznurek na dół i nagle go zwolni? Wyjaśnić przebieg zjawiska posługując się pojęciami pracy i energii oraz momentu siły i momentu pędu.

22. Okrągły stół obrotowy obraca się ze stałą prędkością kątową dookoła osi pionowej; ani tarcie, ani moment siły napędowej nie występują. Cylindryczne naczynie umieszczone na stole obraca się razem z nim, patrz rys. 13-10. Dno naczynia pokryte jest jednorodną warstwą lodu, który oczywiście obraca się razem z naczyniem. Lód topi się, lecz cała woda pozostaje w naczyniu. Czy po stopnieniu lodu prędkość kątowa będzie większa, ta sama, czy mniejsza niż prędkość początkowa? Podać uzasadnienie odpowiedzi.

Zadania

Paragraf 13-1

1. Wykazać, opierając się na wzorze $\tau = dL/dt$, że całka momentu siły względem czasu (popęd momentu siły) równa się zmianie momentu pędu. Zależność ta jest odpowiednikiem prawa pędu i popędu.

Paragraf 13-2

2. Wokół osi tworzącej z pionem kąt 30° obraca się bąk z prędkością kątową 30 Hz (obr/s). Jego masa wynosi 0,5 kg oraz moment bezwładności $5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Środek masy bąka jest odległy od punktu podparcia o 4 cm. Jaki jest kierunek i wartość prędkości kątowej precesji, jeżeli bąk obraca się w kierunku ruchu wskazówek zegara?

3. Giroskop składa się z obracającego się krążka o promieniu 0,05 m odpowiednio umocowanego w środku osi o długości 0,12 m, w ten sposób, aby mógł wirować i swobodnie ulegać precesji. Znaleźć prędkość precesji (w obr/min), jeśli jeden koniec osi jest przytrzymywany i oś jest pozioma oraz jeżeli prędkość wirowania giroskopu wynosi 1000 obr/min.

Odp.: 43 obr/min.

4. Giroskop z zadania 3 jest zmodyfikowany poprzez doczepienie małego ciężarka do drugiego końca osi. Znaleźć nową prędkość precesji (w obr/min) jako funkcję stosunku $r = (\text{masa doczeplonego ciężarka}) / (\text{masa krążka w giroskopie})$.

Paragraf 13-3

5. Biorąc za punkt wyjścia równanie (11-20b) $\mathbf{a}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ dla cząstki poruszającej się po okręgu wykazać, że siła potrzebna dla utrzymania ruchu jednostajnego po okręgu koła wynosi $\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$. Porównać to z równaniem (13-3), $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}$, i wyjaśnić, dlaczego ruch precesyjny bąka może być uważany za odpowiednik jednostajnego ruchu punktu materialnego po okręgu.

6. Z dwóch kół, A i B , utworzono przekładnię jak na rys. 13-11. Promień B jest trzy razy większy od A . Jaki byłby stosunek momentów bezwładności I_A/I_B , jeżeli: (a) oba koła miałyby jednakowy moment pędu, (b) oba koła miałyby jednakową obrotową energię kinetyczną?

7. Wykazać, że dla układu dwóch cząstek z rys. 13-4 $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

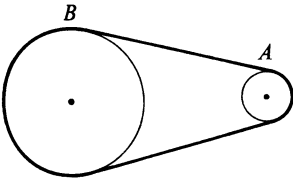
8. Na rys. 13-12 widzimy symetryczne ciało sztywne obracające się dookoła nieruchomej osi. Początek układu współrzędnych dla wygody umieszczono w środku masy. Dowieść, sumując po wszystkich elementach mas m_i , na które ciało jest podzielone, że $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, gdzie $\mathbf{L}$ jest całkowitym momentem pędu ciała sztywnego.

