

- Wykazać, że poniższe operatory są hermitowskie w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem.
 - $\hat{x} = x$ (kwantowy operator położenia)
 - $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ (kwantowy operator pędu)
- Wykazać, że jeśli 2 operatory mają wspólny układ funkcji własnych to ich komutator jest równy zero.
- Poprzez odpowiednie przekształcenie równania Schrödingera zależnego od czasu wykazać słuszność równania Heisenberga:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \langle \psi | [\hat{O}, \hat{H}] | \psi \rangle \quad (1)$$

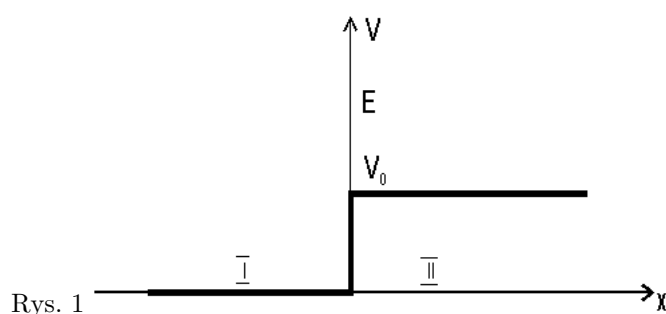
gdzie operator $\hat{O}$ nie zależy jawnie od czasu. Co z tego równania wynika? (kolejna ważna informacja dostarczana przez komutator).

- Obliczyć komutatory operatora pędu i położenia z hamiltonianem cząstki swobodnej ($V = 0$). Co z tego wynika? Zapisać równanie z zadania 1 dla operatora pędu w przestrzeni w której działa na cząstkę potencjał V . Co przypomina to równanie?
- Znaleźć unormowane funkcje własne operatora pędu.
- Rozwiązać 1-wymiarowe, zależne od czasu równanie Schrödingera dla cząstki swobodnej (separacja zmiennych t, x).
- Gęstość prądu prawdopodobieństwa definiujemy jako: $\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)$. Na podstawie równania Schrödingera zależnego od czasu udowodnić równanie ciągłości prądu prawdopodobieństwa:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = 0. \quad (2)$$

ρ jest gęstością prawdopodobieństwa $|\psi|^2$. Zauważcie, że równanie to ma identyczną strukturę jak równanie ciągłości ładunku w elektrodynamice. Obliczyć gęstość prądu prawdopodobieństwa dla cząstki swobodnej o pędzie p (1D).

- Pobawić się programem symulującym padanie fali na próg i barierę potencjału: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/quantum-tunneling> (zmieniać szerokość i wysokość bariery, energię cząstki). Sprawdzić zachowania dla przypadków opisanych w zadaniu poniżej. Aby symulować falę płaską należy wybrać w panelu "plane wave". Ustawienie "wave packet" pozwala na symulację bardziej rzeczywistego "padania" paczki falowej na próg/barierę.
- Cząstka o energii E pada na próg potencjału o wysokości V_0 (Rys 1.). Oblicz współczynniki odbicia $R = |j_{odb}/j_{pad}|$ i transmisji $T = |j_{trans}/j_{pad}|$. Jak współczynniki zależą od energii cząstki i wysokości progu? Rozważyć przypadki $E < V_0$ i $E > V_0$. Narysować gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w obszarze progu dla $E < V_0$. Co będzie dla $E = V_0$ oraz $E > 0, V_0 \ll 0$?



10. *Baj, V.8* Znaleźć współczynnik transmisji i odbicia dla bariery (Rys 2.) dla $E < V_0$. Obliczyć prawdopodobieństwo przetunelowania przez barierę o $V_0 = 2$ eV szerokości $1 \text{ \AA}$ dla elektronu i protonu o energiach 1 eV .