9. (a) Przyjąć, że elektron krąży wokół jądra atomu wodoru po orbicie kołowej. Siła dośrodkowa dzia-

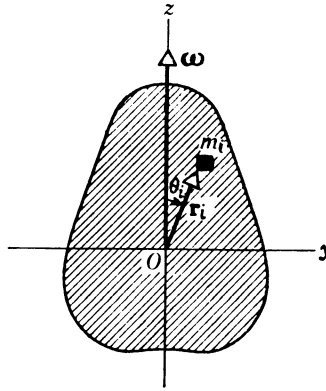
łajająca na elektron jest siłą elektryczną równą $e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$, gdzie e jest wartością ładunku elektronu i protonu, r — promieniem orbity oraz ϵ_0 — stałą. Wykazać, że promień orbity

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2},$$

gdzie m jest masą elektronu, v — jego prędkością.



Rys. 13-11. Zadanie 6



Rys. 13-12. Zadanie 8

(b) Przyjąć, że moment pędu elektronu krążącego wokół protonu może przyjmować jedynie całkowite wielokrotności n liczby $h/2\pi$, gdzie h jest stałą, zwaną *stałą Plancka*. Wykazać, że jedynymi orbitami, po których elektron może się poruszać, są orbity o promieniach określonych wzorem:

$$r = \frac{nh}{2\pi m v}.$$

(c) Opierając się na powyższych dwóch wzorach pokazać, że jedynymi orbitami spełniającymi oba warunki są orbity o promieniach:

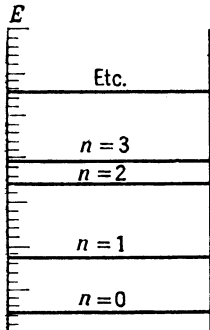
$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}.$$

Stąd widać, że dozwolone orbity mają promienie proporcjonalne do kwadratu liczb całkowitych $n = 1, 2, 3$ itd. Gdy $n = 1$, r ma wartość najmniejszą równą $0,528 \cdot 10^{-10}$ m.

10. W 1913 roku Niels Bohr wysunął postulat, według którego każdy mechaniczny, obracający się układ o momencie bezwładności I może mieć moment pędu, którego wartości mogą przyjmować jedynie całkowite wielokrotności liczby $h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$ J · s ($\hbar = h/2\pi$). Innymi słowy

$$L = I\omega = n(h/2\pi),$$

gdzie n jest równe dowolnej liczbie naturalnej. Mówimy, że moment pędu jest skwantowany, ponieważ nie może przyjmować każdej wartości. (a) Wykazać, że postulat ten prowadzi do wniosku, iż energia kine-



Rys. 13-13. Zadanie 10

tyczna obracającego się układu może przyjmować jedynie określone wartości, tj. wykazać, że energia kinetyczna jest skwantowana. (b) Rozważmy tzw. *rotator*, czyli masę m zmuszoną do obracania się po okręgu o promieniu R . Przyjmując, że postulat jest słuszny, z jakimi prędkościami kątowymi ta masa może się obracać? Jakie wartości energii kinetycznej może mieć ta masa? (c) W celu pokazania, jak zmienia się odległość między poszczególnymi poziomami energii ze wzrostem liczby n , wykonać wykres poziomów energetycznych. Wykres ten może mieć postać taką, jak na rys. 13-13. Pewne niskoenergetyczne dwuatomowe cząsteczki zachowują się jak rotator.

11. Korzystając z danych zawartych w tablicach znaleźć: (a) moment pędu Ziemi względem jej własnej osi obrotu, (b) moment pędu Ziemi i jej ruchu po orbicie wokół Słońca.

Odp.: (a) $7,1 \cdot 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, (b) $2,7 \cdot 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

12. Pręt ma masę 4 kg oraz długość $1,2 \text{ m}$. Początkowo znajduje się on w spoczynku na gładkiej poziomej powierzchni. W pewnej chwili pręt został uderzony z siłą, której popęd równa się $13 \text{ N} \cdot \text{s}$, w punkt odległy od jego środka o $l = 1,5 \text{ m}$. Określić ruch pręta po tym uderzeniu.

13. Księżyc obraca się dookoła Ziemi tak, że widzimy zawsze tę samą jego stronę. (a) Jak powiązana jest część spinowa i orbitalna momentu pędu Księżyca? (b) O ile musi zmienić się moment pędu Księżyca, aby w ciągu jednego miesiąca można było widzieć obie jego strony?

Odp.: (a) $L_{\text{spin}}/L_{\text{orbit}} = \frac{2}{5} (R_K/R_{Z-K})^2$, gdzie R_K — promień Księżyca, R_{Z-K} — odległość między Ziemią a Księżycem. (b) Wzrost lub spadek o połowę obecnej wartości.

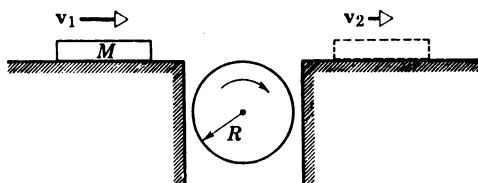
14. Cylinder toczy się w dół równi pochyłej nachylonej pod kątem θ . Wykazać, stosując bezpośrednio równanie (12-9) ($\tau = dL/dt$), że przyspieszenie środka masy cylindra wynosi $\frac{2}{3}g \sin \theta$. Porównać tę metodę z metodą użytą w przykładzie 10 rozdziału 12.

15. Zależność pomiędzy całkowitym momentem pędu układu punktów materialnych, orbitalnym momentem pędu i spinowym momentem pędu. Całkowity moment pędu układu punktów materialnych względem początku O inercjalnego układu odniesienia obliczamy z równania $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$, gdzie $\mathbf{r}_i$ i $\mathbf{p}_i$ są mierzone względem początku układu O .

(a) Korzystając z zależności $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\text{sr.m.}} + \mathbf{r}'_i$ i $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_{\text{sr.m.}} + \mathbf{p}'_i$ z zadania 10, rozdziału 12 wyrazić wektor $\mathbf{L}$ w funkcji położen $\mathbf{r}'_i$ i pędów $\mathbf{p}'_i$, liczonych względem środka masy C . (b) Korzystając z definicji środka masy i definicji momentu pędu $\mathbf{L}'$ względem środka masy (patrz zadanie 10, rozdział 12) otrzymać wyrażenie $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{\text{sr.m.}} \times M \mathbf{v}_{\text{sr.m.}}$. (c) Wykazać jak ten wynik należy interpretować, mając na uwadze, że całkowity moment pędu jest sumą spinowego momentu pędu (moment pędu względem środka masy) i orbitalnego momentu pędu (moment pędu ruchu środka masy C względem początku układu O , tak jakby cała masa układu była skoncentrowana w punkcie C).

16. Cienka prostokątna płyta o długości a i szerokości b obraca się dookoła jednej ze swych przekątnych ze stałą prędkością kątową ω . Oś obrotu jest osią nieruchomą w inercjalnym układzie odniesienia. Znaleźć kierunek i wartość momentu pędu $\mathbf{L}$ względem początku układu współrzędnych znajdującego się w środku masy.

17. Cylinder z rys. 13-14 ma oś nieruchomą i początkowo spoczywa. Kłosek o masie M porusza się na prawo bez tarcia z prędkością początkową v_1 . Po pewnym czasie przesuwa się do położenia zaznaczo-



Rys. 13-14. Zadanie 17

nego na rysunku linią przerywaną. Gdy na tej drodze dotyka cylindra, w pierwszej chwili porusza się poślizgiem, ale ponieważ tarcie jest dostatecznie duże, poślizg zanika, zanim klocek odłączy się od cylindra. Cylinder ma promień R i moment bezwładności I . Znaleźć prędkość końcową v_2 w zależności od v_1 , M , I i R . Najłatwiej można to wyliczyć używając zależności pomiędzy popędem siły i zmianą pędu.

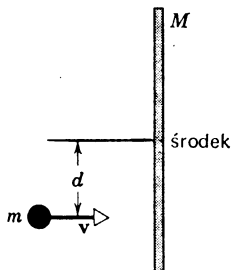
Odp.: $v_2 = v_1/(1 + I/MR^2)$.

18. Pęt o długości l leży na doskonale gładkim poziomym stole. Pęt ma masę M i może poruszać się w dowolny sposób po powierzchni stołu. Krążek hokejowy o masie m poruszający się, jak to widzimy na

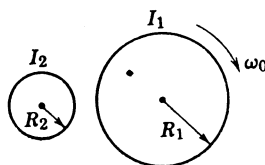
rys. 13-15 z prędkością v zderza się sprężysto z prętem. (a) Jakie wielkości są zachowane w tym zderzeniu? (b) Jaka musi być masa m krążka, aby pozostał on w spoczynku bezpośrednio po zderzeniu?

19. W którym punkcie jednolitego pręta o długości $2L$ zaczepionego jednym końcem i zwisającego pionowo, należałoby go uderzyć, aby spowodować jego ruch wahadłowy, nie powodując powstania początkowej, poziomej siły reakcji w punkcie zawieszenia?

Odp.: $4L/3$.



Rys. 13-15. Zadanie 18



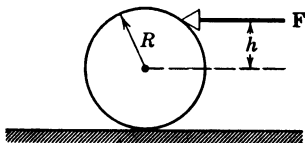
Rys. 13-16. Zadanie 20

20. Dwa cylindry o promieniach R_1 i R_2 oraz momentach bezwładności I_1 i I_2 utrzymują się na nieruchomych osiach prostopadłych do płaszczyzny rysunku 13-16. Duży cylinder początkowo obraca się z prędkością kątową ω_0 . Mały cylinder przesuwa się w prawą stronę, dopóki nie dotknie dużego cylindra, co dzięki istnieniu sił tarcia powoduje jego ruch obrotowy. Poślizg w końcu zanika i te dwa cylindry obracają się ze stałymi prędkościami w przeciwnych kierunkach. (a) Znaleźć końcową prędkość kątową ω_2 małego cylindra w zależności od I_1 , I_2 , R_1 , R_2 i ω_0 . (b) Czy całkowity moment pędu w tym przypadku jest zachowany?

21. Kij nadaje przyspieszenie spoczywającej początkowo kuli bilardowej. Kij przed uderzeniem kuli znajduje się w pozycji poziomej, na wysokości h powyżej osi kuli (rys. 13-17). Kula odbija się od kija z prędkością v_0 , ale ze względu na „fałszywe uderzenie do przodu” osiąga ostatecznie końcową prędkość $\frac{9}{7}v_0$. Wykazać, że

$$h = \frac{4}{5}R,$$

gdzie R jest promieniem kuli.



Rys. 13-17. Zadanie 21

22. W zadaniu 21, wyobraźmy sobie siłę F działającą poniżej linii centralnej przechodzącej przez środek kuli bilardowej. (a) Wykazać, że jest rzeczą niemożliwą zredukować prędkość kuli do zera, stosując „odwrotne uderzenie fałszem”, chyba że $h = R$. (b) Wykazać również, że jest rzeczą niemożliwą nadać kuli prędkość do tyłu, chyba że siła F ma składową pionową w dół.

Paragraf 13-4.

23. Na obracającej się bez tarcia, z prędkością kątową 1 obr/s (Hz) platformie stoi człowiek. Ma on ramiona wyciągnięte w bok i w każdej ręce trzyma ciężarek. W tej pozycji całkowity moment bezwładności człowieka i platformy wynosi $6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Jeżeli z chwilą przyciągnięcia ciężarków do siebie człowiek zmniejsza ogólny moment bezwładności do $2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, to: (a) jaka będzie prędkość kątowna platformy? (b) o ile zwiększy się jej energia kinetyczna?

Odp.: (a) 3 Hz. (b) O czynnik 3.

24. Dwaj łyżwiarze o masie 50 kg każdy zbliżają się do siebie po równoległych torach oddalonych o 3,0 m. Łyżwiarze mają równo, lecz przeciwnie skierowane prędkości wynoszące 10 m/s. Pierwszy łyżwiarz trzyma lekką, 3-metrowej długości tyczkę, drugi łyżwiarz chwytą za jej koniec w chwili, gdy łyżwiarze

mijają się. (Zakładamy doskonałą gładkość lodu). (a) Opisać ilościowo ruch łyżwiarzy od chwili, gdy zostali oni połączeni tyczką. (b) Ciągnąc za tyczkę łyżwiarze zmniejszają odległość między sobą do 1 m. Jak zmieni się ich ruch? (c) Porównać energie kinetyczne układu w punktach (a) i (b). Skąd pochodzi zmiana w energii kinetycznej?

25. Koło obraca się z prędkością kątową 800 obr/min na drążku, którego moment bezwładności można pominąć. Drążek ten został obciążony drugim kołem, początkowo nieruchomym, o dwukrotnie większym momencie bezwładności od koła pierwszego. (a) Jaka jest prędkość kątowa układu złożonego z drążka i tych dwóch kół? (b) Rozważyć zmiany zachodzące w ilości obrotowej energii kinetycznej w tym układzie.

Odp.: (a) 267 obr/min. (b) Układ traci dwie trzecie swej energii kinetycznej.

26. Koło rowerowe ma obręcz o promieniu 34,7 cm i masie 3,8 kg. Masę szprych i piasty pomijamy. Koło to może się obracać dookoła swojej osi bez tarcia. Człowiek stojący na stole obrotowym (który obraca się bez tarcia) trzyma nad głową to koło rowerowe i pozwala mu się obracać dookoła pionowej osi z prędkością kątową 57,7 rad/s. Stół obrotowy początkowo spoczywa. Moment bezwładności układu składającego się z koła, człowieka i stołu obrotowego dookoła tej samej osi wynosi $2,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. (a) Człowiek nagle zatrzymuje ręką obracające się koło (względem stołu obrotowego). Określić spowodowaną w ten sposób prędkość kątową (wartość i kierunek) układu. (b) Eksperyment powtarzano przy założeniu istnienia tarcia w osi koła, które przy tej samej początkowej prędkości kątowej 57,7 rad/s stopniowo zwalnia (względem stołu obrotowego), zanim człowiek zatrzyma je ręką w sposób opisany w punkcie (a). (Stół obrotowy w dalszym ciągu może się obracać bez tarcia). Opisać zachowanie się układu, podając wszystkie dane ilościowe, które są możliwe do wyliczenia.

27. Wirnik silnika elektrycznego ma moment bezwładności $I_m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ względem swej osi. Silnik jest dołączony równolegle do osi sondy kosmicznej mającej moment bezwładności $I_p = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ względem jej osi. Obliczyć liczbę obrotów potrzebnych, aby sonda obróciła się o 30° dookoła swej osi.

Odp.: 500 obrotów.

28. Podczas wykładu zademonstrowano tor dziecięcej kolejki umocowany na dużym kole, które może się swobodnie obracać dookoła pionowej osi (tarcie można pominąć). Kolejkę o masie m umieszczono na torze. Układ początkowo jest nieruchomy, następnie połączono go ze źródłem energii elektrycznej. Kolejka osiąga na torze stałą prędkość v . Jaka jest prędkość kątowa ω koła, jeżeli jego masa wynosi M , a promień R ? (Pominąć masę szprych koła).

29. Dziewczyna (masa M) stoi na brzegu karuzeli (brak tarcia, masa $10M$, promień R , moment bezwładności I), która się nie porusza. Rzuca kamień (masa m) w kierunku poziomym, który jest styczny do zewnętrznego brzegu karuzeli. Prędkość kamienia względem podłoża wynosi v . Jaka jest: (a) prędkość kątowa karuzeli, (b) prędkość liniowa dziewczyny, gdy kamień został rzucony?

Odp.: (a) $mvR/(I+MR^2)$. (b) $vmR^2/(I+mR^2)$.

30. Mała karuzela o promieniu 1,2 m i masie 180 kg ma równoważny promień 0,91 m (patrz zadanie 14 rozdział 12). Dziecko o masie 44 kg biegnie po stycznej do brzegu karuzeli z prędkością 3,0 m/s i wskakuje na nią w chwili, gdy karuzela znajduje się w spoczynku. Pomijając tarcie między zawiasami i osią karuzeli znaleźć prędkość kątową karuzeli oraz dziecka.

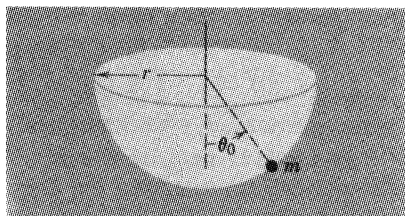
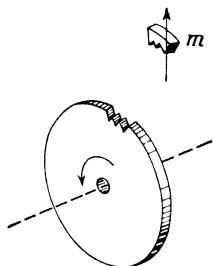
31. Jednorodny płaski krążek o masie M i promieniu R obraca się z prędkością kątową ω_0 wokół poziomej osi przechodzącej przez jego środek. (a) Jaki jest jego moment pędu? (b) Kawałek krążka o masie m odłamuje się od jego brzegu tak, że odlatuje w kierunku pionowym od punktu, z którego się odłamał (rys. 13-18). Jak wysoko nad tym punktem uniesie się ten kawałek? (c) Jaka jest końcowa prędkość kątowa pękniętego krążka? Jaki jest jego końcowy moment pędu i jaka energia?

Odp.: (a) $MR^2\omega_0^2/4$; $MR^2\omega_0/2$. (b) $R^2\omega_0^2/2g$. (c) ω_0 ; $(M/2-m)R^2\omega_0$; $(M/2-m)R^2\omega_0^2/2$.

32. Na brzegu talerza obracającego się wokół osi przechodzącej przez jego dno porusza się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara karaluch o masie m . Promień talerza wynosi R , a jego moment bezwładności I . Talerz obraca się bez tarcia. Prędkość karalucha względem Ziemi jest v , podczas gdy talerz obraca się w kierunku ruchu wskazówek zegara z prędkością kątową ω_0 . W pewnej chwili karaluch znajduje na brzegu talerza okruch chleba i oczywiście zatrzymuje się. (a) Jaka jest prędkość kątowa talerza w chwili, gdy karaluch się zatrzyma? (b) Czy została zachowana energia układu?

33. Porównać energię kinetyczną ciała obiegającego dwie różne orbity, z przykładu 5. Stosując twierdzenie o pracy i energii wyjaśnić ilościowo tę różnicę.

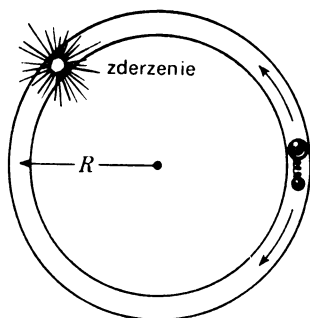
34. We wnętrzu gładkiej, półkulistej czaszy, w kierunku poziomym (prostopadle do osi czaszy) została wyrzucona cząstka. Promień nieruchomej czaszy wynosi r (rys. 13-19). Znaleźć prędkość początkową cząstki v_0 wystarczającą do osiągnięcia górnego brzegu czaszy. Znaleźć v_0 jako funkcję θ_0 kąta określającego początkowe położenie cząstki. (Wskazówka: zastosować zasady zachowania).



Rys. 13-18. Zadanie 31

Rys. 13-19. Zadanie 34

35. Na dużym, poziomym, kołowym torze o promieniu R leżą dwie kule o małych masach m i M , mogące poruszać się po tym torze bez tarcia. Między tymi kulami wciśnięta jest nie przytwierdzona do nich sprężyna. Kule są do siebie przymocowane za pomocą linki. (a) W pewnej chwili linka pęka, sprężyna poprzednio ściśnięta (której masę możemy pominąć) odrzuca oba ciała w przeciwnych kierunkach. Kule zderzają się w punkcie, w którym ponownie spotykają się na torze (rys. 13-20). W którym miejscu nastąpi



Rys. 13-20. Zadanie 35

zderzenie? (Można wyrazić to za pomocą kąta, jaki zakreśla kula M). (b) Jeżeli energia potencjalna początkowo zmagazynowana w sprężynie jest U_0 , to jaki czas upłynie od chwili, w której linka zerwała się, do chwili zderzenia kul? (c) W którym punkcie kule zderzą się powtórnie, jeżeli pierwsze zderzenie było centralne oraz sprężyste?

Odp.: (a) $2\pi m/(m+M)$ rad. (b) $[2\pi^2 mMR^2/(m+M)U_0]^{1/2}$. (c) W punkcie początkowym.